EMIGDIO RODRÍGUEZ PITA

CÁLCULO COMERCIAL

TRATADO

DE

Cálculo Comercial

ESTUDIO MATEMÁTICO ELEMENTAL ADAPTADO A LA TÉCNICA MODERNA

Propio para el primer grado de la carrera mercantil y para satisfacer las necesidades del trabajo de oficina en Banca, Bolsa, y toda clase de negocios.

POR

EMIGDIO RODRIGUEZ PITA

Contador, Profesor e Intendente mercantil

CATEDRÁTICO POR OPOSICIÓN EN LA ESCUELA DE COMERCIO DE OVIEDO

SEGUNDA EDICIÓN

NOTABLEMENTE MEJORADA

BIBLIOTECA DE CASTILLA Y L

AVILA

TIPOGRAFÍA Y ENCUADERNACIÓN DE SENÉN MARTÍN

1931

Es propiedad del autor.
Quedan cumplidos los requisitos legales.

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN

Cuantos viven la vida de los negocios han podido apreciar que los estudios mercantiles en España adolecen de falta de aquellas materias que constituyen la importantísima rama de las Ciencias llamada Técnica Mercantil, hasta el punto de que ésta no existe como materia independiente en las asignaturas que integran los estudios oficiales. Esta falta hace que los conocimientos de la Técnica hayan de adquirirlos los alumnos de las Escuelas de Comercio diseminados y como partes secundarias de otras materias, teniéndose con ello un conocimiento incompleto y desunido.

Quizás para remediar el defecto apuntado, existían en el plan de estudios de 1915 las asignaturas de Prácticas mercantiles y de Técnica comercial; pero fueron suprimidas en el plan que ahora rige dejándonos de nuevo en la falta que lamentamos.

No es extraño que estando en tales condiciones los estudios, se hubieran estancado las publicaciones respecto a los progresos de la Técnica y a las modificaciones que ésta creaba en las operaciones mercantiles; y es el estancamiento a que nos referimos el que está más señaladamente representado por las obras de Cálculo.

Puede apreciarse ésto, comparando cualquiera de las obras aparecidas en todo este cuarto de siglo, pues todas son en el Cálculo comercial propias para las transacciones de hacia los años de 1890 al 1895, desde cuya época nada nuevo se ha hecho ni nada se ha cambiado en las publicaciones, careciendo de obras en absoluto, ni malas ni buenas, para algunas ramas del Cálculo Mercantil.

Tal era el estado en que nos encontramos al hacernos car-

go de la cátedra, y considerando de gran urgencia el que se tuviera una obra de acuerdo con la técnica moderna, nos decidimos a poner en limpio los apuntes hechos en nuestra preparación para las oposiciones a la cátedra, teniendo a la vez presentes las más recientes publicaciones extranjeras. He aquí pues, el origen de este trabajo que hoy damos a la publicidad, del que son estas líneas una exposición del criterio que hemos sustentado en su formación, toda vez que decidida la publicación era imprescindible determinar la extensión de la obra y decidirse por el sistema que se utilizaría en el desarrollo de las materias a tratar.

En cuanto a la extensión que habría de tener la obra, hemos creído que para ser útil en sus aplicaciones prácticas y satisfacer las necesidades de la vida de los negocios, era indispensable no limitarnos a la materia que se estudie en un curso, porque dándole alguna mayor extensión pueden los mejores alumnos ampliar sus conocimientos sobre el término medio de la clase, y además todos conocerán la extensión del campo científico. Por esas cuestiones que no se comprenden en el programa del curso y por la bibliografía que acompaña a la obra, es posible la ampliación de conocimientos en el grado que se desée para los que quieran investigar en el campo del Cálculo Mercantil, y además servirá el texto para cualquier consulta que pueda ser necesaria a los jóvenes en la vida de los negocios; puesto que siempre es más fácil de consultar el mismo libro que se estudió que otro cualquiera, por estar más familiarizado con el que haya servido de texto.

Respecto a la forma en que habíamos de exponer las diferentes cuestiones, hemos tenido como fundamento el carácter de ciencia aplicada que distingue al Cálculo comercial, a cuya formación concurren con los conocimientos matemáticos, los de derecho, economía, finanzas, prácticas, usos y costumbres comerciales, y hasta de estadística y control. Considerando además que la misión de la ciencia aplicada es de aconsejar y dirigir la ejecución y resolución de los problemas prácticos, nos ha sido indispensable tener siempre presentes el efecto de conjunto de todos aquellos conocimientos, y considerar la aplicación de los principios matemáticos lo mismo en relación a las condiciones idealmente perfectas de la administración

económica, que a las condiciones imperfectas de dicha administración, en cuanto que estas últimas son cuestiones palpitantes de imprescindible estudio para desterrarlas como rutinas o respetarlas como medios ventajosos de operar.

Por las razones expuestas, tratamos todas las cuestiones examinando primero el efecto de conjunto de los conocimientos enumerados y que forman la Técnica, dando después la interpretación matemática de los mismos. El estudio matemático a que nos referimos, está hecho de modo que comprenda el mayor número posible de cuestiones semejantes, para lo cual, además del carácter de generalidad que tienen las fórmulas deducidas para cada caso, establecemos relaciones de unos casos con otros por medio de referencias a los párrafos correspondientes. Después del estudio racional que hacemos de cada cuestión práctica de la vida de negocios, insistimos en los errores que se pueden cometer con los procedimientos abreviados y prácticos, para coadyuvar en lo posible al destierro o respeto de procedimientos a que antes nos referíamos.

El estudio matemático está hecho de modo que pueda satisfacer al más exigente cultivador de las matemáticas puras, pero distribuído por el orden de operaciones administrativas, para facilitar la consulta en caso de necesitarse en alguna operación determinada, puesto que si el estudio matemático como ciencia pura ha de buscar el conocimiento de la verdad, también el estudio de conjunto que constituye nuestra ciencia aplicada ha de buscar lo más útil.

En esta última palabra está expresado lo que constituirá la satisfacción de nuestro trabajo; ser útiles a los hombres de negocios y dar a conocer a los que aspiren a serlo la mejor resolución matemática de las operaciones administrativas de esa vida de negocios.

EMIGDIO RODRÍGUEZ PITA.

Oviedo agosto de 1924.

PRÓLOGO DE LA SEGUNDA EDICIÓN

El tiempo transcurrido desde que apareció la primera edición, se halla caracterizado en el mundo de los negocios por las modificaciones introducidas en los sistemas monetarios, hasta el punto de que, salvo muy pocos países, la situación legal de sus monedas ha sido cambiada, y aún en estos pocos los hay en que siguiendo el mismo sistema anterior ha cambiado la relación monetaria, y otros en que está en vías de estudio la transformación de las monedas; pero en unos y otros se ha hecho la adaptación de la unidad monetaria a la relación entre el valor del oro y de las demás mercancías, desapareciendo el carácter de metal amonedable que tenía la plata, y consolidando legalmente la necesidad de sistemas monometalistas.

Siguiendo el criterio que nos propusimos al escribir esta obra, hemos recopilado en esta edición todas esas transformaciones legales, a la vez que todos los cambios económicos que alteran los elementos de cálculo de los problemas mercantiles, resultando así nuestra obra puesta completamente al día en todas sus cuestiones, hasta el punto de que comprendemos el nuevo sistema monetario de Yugoslavia que aún no está puesto en vigor al terminar de imprimirse este volúmen sino que ha de estarlo al terminar el presente mes de junio de 1931, y el de Portugal legalizado en estos mismos días.

Pero entre esos nuevos sistemas no podemos desgraciadamente incluir el español, sino que aún hemos de presentar el de 1868, esperando sin género de duda que muy pronto haya de resolverse este problema, y una vez que la nueva Ley monetaria sea un hecho completaremos esta parte de nuestra obra con las aclaraciones necesarias, ya que sólo será la in-

formación relativa, la que sufra variación, pues nunca podrán cambiar los estudios científicos que sobre la metrología y los cambios hacemos en este trabajo, en donde además hemos procurado redactar los ejemplos resueltos en forma que sean de aplicación a sistemas cualesquiera, tanto de existencia real como de posible realidad.

Considerada en conjunto, esta segunda edición es la primera con las perfecciones que siempre aconseja la realidad práctica, tanto para mejorar didácticamente los conocimientos que con ella hayan de adquirirse, como para facilitar la consulta en las cuestiones que ocasiona la vida de negocios; y para estos objetos hemos agrupado en la parte preliminar problemas de carácter general en toda clase de negocios, que son resueltos por medio de la Matemática pura, y separado las tablas reuniéndolas en un tomo especial.

También hemos ampliado las cuestiones tratadas, dando una importancia mayor a lo que en la primera edición fué un ensayo en los medios gráficos de estudio y resolución de cuestiones mercantiles, a cuyo objeto aparece un capítulo que, en forma general, estudia estos medios, y luego en las otras partes se hace la aplicación de tal sistema a las cuestiones especiales a que se refiera la parte correspondiente. Otra cuestión igualmente rehecha, es la del cálculo mecánico, como medio indispensable actualmente en todos los negocios, estudiando de una manera sistemática de carácter aplicativo todos los modelos de aparatos que hoy existen.

Mas aunque éstas son las principales ampliaciones, contiene toda la obra no pocas cuestiones que no contenía la primera edición, además de que hemos repasado cuidadosamente todos los párrafos, e introducido los cambios que la práctica nos ha aconsejado como más claros y perfectos, tanto en nuestra experiencia como en la que nos han dado a conocer queridos compañeros, a quienes desde aquí expresamos nuestro reconocimiento.

Como nueva ampliación, en todas los cuestiones estudiadas aparece una indicación de ejercicios para resolver, que corresponden a la colección de enunciados que publicamos poco después de la primera edición del Tratado, con lo cual nos proponemos dos objetos: 1.º que se tengan en los ejercicios la

ampliación de conocimientos y aplicación de ellos a la práctica de los negocios, y 2.° que sirva de guía para encontrar la resolución de todos los Ejercicios de nuestra colección; completándose todo ello con los resultados de todos y cada uno de dichos enunciados, que tenemos en prensa.

Por fin, hemos rehecho la bibliografía con que termina la obra, dándola una ampliación mucho mayor para comprender en ella las obras que merecen ser consultadas en los idiomas español, francés, italiano, inglés, alemán y holandés, que hemos podido conocer en nuestros estudios, y señalando en ellas la fecha de la última edición que nos es conocida.

En la disposición de la bibliografía hemos formado dos especies de agrupaciones, comprendiendo en trece secciones todas las obras y revistas, de las que son de carácter general a todas las cuestiones los tres primeros grupos y de carácter especial o monográfico los restantes, y dentro de cada una de estas divisiones hemos colocado juntas todas las del mismo idioma para que al consultar las citas pueda cada lector más fácilmente acudir a las que por sus conocimientos se halle en condiciones de comprender.

Por todo lo que antecede, ésta que hoy presentamos al público es una verdadera segunda edición y no reimpresión como suelen ser muchas otras, no dudando que nuestros esfuerzos para las mejoras hechas sean correspondidos en la forma con que fué aceptada la primera edición.

EMIGDIO RODRÍGUEZ PITA.

Oviedo junio de 1951.

ERRATAS

Recomendamos a nuestros lectores que antes de empezar la lectura de la obra corrijan los errores, que a pesar del gran cuidado han resultado, y que indicamos a continuación, costumbre que debe ser adquirida para evitarse molestias cuando una errata de imprenta hace difícil la comprensión de algunos asuntos.

Pág.	Lín.	ERRATA	CORRECCIÓN
33	22	(**17**, 1.° y 2.°) debemos	debemos
56	final	**1225**	**1225** y **1229**
66	final	135000 + 00.000)	135000 + 90000)
70	32	*trusts*	*trust*
79	37	o sea el punto de	o sea en el punto de
85	Fig. 11	interpola n	interpolación
103	1	**82**	**83**
114	1	Fig. 0	Fig. 30
129	29	respecto de una estrella	respecto a una estrella
131	12	de la tierra	de la Tierra
132	6	del mismo sistema	del mismo; sistema
136	5	pero como al día	pero como el día
136	11	abril 6 la primera	abril 6, la primera
136	11	el resto dividir	el resto de dividir
136	19	los resto de 7	los restos de 7
136	22	que rápidamente	con lo que rápidamente
137	7	$= 6s\ s\frac{3}{4}s$	$= 6s - \frac{3}{4}s$
139	24	Pascua de resurrección	Pascua de Resurrección.
149	12	la corona escandina,	la corona escandinava,
157	20	0'900 milésimas	0'900
161	29	tabla XVI	tabla XVII
163	9	20 = 259 4, resto	20 = 295
163	10	9, resto.	9, resto. 4, resto
174	21	= 15'988	= 15,988
180	25	$V = \frac{VRAL}{A'L'}$	$V = \frac{V'RAL}{A'L'}$
181	24	*tabla* **XVI**	*tabla* **XVII**
194	5	y sustituyendo en el	y sustituyendo el
195	8	poner el [15] de la línea 8	en la línea 6
198	11	$= \pi^2 r^2 a$	$= 4\pi^2 r^2 a$
199	4	1'7361 m	= 1'7361 m
200	4	y específico para	y específico), para
204	9	$\frac{pn(n+1)}{2}$	$= \frac{pn(n+1)}{2}$
205	18	$-m(m-1)-m(3M-1-m)$	$-(m-1)m(3M-1m)$

Pág.	Lín.	ERRATA	CORRECCIÓN
210	24	tiempo k	tiempo k
233	2	= 5'0003 %	5'0005 %
233	25	[4]	[5]
239	7	que esta fórmula	que en esta fórmula
291	21	del resultado de	del resultado del
321	25	$C_2(D - n_x)$	$C_x(D - n_x)$
322	5	$\frac{C_x n_1 - D(C_1 - C_x)}{C_x}$	$\frac{C_1 n_1 - D(C_1 - C_x)}{C_x}$
345	10	el día del pago	el día del vencimiento
354	nota 1	*bests bill*	*best bills*
364	(factura C) columna Daño	Certificado	Certificado 0'30
365	5	primera, que en las otras dos	primera que en las otras dos,
371	10	por qué	por el que
375	25	y el correo, y *proporcionales*	y el correo; y *proporcionales*
382	27	da el incierto	da el cierto
388	26	£ 950 — 12 4	£ 950 — 12 — 4
388	32	950 616	950'616
394	26	= £ 1047 — 8 — 1 4	= £ 1047 — 8 — 1'4
400	9	Perú de 4 70	Perú de 4'70
431	39	cálculos de división	cálculos, de división
431	39	o corrección sobre el	o corrección, sobre el
439	1	decenas	décimas
442	20	3000	3800
467	7	*t)*	*l)*
468	10	denominaciones	denominación es
475	29	*addres commissión*	*address-commission*
476	3	address-commissión	address-commission
514	21	= 4175 × 64	= 4 × 175 × 64
566	37	*tabla* XLIV	*tabla* XLV
567	21	y de éstas	y de éstos
568	14	proporción con importe	proporción con el importe.
584	10	para tener	para conseguir
613	33	de títulos emitidos	de los emitidos
613	35	$T = \frac{T' C}{C}$	$T = \frac{T' C'}{C}$
615	29	32155	52155
668	25	0'20	0'002

INTRODUCCIÓN (a)

1.—Concepto del Cálculo Mercantil.—Todavía no se ha determinado exactamente el campo que abarca la materia que vamos a tratar, pues aunque ella constituye una asignatura hace mucho tiempo establecida y cursada, existen en los programas de enseñanza cuestiones de Aritmética pura y en los libros de texto y consulta están en mayoría los que ya callan el concepto o ya le incluyen como parte de la Contabilidad (1), y muchos otros comprenden ambas materias en el mismo libro que sólo titulan como estudio de la Contabilidad.

Para conseguir hallar un concepto propio del *Cálculo Mercantil* nos ha de servir mucho esta confusión de materia con la Contabilidad, pues por medio de ella conocemos los dos principales elementos que han de integrar el referido concepto: 1.º que siendo cálculo será aplicación de las Matemáticas, y 2.º que los hechos reales a que se hace dicha aplicación han de ser forzosamente los mismos que son objeto de estudio por la Contabilidad. Con estos dos elementos y el moderno concepto de la Contabilidad (2), podemos definir el *Cálculo* como la aplicación de las Matemáticas a todos los proble-

(a) Los números que en carácter grueso aparecen en el texto entre paréntesis se refieren a los párrafos que deben ser consultados cuando no recuerde el lector los fundamentos de la cuestión tratada.

(1) Esta confusión proviene de haber tenido a la Contabilidad como una ciencia del grupo de las exactas, y del falso concepto de la cuenta que se toma exclusivamente como operación de cálculo, cuando está ya admitido hoy que la Contabilidad pertenece al grupo de las ciencias Jurídico-Económicas.

(2) En las modernas tendencias de la Contabilidad se tiene por ésta la ciencia que estudia la comprobación de los actos administrativos y la influencia de los mismos sobre la constitución de las Haciendas.

mas que en las diferentes Haciendas pueden ocurrir para hallar el valor de los actos administrativos, o, diciéndolo más resumido: *la ciencia de la valoración de los ACTOS administrativos.*

2.—Materias que comprende el Cálculo Mercantil.—Independiente de las cuestiones fáciles que se resuelven por las reglas de la Aritmética pura o las fórmulas del Algebra, el Cálculo mercantil comprende las ramas siguientes:

1.° El *Cálculo comercial* o *mercantil elemental* que abarca la determinación de los costos y productos de todas las compraventas, es decir, aquellas valoraciones independientes del tiempo, y además aquellas otras que son de vencimiento a plazo corto, como intereses y descuentos simples, medios de cobro y pago de los valores de las compraventas, y arbitrajes de todos ellos. Los intereses y descuentos que se incluyen en esta primera parte son el punto de unión entre ésta y la segunda parte, y la denominación de elemental que le hemos añadido hace referencia a los conocimientos de matemática pura que es preciso conocer para sacar el fruto conveniente del estudio de este Cálculo (1).

2.° El *Cálculo financiero* en el que se estudian todas las cuestiones de interés y descuento, tanto simples como compuestos, si bien sólo de estos últimos se ocupa generalmente por hallarse ya comprendidos los simples en la rama anterior, y con los intereses se incluyen las imposiciones, amortizaciones, rentas y empréstitos cuando no se hallan combinados con elementos extraños al interés.

3.° El *Cálculo actuarial* o *de seguros* en el cual las imposiciones, amortizaciones y rentas tienen, además de los elementos que ya se estudian en la rama anterior, la probabilidad o incertidumbre del momento en que empiezan o que terminan, o de los períodos que duran.

4.° La peritación o *valoraciones complementarias* a los actos administrativos, en cuya rama se comprenden las determinaciones del valor de los bienes que constituyen las Hacien-

---

(1) Examinando la exposición que acabamos de hacer, queda determinado y justificado el plan que seguiremos en esta obra, que sólo ha de tratar del Cálculo mercantil elemental.

das como punto de partida o de término a la administración de las mismas. Llamamos valoraciones complementarias a esta rama, no porque en sí lo sean, sinó porque, siendo todo el Cálculo mercantil valoraciones de actos realizados o a realizar, en esta rama se incluyen las valoraciones que complementan dichos actos (1).

3. – Fuentes para el estudio del Cálculo mercantil.— Para llegar a adquirir el conocimiento completo del Cálculo mercantil en cualquiera de sus ramas no hay que atenerse únicamente al estudio de las matemáticas puras, sino que el conocimiento de éstas servirá como elemento director para la interpretación y medida de aquellos asuntos que determinan el hecho administrativo que ha de calcularse o valorarse.

Resulta por consiguiente que en todas las cuestiones que estudia el Cálculo mercantil lo primero que habrá de tenerse en cuenta son las circunstancias en que se verifican los actos, las modalidades que para los mismos señalan las circunstancias prácticas, y los elementos determinativos de las variaciones que puedan suceder en los actos administrativos. Con estas circunstancias o modalidades y estos elementos, las matemáticas puras dirán después qué leyes rigen dichas variaciones y nos darán a conocer las fórmulas valorativas y los procedimientos que pueden seguirse en la práctica para esas valoraciones.

Según eso las fuentes que hemos de tener presentes para hacer nuestro trabajo serán por un lado las matemáticas puras y por otro la técnica mercantil en sus dos aspectos de comercial y bancaria, y en el curso de nuestro estudio podrá apreciar el lector cómo intervienen en cada cuestión esas dos fuentes de conocimientos.

4. – División adoptada.—El trabajo que vamos a efectuar

---

(1) Hasta ahora no existe en español ningún tratado dedicado especialmente a esta rama del Cálculo mercantil, que además es incluida generalmente como parte de la Contabilidad y aún de la formación de los inventarios; pero de cualquier modo que se la considere (lo mismo formando parte de la Contabilidad que del Cálculo) siempre podrá constituir por sí sola una rama de las matemáticas tan importante e independiente como las otras tres antes enumeradas, y por tanto ciencia exacta bien incluída aquí.

está formado de seis partes principales y otra preliminar aunque sin distinción material en la impresión.

Las seis partes principales comprenden los tres aspectos primordiales del comercio, cuales son la Banca, la Bolsa y el Comercio propiamente dicho, cada uno de cuyos aspectos corresponderá a una de esas seis partes de nuestro trabajo; a estas tres antecederá el estudio de los elementos para la medida de cantidades y valores como básicos de toda cuestión mercantil, y el estudio de los intereses y descuentos a los que también se refieren la mayoría de los problemas tratados en las otras partes; completando el número de las seis partes el estudio de los Arbitrajes sobre todas las demás operaciones ya anteriormente de ésto conocidas. Como introducción a la verdadera materia objeto de nuestro estudio existe la parte preliminar, con estudios de procedimientos de análisis que por sí solos resuelven varios problemas de Cálculo mercantil y otros motivos que, siendo de matemáticas generales, han de ser utilizados en el comercio con extraordinaria frecuencia como medios prácticos; todos estos preliminares con los problemas mercantiles resueltos por la parte de Matemática pura que se estudie en cada capítulo.



$$N_1 = N \pm T = N \pm \frac{Nt}{c} = \frac{Nc \pm Nt}{c} = \frac{N(c \pm t)}{c}$$

$$\text{ó sea } t\% = \frac{N(100 \pm t)}{100}$$

I

PORCENTAJES

ESTUDIO GENERAL

5.—Definición.—Denomínanse *porcentajes* en general, las cuestiones relativas a tantos por cientos, por mil, etc., las cuales son un caso particular de la regla del *tanto por cuanto*.

El origen de los tantos por cuantos está en la costumbre de expresar precios y relaciones de valores refiriéndolos a unidades colectivas, unas veces por ser ésta la forma corriente de medir las cantidades en los comercios, y otras porque los precios de unidades simples resultarían cantidades sumamente pequeñas, en cuyo caso se recurre a los tantos por ciento, por mil, etc., para subsanar el inconveniente de esa pequeñez.

6.—Proporciones fundamentales.—Las cuestiones relativas al tanto por cuanto son aplicaciones de la regla de tres simple, debiendo el tanto y el cuanto formar proporción directa con el tanto por cuanto y la cantidad de que procede, por lo que representando por T el tanto por cuanto del número N y siendo t dicho tanto y c el cuanto correspondiente será fundamental la proporción siguiente:

$$c : t :: N : T$$

y en virtud de una conocida propiedad de las proporciones

$$c \pm t : c :: N \pm T : N$$
$$c \pm t : t :: N \pm T : T$$

proporciones que con la primera nos permiten resolver todas las cuestiones que con el tanto por cuanto puedan presentarse, ya que la operación ambigua $(N \pm T)$ es la expresión del

número después de habérsele aumentado o disminuído su tanto por cuanto.

De la primera de estas proporciones se deduce como regla general para todos los casos, que *todo tanto por cuanto se resuelve multiplicando la cantidad por el tanto y dividiendo este producto por el cuanto.*

7.—Tantos equivalentes. Se dice que dos o más tantos son equivalentes cuando, teniendo distinto cuanto, dan resultados idénticos al aplicarlos al mismo número.

Según la anterior definición resulta que los tantos equivalentes han de formar con sus respectivos cuantos razones que a su vez serán iguales a la que forme el número a que ellos se aplican con el tanto por cuanto resultante de esta aplicación; luego, las dos razones equivalentes serán iguales y por consiguiente: *los tantos equivalentes serán directamente proporcionales a sus cuantos respectivos.*

8.—Casos de tantos por 1, 100 y 1000.—Para resolver las cuestiones que se refieran a estos tantos, basta sustituir la cantidad respectiva 1, 100 o 1000 a la letra *c* de las proporciones anteriores y operar con las que resultan.

Si se trata de la equivalencia de tantos por uno, ciento, o mil, cuestión que se aplica a multitud de casos prácticos y que particularmente en las operaciones de interés es de necesidad constantemente el cálculo de los equivalentes, en estos casos, decimos, se utilizarán las reglas siguientes:

a) Para referir un tanto por 1 a tanto por 100 o tanto por 1000 se multiplica el tanto conocido por estos números.

b) Para reducir un tanto por 100 a tanto por 1 o por 1000, será suficiente dividirle por 100 o multiplicarle por 10 respectivamente.

c) Para transformar el tanto por 1000 en tanto 1 o por 100 se dividirá respectivamente por 1000 o por 10.

9.—Cálculo abreviado de tantos usuales.—Si en la proporción

$$100 : t :: N : T$$

hacemos sucesivamente t igual a 1, a 10, a 5, a 20, a 50 y a

25 obtenemos las expresiones siguientes que permiten el cálculo abreviado de estos tantos por ciento

100 : 1 :: N : T;	T = N/100
100 : 10 :: N : T;	T = N/10
100 : 5 :: N : T;	T = N/20
100 : 20 :: N : T;	T = N/5
100 : 50 :: N : T;	T = N/2
100 : 25 :: N : T;	T = N/4

y traducidas en reglas estas expresiones, tenemos:

a)—El 1 °/₀ de una cantidad es igual a su centésima parte.
b)—El 10 °/₀ de una cantidad es igual a su décima parte.
c)—El 5 °/₀ de una cantidad es igual a su vigésima parte.
d)—El 20 °/₀ de una cantidad es igual a su quinta parte.
e)—El 50 °/₀ de una cantidad es igual a su mitad, y
f)—El 25 °/₀ de una cantidad es igual a su cuarta parte.

10.—Abreviaciones generales.—De la segunda y tercera proporción fundamental se tienen expresiones fraccionarias con denominador $100 \pm t$ °/₀ en las que dividiendo numerador y denominador por 100 e indicando con p el cociente relativo al t °/₀ dicho denominador se convierte en $1 \pm p$, y si p es menor que 1 es además muy pequeño y se presta al cálculo mental, se puede considerar la fracción

$$\frac{K}{1 \pm p}$$

como el límite de la suma de los términos de una progresión geométrica cuya razón sea $\mp p$ y en vez de hacer la división, tomar el numerador K como el primer término de la progresión, calcular los dos o tres sucesivos y sumar algebraicamente.

Con el ejemplo siguiente quedará aclarada esta abreviación:

Por una deuda sobre la que se obtuvo el 2 °/₀ de rebaja se pagaron pesetas 4678. Hallar la cantidad rebajada.

La proporción para este caso sería

$$100 - 2 : 2 :: 4678 : x$$

y de aquí en virtud de lo dicho

$$x = \frac{4678 \times 2}{100 - 2} = \frac{46'78 \times 2}{1 - 2/100}$$

a cuyo último miembro aplicaremos la regla abreviada y tendremos

$$\begin{aligned} 46'78.2 &= 95'56 \\ 2\ \%_0 &= 1'8712 \\ » &= 0\ 037424 \\ » &= 0'000748 \\ x &= 95'469372 \text{ y aproximando } 95'47. \end{aligned}$$

Cuando el tanto $\%_0$ es una cantidad que no permite por sí hacer los cálculos mentales se le descompone en partes alícuotas, que se van calculando fácilmente y después se suman los resultados parciales de cada una de esas partes en que se descompuso el tanto.

Ejemplos:

1.° Determinar el 34 $\%_0$ de 8021.

25 $\%_0$	1/4	= 2005'25
5 $\%_0$	1/5 del 25 $\%_0$	= 401'05
1 $\%_0$	1/100	= 80'21
3 $\%_0$	1 $\%_0 \times 3$	= 240'63
34 $\%_0$		= 2727'14

2.° Hallar el 6'44 $\%_0$ de 2945.

5 $\%_0$	10 $\%_0$ /2	= 147'15
1 $\%_0$	1/100	= 29'45
0'10 $\%_0$	1 $\%_0$ / 10	= 2'945
0'30 $\%_0$	0'10 $\%_0 \times 3$	= 8'829
0'01 $\%_0$	1 $\%_0$ / 100	= 0'2945
0'03 $\%_0$	0'01 $\%_0 \times 3$	= 0'8829
6'44 $\%_0$		189'5292

También para abreviar cualquier cálculo de tantos se disponen tablas como la I, por la que se tiene el resultado apetecido leyendo la tabla o a lo más mediante una suma de los datos que proporciona.

11. - Caso de varios tantos. —Si sobre una misma cantidad hubieren de ser calculados varios tantos por cuanto el problema queda reducido a sumar los tantos que se hubieran establecido considerando luego la suma como un solo tanto y reducido el caso al que hasta ahora hemos estudiado, llamando entonces a estos tantos *simultáneos*.

Tal sucedería, por ejemplo, si sobre una cantidad cualquiera se debiera aumentar el 5 $\%_0$, luego el 10 $\%_0$ y el 2 $\%_0$, que sería un problema de determinación del 17 $\%_0$ cual si éste sólo hubiera sido establecido, pudiéndose tener en algún caso tantos de aumento y de disminución que en nada variarían esencialmente lo que dejamos dicho sino en que la suma suya sería algebraica, o sea la diferencia entre los tantos de aumento y de disminución.

Pero existe un caso muy frecuente en las relaciones mercantiles, y de no pequeña importancia en las civiles, en que dichos tantos no son simultáneos, sino sucesivos y que por su importancia merece ser resuelto como problema especial.

12. – Tantos sucesivos. – Se llaman así los que se aplican a una misma cantidad después de haberle sido aplicados todos los que anteceden, o sea en los que cada uno de ellos toma como base del cálculo el líquido de la operación anterior, correspondiendo por consiguiente valerse de las proporciones del tanto por cuanto que tengan en sus términos la suma y resta de términos de la fundamental **(6)** y resolviendo la primera de dichas dos proporciones con arreglo al primer tanto que haya de aplicarse se tendría como resultado de esa aplicación

$$x_1 = N \pm T_1 = \frac{N(c \pm t_1)}{c}$$

y poniendo este resultado en vez de N en la misma proporción tendríamos para segundo valor de esa aplicación

$$x_2 = \frac{N(c \pm t_1)(c \pm t_2)}{c^2}$$

y repitiendo la operación para cada uno de los tantos que sucesivamente se vayan aplicando, si el número de estos tantos fuere n el resultado final sería

$$x_n = \frac{N(c \pm t_1)(c \pm t_2)(\ldots\ldots)(c \pm t_n)}{c^n}$$

Ejemplo:

Una contribución cuya base impositiva es de 158 pesetas ha sufrido un recargo general del 15 °/₀, y posteriormente otro recargo del 10 °/₀, debiendo satisfacer además el contribuyente el 32 °/₀ de arbitrio municipal, y el 2 °/₀ de cobranza. Determinar la cantidad que corresponderá en total al pago.

Como se trata de cuatro tantos por ciento, todos de aumento y cada uno de ellos es el correspondiente sobre la aplicación del anterior, la última fórmula nos dará:

$$x = \frac{158(100 + 15)(100 + 10)(100 + 32)(100 + 2)}{100^4} = 269'10 \text{ pesetas.}$$

Ejercicios números **29** al **52** y **1118** al **1133**.

13.—Aplicaciones de los porcentajes al comercio—Suelen expresarse a tanto $\%$, y por consiguiente se aplicarán las reglas dadas a la determinación de las cuestiones relativas a ellos los descuentos, pérdidas y ganancias, comisiones, corretajes, rebajas, variaciones de precios, premios de seguros y multitud de otras cuestiones que en el desarrollo de este trabajo tendremos ocasión de enumerar y aplicar, estudiando ahora los de carácter general.

14.—Cálculos de comisiones y corretajes—Los servicios prestados por los intermediarios de operaciones mercantiles, de cualquier clase que éstas sean, se pagan por un tanto percentual del importe de la operación en que intervienen así que en cualquier caso los cálculos serán siempre casos del tanto por cuanto **(6)**.

Es preciso dejar bien sentado que la comisión o corretaje han de calcularse siempre sobre el valor de la operación intervenida, y en tal concepto tendremos comisiones sobre importe de compras y ventas, de transportes, de seguros, de operaciones aduaneras, y en todas ellas repetimos que ha de ser el importe de la operación especial el que sirva para calcular la comisión.

Resulta, pues, que en todos los cálculos de compras y ventas tanto del principal de la operación como de los elementos modificativos del valor, si al resultado del cálculo parcial le llamamos V y representamos por c la comisión referida a tanto por uno, el verdadero valor del principal, o del elemento modificativo respectivamente, estará dado por la expresión

$$V\ (1 \pm c)$$

en la que el signo negativo corresponde al caso del cálculo del principal de una venta.

De la expresión anterior se hallaría el importe parcial de la comisión y corretaje o el tanto de la misma, siendo dicho importe

$$C = Vc$$

el cual empleando la fórmula del tanto por ciento, que llamaríamos t, daría para la comisión

$$C = \frac{Vt}{100}$$

sin afectar signo alguno que luego se expresará al efectuar la suma o resta.

Ejemplo:

En una operación de transporte se hizo indispensable la intervención de un agente que por el despacho y facturación cobra el 3 °/o de comisión sobre el importe de dicho transporte, el cual ascendía a 374'15 pesetas. Calcular el importe del transporte por la existencia de este gasto supletorio.

Siendo $V = 374'15 \qquad c = 0'03$

el resultado pedido ha de ser:

$$374'15\ (1 + 0'03) = 385'37 \text{ pesetas}$$

y el importe de dicha comisión ascendería a

$$385'37 - 374'15 = 11'22 \text{ pesetas.}$$

que prácticamente sería el elemento calculado para añadir al importe del transporte, y por la suma encontrar el total que se pide en el problema.

15.—Cálculo de ganancias o pérdidas relativas.—Se llama ganancia o pérdida relativa la que se obtiene en cada unidad de valor de una o varias operaciones de compra y venta; o sea el tanto por uno de la ganancia o pérdida total.

Representando por V_c el valor de costo de una operación y por V_v el mismo valor líquido producto de venta es indudable que en total la ganancia o pérdida B estará dada por la expresión

$$V_v - V_c = \pm B$$

en la que el signo de ambigüedad expresa que lo mismo puede ser el resultado positivo que negativo, correspondiendo el signo positivo a la ganancia y el negativo a la pérdida, y ya en adelante de un modo general el signo superior corresponde al caso de ganancia y el inferior a caso de pérdida.

Si queremos referir la ganancia anterior a tanto por uno, y para distinguirla la representamos por b, hallaremos el va-

lor de la ganancia o pérdida relativa por una u otra de las dos expresiones

$$\pm b = \frac{V_v - V_c}{V_c} \qquad \text{o bien} \qquad \pm b = \frac{V_v - V_c}{V_v}$$

según que se refiera ese resultado al valor de costo o al de venta; y si queremos que la ganancia o pérdida relativa sea un tanto por ciento, llamándole t para también distinguirle de los anteriores, tenemos:

$$\pm t = \frac{(V_v - V_c)\,100}{V_c} \qquad \pm t = \frac{(V_v - V_c)\,100}{V_v}$$

Llamando P_v y P_c respectivamente a los precios de venta y de compra, también habría de ser

$$V_v = P_v N \qquad \text{y} \qquad V_c = P_c N$$

y llamando t_c al tanto por ciento de ganancia o pérdida referido al costo y t_v al mismo referido al líquido de venta, podemos sustituir en las fórmulas anteriores los valores que entran en ellas y tendremos:

$$\pm t_c = \frac{(P_v N - P_c N)\,100}{P_c N} = \frac{(P_v - P_c)\,N\,100}{P_c N} =$$

$$= \frac{(P_v - P_c)\,100}{P_c} \qquad [1]$$

para el resultado referido a precio de costo, y

$$\pm t_v = \frac{(P_v N - P_c N)\,100}{P_v N} = \frac{(P_v - P_c)\,N\,100}{P_v N} =$$

$$= \frac{(P_v - P_c)\,100}{P_v} \qquad [2]$$

para resultado respecto del precio de venta, pudiendo apreciarse que estas dos fórmulas tienen idéntica estructura a las halladas antes en función del valor total de costo y de venta.

Estas últimas expresiones son las que se utilizan en la práctica, y las que hemos de emplear nosotros, porque siendo en ellas más pequeñas las cantidades, son más fáciles las operaciones de cálculo, y porque además el operar con valores de

costo y venta exige el conocer las unidades compradas o vendidas, que no se necesita con los precios.

Ejemplos:

1) Determinar la ganancia obtenida sobre el precio de costo en una mercancía comprada a 6'30 pesetas, comprendidos todos los gastos y vendida a 6'95 pesetas la misma unidad.

Se trata de hallar el valor t_c siendo los elementos del cálculo

$$P_c = 6'30 \qquad P_v = 6'95$$

por lo que el resultado será:

$$t_c = \frac{100\ (6'95 - 6'30)}{6'30} = 10'32\ \%\ \text{de ganancia}$$

aproximando en menos de media centésima.

2) Siendo el precio a que se vende una mercancía 95'60 pesetas y habiendo costado la misma solamente 88'50 pesetas, hallar la ganancia obtenida sobre el precio de venta.

Corresponde ahora determinar el valor t_v siendo los elementos del cálculo

$$P_c = 88'50 \qquad P_v = 95'60$$

de las que resulta como ganancia

$$t_v = \frac{100\ (95'60 - 88'50)}{95'60} = 7'43\ \%$$

aproximado también en menos de medio céntimo.

16.—Determinación de precios.—Es muy frecuente en la práctica la determinación de precios cuando se conoce el beneficio que haya de obtenerse, hasta el punto de que la determinación del precio de venta constituye la operación quizá más importante de todas, puesto que del resultado de esa determinación dependen los beneficios o pérdidas de la empresa.

El estudio de esta determinación hemos de hacerle según las diferentes combinaciones de los elementos de cálculo y así tenemos:

1.º *Precio de venta con beneficio al costo.*—Hemos de despejar el valor P_v de la fórmula [1] del párrafo anterior, en la que haciendo las operaciones indicadas y quitando denominadores tenemos:

$$P_c\ (\pm\ t_c) = 100\ P_v - 100\ P_c$$

de donde deducimos para el valor buscado

$$P_v = \frac{100\ P_c + P_c\ (\pm t_c)}{100} = \frac{P_c\ (100 \pm t_c)}{100}$$

Ejemplo.

Hallar el precio a que ha de venderse una mercancía sobre la que se desea ganar el 20 °/₀ del costo, si su precio con gastos es de 18'30 pesetas.

Siendo los valores del cálculo

$$P_c = 18'30 \qquad t_c = 20$$

el precio buscado será:

$$P_v = \frac{18'30\ (100 + 20)}{100} = 21'96 \text{ pesetas.}$$

habiendo tomado el signo superior del de ambigüedad porque se trataba de un caso de ganancia.

2.° *Precio de venta con beneficio a la venta.*—También ahora hemos de despejar el valor P_v si bien hemos de hacerlo de la fórmula [2] en la que hacemos las operaciones indicadas y quitamos el denominador, obteniendo

$$\pm t_v\ P_v = 100\ P_v - 100\ P_c$$

y de aquí por transposición y puesta en factor común

$$100\ P_c = 100\ P_v \mp t_v\ P_v = P_v\ (100 \mp t_v)$$

de la que ya obtenemos para el valor buscado

$$P_v = \frac{100\ P_c}{100 \mp t_v}$$

Ejemplo:

Determinar el precio de venta en el supuesto anterior si la ganancia debe ser sobre el precio de venta.

Como los valores son los mismos de anteriormente tenemos:

$$P_v = \frac{100 \times 18'30}{100 - 20} = 22'875 \text{ pesetas.}$$

también empleando el signo superior del de ambigüedad, pues que también es caso de ganancia, siendo el resultado mayor que el hallado antes, porque la ganancia tiene la misma medida pero referida a un número indudablemente mayor, y por tanto, de mayor valor absoluto.

3.° *Precio de costo con beneficio al costo.*—Por la expre-

sión del caso 1.º deducimos inmediatamente para el que nos ocupa

$$P_c = \frac{100\ P_v}{100 \mp t_c}$$

Ejemplo:

¿Cuál es el precio de costo de una mercancía que se vende a 65 pesetas si la ganancia de ella es de 15 °/₀ sobre el costo?

Son los valores del cálculo

$$P_v = 65 \qquad t_c = 15$$

y el resultado que se obtiene con ellos tomando el signo superior que corresponde al caso de ganancia, será:

$$P_c = \frac{100 \times 65}{100 + 15} = 56'52 \text{ pesetas.}$$

4.º *Precio de costo con beneficio a la venta.*—También ahora hacemos la deducción directamente del caso 2.º y tenemos para este caso

$$P_c = \frac{P_v\ (100 \mp t_v)}{100}$$

Ejemplo:

En el caso anterior determinar el precio de costo siendo el beneficio obtenido sobre el precio de venta.

Con los mismos valores para el cálculo, se obtiene, tomando el signo superior por tratarse de caso de beneficio.

$$P_c = \frac{65\ (100 - 15)}{100} = 55'25 \text{ pesetas.}$$

Observación.—En todos los cálculos que anteceden hemos tomado los signos superiores de los binomios de las fórmulas porque en todos los casos se trataba de ganancia, pero si alguna vez los cálculos hubieran de hacerse existiendo pérdidas los signos de los binomios serían los inferiores, según lo que dijimos en el párrafo anterior.

17.—Relación entre los beneficios sobre costo y venta.—Para deducir una fórmula que una los dos valores t_c y t_v basta que en una cualquiera de las fórmulas que dan estos valores **(15)**, sustituyamos uno de los precios por el valor en función del otro tanto; es decir, que si elegimos la fórmula del beneficio sobre la venta, en la fórmula [2] hemos de

sustituir uno u otro de los dos precios por los valores según el beneficio sobre el costo **(16,** 1.° y 3.°) y si elegimos la fórmula del beneficio sobre el costo, en la fórmula [1] sustituiremos un precio por su valor según beneficio sobre la venta **(16,** 2.° y 4.°), obteniendo en cualquiera de los dos casos el mismo resultado.

Antes de hacer la sustitución a que nos referimos hemos de tener presente que el signo de ambigüedad desaparece en estos cálculos porque siempre corresponde igual signo a los dos elementos, que han de ser ahora los tantos de beneficio, pues es indudable que ganancia sobre precio de costo es también ganancia sobre precio de venta, y recíprocamente, en cuanto a la pérdida.

Es más fácil que hacer la sustitución de que antes hablamos el obtener directamente la relación entre los dos tantos de beneficio, pues si sobre 100 unidades de venta se obtiene una ganancia t_v, es indudable que el costo de lo que se vendió en 100 era de $100 - t_v$, y para hallar el tanto por ciento t_c que corresponde a este costo, resolveremos la proporción fundamental del tanto por cuanto **(6)** en la que sean los valores

$$c = 100; \quad t = t_c\,; \quad N = 100 - t_v\,; \quad T = t_v$$

y la proporción será:

$$100 : t_c :: 100 - t_v : t_v$$

de donde tenemos para valor del tanto sobre el costo

$$t_c = \frac{100\, t_v}{100 - t_v} \qquad [1]$$

y resolviendo ahora esta igualdad con respecto a t_v al quitar el denominador tenemos

$$t_c\,(100 - t_v) = 100\, t_v = 100\, t_c - t_c\, t_v$$

y de aquí por transposición y puesta en factor común

$$100\, t_c = 100\, t_v + t_c\, t_v = t_v\,(100 + t_c)$$

lo que da para el tanto sobre la venta

$$t_v = \frac{100\, t_c}{100 + t_c} \qquad [2]$$

Ejemplos:

1) ¿Qué tanto por ciento se obtiene de beneficio sobre el valor de venta en una mercancía en que se gana sobre el costo el 20 °/₀?

Por la aplicación de la fórmula [2] tenemos:

$$t_v = \frac{100 \times 20}{100 + 20} = 16'(6)\ ^{\circ}/_{\circ}$$

2) Hallar el tanto por ciento sobre el costo que se ha ganado en una mercancía en que el recargo sobre precio de venta es del 18 °/₀.

El resultado sobre la fórmula [1] será:

$$t_c = \frac{100 \times 18}{100 - 18} = 21'95\ ^{\circ}/_{\circ}$$

La fórmula [1] permite establecer los precios de venta en la práctica mediante un tanto por ciento referido al costo facilitando la operación en función directa de los precios **(16,** 2.°) pues se disponen tablas de equivalencia para convertir el cálculo del precio de venta en una suma del precio de costo y el tanto de beneficio sobre el costo equivalente al beneficio deseado sobre la venta. De tales tablas es la II.

Como en una casa o empresa cualquiera han de ser muy frecuentes los cálculos de precios de venta esas tablas ahorran grandemente el trabajo, porque evitan la división que supone el cálculo de los precios de venta directamente **(16,** 2.°), y se tiene de una vez para siempre los tantos de ganancia a la venta.

Para usar la tabla basta buscar en la primera columna de las dos el tanto de ganancia sobre la venta, y después hallar sobre el precio de costo el que sigue en la segunda columna.

Ejemplo:

Se desea determinar el precio de venta de un producto que cuesta a 37 pesetas para ganar el 15 °/₀ sobre la venta.

Consultando la tabla vemos que a este tanto corresponde el 17'647 °/₀ sobre el costo, por lo cual el precio de venta buscado será:

$$37 + (37 \times 17'647) : 100 = 43'53 \text{ pesetas.}$$

18. - Cálculo del beneficio y pérdida absolutos.— El beneficio o pérdida absoluta es igual a la diferencia entre el costo y el líquido producto y ahora, que conocemos los tantos por cientos en que se miden esos beneficios y quebrantos, podemos determinar el que corresponde a una operación cualquiera conociendo solamente el importe de la venta.

Para ello, si representamos por V_v el valor de la venta y el recargo para esta operación se ha hecho en un tanto por ciento sobre el precio de venta, es indudable que la ganancia obtenida será:

$$B = \frac{V_v \, t_v}{100}$$

puesto que se trata solo de hallar el tanto por ciento de la cantidad importe de la venta.

Si el recargo para vender se hizo sobre el precio de costo, entonces nos hallamos con que el valor V_v es el resultado de aumentar al número su tanto por ciento, y con la segunda proporción de las fundamentales del tanto por cuanto **(6)** obtendremos:

$$B = \frac{V_v \, t_c}{100 + t_c}$$

resultado al que también habríamos llegado haciendo la sustitución de t_v en la fórmula anterior según la [2] del párrafo **(16)**.

Si en vez de calcular el beneficio o pérdida sobre el valor de venta lo hubiésemos hecho sobre el de costo, entonces tendríamos para tanto referido al costo

$$B = \frac{V_c \, t_c}{100}$$

como cálculo del tanto por ciento del número V_v ; pero si el tanto se refiere a la venta, entonces nos hallamos con que este valor V_c es el resultado de restar el tanto por ciento del número de que procede, y, por la misma proporción que antes, tenemos:

$$B = \frac{V_c \, t_v}{100 - t_v}$$

expresión que también hallaríamos por la sustitución semejante a la que antes indicábamos.

Los cálculos de pérdidas y ganancias conociendo el valor de costo no se utilizan en la práctica para hallar los verdaderos beneficios o pérdidas, sino que sirven para comprobar los

que en realidad se han obtenido de las operaciones, con los que cabe esperar según los cálculos, y que se determinan por estas expresiones.

Ejemplos:

1) Determinar el beneficio que se ha obtenido en una venta de mercancías por valor de 107.000 pesetas si el precio de venta se fijó aumentando al de costo el 8 %.

Son valores para el cálculo los siguientes:

$$V_v = 107.000 \qquad t_c = 8$$

con los cuales el resultado ha de ser

$$B = \frac{107.000 \times 8}{100 + 8} = 7925'(925) \text{ pesetas.}$$

2) Hallar el beneficio que deberá obtenerse en una mercancía que cuesta 69.000 pesetas si el precio de venta se establece con el 12 % de ganancia sobre la venta.

Los valores especiales de este caso son

$$V_c = 69.000 \qquad t_v = 12$$

y el resultado probable de la operación de venta futura

$$B = \frac{69.000 \times 12}{100 - 12} = 9409'(09) \text{ pesetas.}$$

Los otros dos casos son de aplicación tan fácil que se resuelven mentalmente y no necesitan ejemplo aclaratorio.

19.—Diferencia entre beneficio sobre costo y sobre venta.—Si en los dos valores que hemos hallado antes para el beneficio, según que el tanto de recargo se refiera a la venta o al costo, establecemos la diferencia entre ambos, al hacer esta resta con el beneficio calculado en base al valor de venta tenemos que la diferencia será: **(18)**.

$$\frac{V_v\ t}{100} - \frac{V_v\ t}{100 + t}$$

y reduciendo los quebrados al mismo denominador, sacando factor común y simplificando, obtenemos sucesivamente

$$\frac{V_v\ t\ (100 + t) - V_v\ t\ 100}{100\ (100 + t)} = \frac{V_v\ t\ (100 + t - 100)}{100\ (100 + t)} =$$

$$= \frac{V_v\ tt}{100\ (100 + t)} = \frac{V_v\ t}{100} \times \frac{t}{100 + t} \qquad [1]$$

Si ahora hacemos la resta de los beneficios calculados en base al valor de costo esta diferencia será: **(18)**.

$$\frac{V_c\, t}{100} - \frac{V_c\, t}{100 - t}$$

y por transformaciones idénticas a las anteriores obtendremos para expresión de esa diferencia

$$\frac{V_c\, t}{100} \times \frac{t}{100 - t} \qquad [2]$$

expresión que en unión de la anterior nos permite establecer el siguiente principio general.

La diferencia entre el beneficio que se obtiene en una operación, según que el tanto por ciento de recargo se haga sobre el precio de costo o sobre el de venta, es igual al tanto por ciento de uno cualquiera de los valores (costo o venta) *multiplicado por la relación que une los tantos de beneficio*, puesto que los segundos factores de las dos expresiones encontradas son los mismos que sirven para calcular un tanto cuando se conoce el relativo a otro valor **(17)**.

Ejemplos:

1) ¿Qué diferencia se obtendrá en la ganancia por venta de una mercancía de 80.000 pesetas según que el recargo del 22 % se refiera al costo o a la venta?

Por tratarse de que se conoce el valor de venta hemos de utilizar la fórmula [1] con los valores especiales siguientes:

$$V_v = 80.000 \qquad t = 22$$

con lo cual el resultado apetecido será de

$$\frac{80.000 \times 22}{100} \times \frac{22}{100 + 22} = 5.173'77 \text{ pesetas.}$$

2) Se ha adquirido una mercancía por 124.000 pesetas y se desea conocer la diferencia de ganancia que se obtendrá según que el 17 % de recargo en el precio se haga sobre el de costo o el de venta.

Corresponde ahora aplicar la fórmula [2] siendo los valores del cálculo los siguientes:

$$V_c = 124.000 \qquad t = 17$$

y con ellos el resultado que se busca habrá de ser

$$\frac{124.000 \times 17}{100} \times \frac{17}{100 - 17} = 4.317'59 \text{ pesetas.}$$

20.—Precios con descuentos sucesivos.—El importe de cada uno de los descuentos que sucesivamente se aplican a una cantidad **(12)** van disminuyendo, tanto más cuanto mayores sean los descuentos anteriormente aplicados, teniendo como resultado de aplicar varios descuentos a tanto por ciento a un valor V la expresión

$$\frac{V\,(100 - t_1)\,(100 - t_2)\,(.. \ldots\ldots \ldots..)\,(100 - t_n)}{100^n}$$

y si ahora consideramos que el valor al que se aplican los descuentos sucesivos sea el precio de venta V_v, por la existencia de esos descuentos este valor queda convertido en el de la expresión anterior al que llamaremos V_s, valor que nos será preciso determinar en muchas ocasiones para en vista de él calcular el precio de venta que ha de fijarse a las mercancías, cuando haya necesidad de conceder esos descuentos sin que el beneficio esperado se halle disminuído por este concepto. Cuando existan estos descuentos el valor o precio de venta será.

$$P_v = \frac{P_s\ 100^n}{(100 - t_1)\,(100 - t_2)\,(\ .\ .\ )\,(100 - t_n)}$$

y como según lo anterior el valor P_s debe ser igual al valor de venta cuando no existieran estos descuentos, es decir, que este precio P_s es el que antes calculamos **(16,** 1.° y 2.°) **(17,** 1.° y 2.°), debemos sustituirle por el que corresponda según la referencia del beneficio y tendremos:

$$P_v = \frac{P_c\ (100 \pm t_c)\ 100^n}{100\,(100 - t_1)\,(100 - t_2)\,(\ldots.)\,(100 - t_n)} \qquad [1]$$

cuando el beneficio se refiera al costo, y

$$P_v = \frac{P_c\ 100^{n+1}}{(100 \pm t_v)\,(100 - t_1)\,(100 - t_2)\,(\ .\ .)\,(100\ \ t_n)} \qquad [2]$$

cuando haya de referirse a la venta el beneficio esperado.

Ejemplo:

Una mercancía se compra por el precio líquido de 550 pesetas y su venta ha de hacerse concediendo los descuentos del 18 y del 2 %. Determinar el precio de venta que haya de fijarse para obtener un beneficio líquido del 25 % sobre el verdadero precio de venta.

Hemos de servirnos de la fórmula [2] siendo los valores especiales para el cálculo

$$P_c = 350; \quad t_v = 25; \quad t_1 = 18; \quad t_2 = 2; \quad n = 2$$

con los cuales tendremos por resultado

$$P_v = \frac{350 \times 100^3}{(100 - 25)\,(100 - 18)\,(100 - 2)} = 580'72 \text{ pesetas.}$$

21.—Cálculo de seguros.—Pueden hacerse seguros de todos los riesgos que amenazan la disminución o destrucción de la riqueza y en todos ellos se ha determinado la intensidad del riesgo por medio de estadísticas, que han fijado un tanto por ciento o mil, que es la medida práctica de los daños causados por cada especie de riesgos en el conjunto de la riqueza existente.

Esta medida del riesgo se denomina *prima del seguro* y cada vez que tiene lugar un contrato se determina el importe que ha de pagar el dueño de los bienes que pueden ser dañados por el riesgo, para que el asegurador le indemnice si el daño tiene lugar.

Además del desembolso que representa la prima para el dueño de los bienes, éste tiene que satisfacer algunos gastos inseparables del contrato de seguro, cuales son los de póliza, timbre, y a veces reconocimiento, todos los cuales tienen carácter de gastos fijos.

Resulta por consiguiente, que el cálculo que origina el seguro consiste en la determinación del importe de ese pago, lo que es una aplicación del tanto por ciento **(13)**, con sólo la variación de añadir al importe del tanto encontrado el de los gastos fijos.

Ejemplo:

Calcular el importe a satisfacer por el seguro de mercancías contra el riesgo de incendios por valor de 150.000 pesetas, si la prima es de 3 $^{0}/_{00}$ y los gastos de póliza y timbre ascienden a 19 pesetas.

Aplicando la proporción fundamental del tanto por cuanto (**6**) tendremos el siguiente resultado:

$$150.000 \times 0'003 + 19 = 469 \text{ pesetas.}$$

22. Impuestos del comercio.—La gran variedad de conceptos de los distintos sistemas de tributos no permite hacer ni siquiera una enumeración de ellos, cosa que tampoco habría de tener mucha utilidad a los efec-

tos del cálculo, por lo que solo agrupamos los impuestos por razón de los cálculos que exijen, como sigue:

1.° Impuestos de cantidad arbitraria que no exijen cálculos por estar determinado en las tarifas especiales la cantidad que corresponde a cada caso particular. De esta clase son los impuestos por el ejercicio del comercio o industria en cualquier forma que se haga.

2.° Impuestos de carácter percentual fijo, como son los de aduanas *ad valorem*, transportes, etc., y cuyo cálculo es una aplicación simple del tanto por ciento (**6** a **10**) que tantas veces hemos hecho.

3.° Impuestos percentuales progresivos, que tomando por base de imposición el resultado en conjunto de un grupo de operaciones o de todo el negocio, sufren aumento en el tanto por ciento de imposición, a medida que la base de imposición va siendo mayor, cual sucede con los impuestos sobre las utilidades del negocio, sobre la cifra de éste, etc.

4.° Impuestos de cantidad proporcional fraccionada, que exijen tener en cuenta límites dentro de los cuales el importe del impuesto permanece fijo.

5.° Impuestos sobre medias de operaciones, como son los que establecen una cantidad proporcional sobre las ventas medias de un trimestre, la producción media, los descubiertos medios en las operaciones de crédito, los cuales exijen el cálculo preventivo de determinación de la base de imposición o cantidad media sobre que se halla el importe del tributo, por cuyo motivo se estudia este caso en el capítulo siguiente.

23. —Cálculos de impuestos percentuales progresivos.—Fijada la base de imposición en estos casos, las tarifas determinan el tanto por ciento que haya de aplicarse, y por consiguiente en esta parte el cálculo del impuesto es el de un tanto por ciento que ya es conocido, y no precisa sucesivos ejemplos; pero en estos impuestos puede darse el caso de que el exceso de la base de imposición sobre el límite inferior que determina el tanto aplicable sea menor que el aumento producido en el impuesto por el exceso de este tanto sobre el inmediatamente inferior, como sucedería por ejemplo si en una escala de tributación en la forma que nos ocupa se fijase que los beneficios que pasen de 6000 pesetas y no excedan de 8000 tributen por el 4 °/₀ de su importe, y los que excedan de 8000 hayan de pagar el 5 °/₀, si el beneficio base de la imposición fuese 8042 pesetas se tendría que liquidando el impuesto por el 5 °/₀ que corresponde según la escala anterior, resulta como cantidad a pagar por el impuesto 402'10 pesetas, lo que representa un líquido para el contribuyente de 7639'90 pesetas, y si los beneficios hubiesen sido menores, no excediendo de las 8000 pesetas, entonces se habría pagado el 4 °/₀ que da un impuesto de 320 pesetas y un líquido para el contribuyente de 7680 pesetas; es decir, que en este caso ha sido perjudicado el negociante por haber obtenido más ganancia, y claro está que es una paradoja que al ganar más se tenga menos ganancia según resulta de lo anterior.

Por estas razones *cuando el importe del impuesto en las cantidades próximas a las de variación de tipo sufre un aumento mayor que el exceso de la base de imposición sobre los límites de aplicación de esos tipos, se*

calculan los impuestos por el tipo inmediato inferior y se aumenta al resultado el aumento sufrido por la base de imposición o mejor aún solamente una alícuota de este aumento de la base.

La razón de que se aumente solo una alícuota del aumento de la base de imposición está en que el negociante no debe nunca perder el estímulo a sucesivas ganancias, como sucedería si dentro del aumento del impuesto por aumento del tipo hubiere de ser todos los beneficios para el que cobra el impuesto.

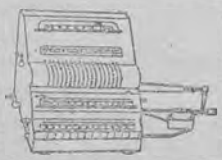
Ejemplo:

Determinar el impuesto que debería pagar el negociante que según la escala anterior de imposiciones obtuviera una ganancia imponible de 8080 pesetas si en los excesos del límite de imposición sólo se cobra la cuarta parte de esos excesos.

Según hemos visto corresponde pagar el 5 % de las 8080 pesetas y como la diferencia entre ese 5 % y el 4 % de 8000 pesetas es mayor que el exceso de 80 pesetas sobre el límite de la base, calcularemos el 4 % de dicho límite y añadiremos la cuarta parte del exceso, con lo que el impuesto a pagar será:

4 % de 8000 pesetas	pesetas	320'00
Cuarta parte del exceso 80 : 4	»	20'00
Total del impuesto.....	pesetas	340'00

Ejercicios números **1152-1154-1201** al **1208-1210** al **1225** y 1229



II

PROMEDIOS

24.—Definición.—Un promedio es una cantidad cualquiera que se supone representativa de una serie de cantidades o números de la misma naturaleza. Para que esta suposición sea hecha con resultados útiles es necesario que el promedio cumpla la condición de ser cantidad media entre todas las de la serie, por lo que en muchas ocasiones el promedio será alguna de las medianas que se calculan en Aritmética, si bien en el caso que nos ocupa su concepto es más extenso.

25.—Utilidad de los promedios.—El empleo más importante de los promedios es la comparación de este número con todos los demás de la serie que representa para conocer las oscilaciones de ella, la comparación con otro número tipo, o con otros promedios, y en general todos los estudios estadísticos que se refieran a la naturaleza de las cantidades promediadas; pero si ese empleo es bajo el punto de vista utilitario, también al considerarse matemáticamente, el promedio ha de ser empleado en los cálculos con objeto de simplificarlos al sustituir toda la serie por la cantidad media y única que constituye el promedio, resultando en ambos aspectos su utilidad del beneficio que reporta la rapidez en la obtención del estudio que se hace con el promedio en vez de hacerlo con toda la serie.

26.—Clases de promedios.—La base matemática de la determinación de todos los promedios es siempre alguna propiedad de las proporciones, y de ahí que en primer lugar hayamos de atender a la clasificación de las cantidades medias en

aritméticas, geométricas, armónicas y anarmónicas, todas las cuales tienen como fundamento el que correspondan a dos números y solo por extensión lo sean a más; y en segundo término tendremos los promedios, que serán las mismas medias anteriores pero ya referidas a más de dos cantidades en una misma serie, y cuya característica distintiva es el sistema de calcular la cantidad promediada, y así se tienen los promedios simples, ponderados, progresivos y móviles, además de algunos otros promedios compuestos o especiales de ciertos actos administrativos que precisamente por su carácter especial han de ser estudiados en otros lugares de esta obra, como por ejemplo son los promedios del interés, los precios medios y leyes medias de mezclas y aleaciones.

17.—Media aritmética. —La media aritmética es el término medio de una equidiferencia continua, o sea, que en la equidiferencia

$$a - b = b - c$$

el término *b* es la media aritmética, y hallando en ella el valor de este término, considerado desconocido nos dará

$$b = \frac{a + c}{2}$$

de donde se deduce la regla de calcular esta media, que sirve a veces como definición de ella, de que *la media aritmética de dos cantidades es la semisuma de ellas.*

Considerando que la media aritmética que acabamos de hallar puede sustituir a las dos cantidades en una suma en que estas dos interviniesen, se hace extensivo este concepto de media aritmética al caso de cualquier número de cantidades diciendo que *media aritmética de varias cantidades es la que puede sustituir a todas ellas como sumando,* y como para que en este caso la suma no se altere es necesario que la media aritmética multiplicada por el número de cantidades promediadas sea igual a la suma de todas, resulta también que ha de ser la media aritmética el resultado de dividir la suma de todas las cantidades por el número de ellas, con lo que la media de dos cantidades queda reducida a un caso particular de la que nos ocupa.

De un modo general la media aritmética de n cantidades a las que llamaremos $a, b, c, \ldots\ldots\ldots l$, representando dicha media por m, habrá de ser

$$m = \frac{a + b + c + \ldots\ldots\ldots + l}{n}$$

y dando un carácter más general a esta fórmula por medio de la notación sumatoria, en la que el subíndice indique las cantidades a promediar, siempre se tiene por valor de la media aritmética

$$m = \frac{\sum_{1}^{n} a_n}{n} \text{ (*)}$$

que enunciado como regla será siempre la que antes dijimos como esencial a la naturaleza de la media que nos ocupa.

Ejemplo:

Determinar la media aritmética de los números, 16, 54, 27, 93, 42 y 59. El valor a calcular sería

$$m = \frac{16 + 54 + 27 + 93 + 42 + 59}{6} = 45'166.....$$

ya que el valor de n de la fórmula es 6.

28. – Media geométrica.—La media geométrica o proporcional entre dos cantidades es el término medio de una proporción contínua.

La semejanza de esta definición y la de la media aritmética establece una correlación entre ambas, en la que, por identidad entre la correlación de proporciones y equidiferencias, siempre será aplicable a la media geométrica lo que dejamos dicho de la aritmética, sustituyendo solo las palabras sumando por factor, suma por producto, y división por raíz, con lo cual tendremos para la media factorial de dos cantidades a y b

$$f = \sqrt{ab}$$

(*) El signo Σ es la letra griega sigma que sirve para indicar la suma de términos semejantes al que le sigue.

y para la media factorial o geométrica de varias cantidades $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$

$$f = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots \ldots\ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_1^n a_n}$$

Ejemplo:

Sea la determinación de la media proporcional de los números 63 y 7, y la de los números 2, 3, 12 y 18.

Para la primera bastaría la raíz cuadrada y para la segunda sería necesaria la raíz cuarta del producto de los datos, que nos daría

$$1.^a = \sqrt{63.7} = 21 \qquad \text{y}$$

$$2.^a = \sqrt[4]{2.3.12.18} = \sqrt{\sqrt{2.3.12.18}} = \sqrt{2^2.3^2} = 2.3 = 6$$

29.—Media armónica.—Puede darse la misma definición que de las anteriores diciendo que es el término repetido en la proporción armónica contínua; pero la circunstancia de que la aplicación de esta media como término comparativo se haga en relación a la media aritmética, hace que se tome como definición, que *media armónica de varios números es otro número cuyo recíproco sea media aritmética entre los recíprocos de los números propuestos*, o sea, que si la media armónica la representamos por x, al utilizar la notación general de que venimos valiéndonos, ha de verificarse

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}\right) : n$$

de donde resulta para valor de la media armónica

$$x = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{a_n}}$$

Ejemplos:

Calcular la media armónica de los números 18 y 7, y la que correspondería a los números 6, 14, 27, 5 y 12.

Para el primer caso tendríamos

$$x = \frac{2}{\frac{1}{18} + \frac{1}{7}} = \frac{2}{\frac{7+18}{126}} = \frac{2 \times 126}{25} = 10'08$$

y para el segundo

$$x = \frac{5}{\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{27}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}} = \frac{5}{\frac{630+270+140+756+315}{3780}} = \frac{5\times 3780}{2111} = 8'953$$

30.—Media anarmónica.—Es también el término que se repite en una proporción de la clase de la media; pero por su escasa importancia sólo hemos de indicar su cálculo, que también a veces sirve de definición, de que esta media *es el cociente de dividir la suma de los cuadrados por la suma de las bases*, y generalizándola sería siempre al emplear la notación general utilizada hasta ahora, y llamándola z.

$$z = \frac{\sum_{1}^{n} a_n^2}{\sum_{1}^{n} a_n}$$

31.—Cálculo general de los promedios.—Todas las clases de promedios que hemos indicado consisten en medias aritméticas y por consiguiente su cálculo siempre se hace sumando todos los números que deben ser promediados, y dividiendo esta suma por el número de cantidades; pero según dijimos **(26)** la clase de promedio está determinada por el sistema que se utilice en la determinación de los números que deben entrar en el cálculo, o sea de los sumandos que constituirán el dividendo del cálculo principal.

32.—Promedio simple.—Es aquel en que se consideran todos los números de la serie de cantidades a promediar, siendo poco menos que innumerables los casos de aplicación, y así nos hallamos con promedio de ventas en un período determinado, como uno o varios años, un mes con relación a los días, promedios de cotizaciones o de precios en forma semejante, promedio de recaudaciones de impuestos, promedios de movimientos migratorios, etc., y siempre bastará hacer la suma de los datos y la división por el número de ellos, excepto en muchos casos en que ya se conoce de antemano dicha suma, en los que bastará la división, cual sería por ejemplo, en la cantidad mensual de viajeros de un ferrocarril que durante el año transportó 129840 personas extrañas al personal de servicio, en el que la división de

$$129840 : 12 = 1082$$

nos da resuelto el problema, prescindiendo de otro ejemplo porque su cálculo se hace como en la media aritmética.

33.—Promedio ponderado.—Cuando las cantidades que hayan de ser sustituídas por un promedio defieren unas de otras en más de un aspecto, lo que equivale a que deban ser considerados otros elementos que los de las cantidades de que se trata de hallar el promedio, se hacen imposibles los simples, porque entonces dejarían de ser considerados esos otros aspectos o elementos. En tales casos la serie de números tiene desdoblamientos, y se hace intervenir en el cálculo varias series de cantidades todas de igual número de elementos, y la combinación de los elementos correspondientes de todas las series es el fundamento de la determinación de las cantidades sobre que se aplicará la regla de la media aritmética.

Tal sucedería cuando se hubiera de conocer el promedio de consumo por día de una familia sabiendo que ciertos días del mes gasta 15 pesetas, otros días gasta 12 pesetas, otros su gasto asciende a 19 pesetas y otros queda reducido a 10 pesetas, pues para que el resultado sea exacto no nos basta esta serie de números, sinó que necesitamos conocer por cada uno de esos números otro que nos indique el de dias que se hace cada clase de gasto para tener en total todos los días del mes, y como los elementos entre que hay variación son de un lado cuatro cantidades de gasto y de otro cuatro números de días, se tendrían esos dos aspectos diferentes y esos dos elementos, que se hallan representados también por dos series de números las cuales se combinan entre sí para darnos los números que sirven para el cálculo, como sería en el ejemplo si la cantidad de 15 pesetas se gasta 5 días del mes, la de 12 pesetas 10 días, la de 19 pesetas 11 días, y la de 10 pesetas 4 días, en que se tendría como gasto total del mes

5 días a 15 ptss.		75 ptas.
10 días a 12 ptas.		120 ptas
11 días a 19 ptas.		209 ptas.
4 días a 10 ptas.		40 ptas.
Total.... 30 días	.....	444 ptas.

y en consecuencia ya sobre estos días se aplicaría la regla da-

da para el promedio simple cuando se conoce la suma, y nos daría

$$444 : 30 = 14'8 \text{ ptas. diariamente.}$$

Esta clase de promedio se llama promedio ponderado y siempre resulta de dividir el producto de los números de las dos series por la suma de los números de una de las series, y precisamente de aquella a que se refiere la petición del resultado, como sucedió en el ejemplo en que se pedía gasto diario y hubo de tenerse por divisor la suma de los días.

En forma general llamaremos a_n a los números de la serie a promediar, representando por b_n los de la otra serie que indica el otro aspecto de variación y utilizando la notación general tendremos para el promedio P.

$$P = \frac{\Sigma\, a_n\, b_n}{\Sigma\, a_n}$$

El promedio ponderado es de gran aplicación a los negocios porque solo por medio de él es posible hacer intervenir todos los elementos o variables que han formado las fluctuaciones de las cantidades que se desea promediar, siendo muy frecuente que se tomen promedios simples en vez de hacerlo de los promedios ponderados, por falta de examen detenido de las cuestiones y así no es raro decir que el promedio de ciertos precios en un período determinado es tal y ser ciertamente otro porque los primeros tomaron como base de cálculo solo los mismos precios que tratan de promediar dejando de considerar las cantidades que se compraron o vendieron y que es indudable que influyen sobremanera en el precio promediado que hubiera de resultar. Tanto influyen estas segundas series de números sobre el resultado que se puede dar el caso que al comparar dos promedios se halle que la diferencia entre ambos es de opuesto sentido al que indiquen las variaciones de los elementos promediados, como sucedería en el ejemplo siguiente:

100 unidades clase X a 3 pesetas.....	Pesetas	300
150 unidades clase Z a 2'10 »	»	315
250 Totales		615

de donde tenemos para precio promediado

$$615 : 250 = 2'46$$

y si hubieran descendido los precios en 0'10 cada unidad variando el número de unidades podría tenerse

200 unidades clase X a 2'90 pesetas.	Pesetas	580
50 unidades clase Z a 2 »	»	100
250 Totales		680

que para precio promediado nos daría

$$680 : 250 = 2'72$$

resultado al parecer paradógico al mirar solo a los precios de cada cálculo, pero realmente exacto si se consideran los dos aspectos que intervienen en la cuestión.

34.—Promedio progresivo.—Es la serie de promedios que se obtienen de otra serie de cantidades cuando considerado un número mínimo de éstas se halla un primer promedio, al que siguen otro promedio en el que se considera una nueva cantidad, a éste otro por adición de otra cantidad de la serie a promediar y así sucesivamente hasta terminar con todos los términos de la serie.

Tal sería, por ejemplo, la serie de promedios que se obtendrían en un comercio por las ventas de un período haciendo los cálculos en relación a la duración de un mes, y empezando por hallar la media de las ventas de los dos primeros meses, a la que seguiría la media de tres meses, a ésta la media de cuatro y así sucesivamente hasta comprender todo el período examinado.

El empleo de esta clase de promedios casi siempre empieza con más de dos cantidades en el primer cálculo, y siempre al dividendo del cálculo anterior se añade una nueva cantidad y se van empleando divisores enprogre sión aritmética de razón 1.

Ejemplo:

La recolección de trigo en un país durante el decenio 1921-1930 ha sido la siguiente:

1921	Hl. 385.000	1926	Hl. 400.000
1922	Hl. 418.000	1927	Hl. 455.000
1923	Hl. 452.000	1928	Hl. 398.000
1924	Hl. 405.000	1929	Hl. 385.000
1925	Hl. 417.000	1930	Hl. 456.000

Determinar el promedio progresivo a partir de 1922.

Consiste el problema en hallar 9 medias aritméticas en que entren como cantidades la producción desde la del año de 1921 hasta la del que se termina el promedio inclusive, lo que nos dará como resultado

21-22	promedio	Hl.	401.500
21-23	»	Hl.	411.666
21-24	»	Hl.	410.000
21-25	»	Hl.	411.400
21-26	»	Hl.	409.500
21-27	»	Hl.	415.714
21-28	»	Hl.	413.500
21-29	»	Hl.	410.111
21-30	»	Hl.	412.700

35.—Promedio móvil. – Es la serie de promedios que se obtienen en una serie de cantidades cuando el número de cantidades que entran en la serie permanece constante, pero se va añadiendo al dividendo del cálculo, o sea a los números a promediar la cantidad que sigue en orden de la serie general a la vez que se desprecia la primera de las que entraron en el cálculo anterior.

El objeto de esta clase de promedios es el de comparar el movimiento de ciertos hechos en el tiempo, considerando unidades de la misma duración pero de consecutividad interrumpida, con lo cual todos los términos en que se establece la comparación que son los promedios móviles se hallan referidos a igual circunstancia, como sucedería, por ejemplo, en el caso de hallar la media mensual de ventas en un comercio en que siempre se calculase ésta, considerando los doce últimos meses transcurridos o los del último semestre, natural o no, que termine en el mes a que el promedio se refiere.

Ejemplo:

Calcular el promedio móvil de la producción de trigo en el país a que se refiere el ejemplo del párrafo anterior hallando el promedio del quinquenio último para cada término.

Consiste el problema en hallar la media aritmética de seis quinquenios diferentes que respectivamente terminan en 1925 hasta 1930, y que nos dará

Quinquenio	21-25	promedio	Hl.	411.400
»	22-26	»	Hl.	414.400
»	23-27	»	Hl.	421.400
»	24-28	»	Hl.	414.600
»	25-29	»	Hl.	410.200
»	26-30	»	Hl.	414.000

36.—Promedio periódico.—Siempre este promedio se halla referido a una unidad de tiempo idéntica dentro de otros períodos mayores, como sería por ejemplo la semana, quincena o mes en un año, cuando se deseara conocer el promedio de ciertos hechos estadísticos correspondientes todos a la misma semana, quincena o mes pero de varios años distintos, y siempre como en todos los anteriores siendo el promedio la media aritmética de las cantidades de la serie considerada.

Ejemplo:

Determinar el promedio mensual correspondiente a seis años cuyas ventas han sido las que se indican en el cuadro que sigue:

Para mayor facilidad tipográfica aparece a continuación del cuadro en otras dos columnas la suma de las ventas del mismo mes en el período, y su cociente por 6, que es el promedio pedido.

Meses	1925	1926	1927	1928	1929	1930	Total	Promedio
Enero	18	54	46	79	68	59	324	54'00
Febrero	47	55	58	80	75	46	361	60'16
Marzo	63	70	64	65	60	61	383	63'83
Abril	59	57	61	55	64	43	339	56'50
Mayo	62	45	40	37	64	65	311	51'83
Junio	75	89	75	68	80	91	476	79'33
Julio	87	74	70	75	77	80	463	77'16
Agosto	65	64	60	58	54	36	337	56'16
Septiembre	54	57	51	60	60	75	317	52'83
Octubre	65	87	98	91	77	82	498	83'00
Noviembre	77	59	87	86	83	80	472	78'66
Diciembre	61	58	43	42	61	92	357	59'50

Ejercicios números **I** al **XXII**.

37.—Cálculos de impuestos sobre cantidades medias. - En esta clase de impuestos los cálculos especiales se refieren a la base de imposición, pues que determinada ésta, después son impuestos percentuales, fijos o progresivos, o impuestos de cantidad proporcional fraccionada.

Para el cálculo de la base de imposición debemos distinguir entre que sean medias simples durante el período a que el impuesto se refiera o que sean cantidades medias compuestas del importe de cada operación parcial y de la duración de la misma, como serían, por ejemplo, el impuesto sobre la cifra media de negocios durante un período, que no depende más que del importe total de esa cifra de negocios y del número de subperíodos que se consideran; y el impuesto sobre el descubierto medio de unos créditos, en que esta cantidad media es función del importe de cada descubierto parcial y de la duración del mismo, teniéndose:

1.° *Para calcular la base de imposición cuando depende de una sola cantidad, se divide el total de esa cantidad por el número de subperíodos en que se considera dividido el tiempo del impuesto.*

2.° *Para calcular la base de imposición en impuestos en que dicha base depende del importe de las operaciones y de sus duraciones respectivas, se consideran esas opera-*

ciones y duraciones como los dos aspectos de variación de un promedio ponderado (**33**) *hallando el capital promediado.*

Ejemplos:

1) Calcular la cantidad que habrá de pagarse por impuesto sobre venta a razón del 80 °/₀ trimestral de la venta media semanal, en un comercio que en el trimestre haya vendido por valor de 179400 pesetas.

El período de imposición vemos que es el trimestre y los subperíodos las semanas, las cuales han de ser 13 que corresponden al trimestre, por lo cual la base de imposición es

$$179400 : 13 = 13800 \text{ pesetas}$$

y el impuesto que habría de pagarse sería:

$$13800 \times 0'80 = 11040 \text{ pesetas.}$$

2) Hallar la base de imposición para el timbre sobre descubiertos medios en cuentas de crédito durante un semestre si aquella por que a nosotros nos corresponde tributar presenta los siguientes: 6000 pesetas desde 2 de noviembre a 15 del mismo: 7500 pesetas hasta el 10 de diciembre, y 15000 pesetas hasta final de año.

Los valores por que hemos de hacer el cálculo para aplicar la fórmula que resuelve el problema (**33**) son:

$$C_1 = 6000; \qquad C_2 = 7500; \qquad C_3 = 15000;$$
$$n_1 = 15; \qquad n_2 = 25; \qquad n_3 = 20;$$

lo que da para los términos del quebrado final

$$\sum_1^3 C_m n_m = 6000 \times 15 + 7500 \times 25 + 15000 \times 20 = 565500$$

$$\sum_1^3 n_m = 15 + 25 + 20 = 58$$

lo cual da para la base buscada

$$565500 : 58 = 9750 \text{ pesetas.}$$



III

PRORRATEOS

ESTUDIO GENERAL

38. - Definición.—Los *prorrateos* son los cálculos por medio de los cuales se descompone una cantidad en partes proporcionales a los valores de otras, de donde se deriva la otra denominación de *repartos proporcionales* con que se conoce comunmente a esta operación.

Los prorrateos son una de las muchas consecuencias de las proporciones, pues tomados dos a dos los números y sus partes respectivas deberá poderse formar con ellos una proporción por cada combinación, resultando así que todos los números y sus partes respectivas formarán una serie de razones iguales.

39. - Clases de repartos.—Los repartos pueden ser directos, inversos y mixtos.

Son *directos* cuando es de esta clase la proporcionalidad entre los números dados y las partes resultantes; *inversos* si es inversa la referida proporcionalidad y *mixtos* si la repartición ha de hacerse en partes directamente proporcionales a algunos números e inversamente proporcional a otros.

Además pueden ser los repartos simples, compuestos, complejos y consecutivos.

El reparto es *simple* cuando se hace a base de una sola serie de números y la cantidad debe repartirse en un número de partes iguales al de números de la serie base.

Se llama *compuesto* el reparto cuando, siendo varias las series de números que le han de servir de base, representan

cantidades independientes entre sí, y la proporcionalidad de los resultados ha de ser conjunta y simultánea con todas las series de números base.

Es *complejo* el reparto cuando debe hacerse a base de varias series de números representativos de cantidades, tales que, por su naturaleza, deberían ser proporcionales entre sí y que por circunstancias especiales no lo son; pero que las partes obtenidas en el reparto han de ser proporcionales a las diversas series de números separadamente.

La diferencia, pues, que existe entre los repartos complejos y los compuestos está en que en los primeros el reparto se desea hacer en proporción *de una serie o de otra*, y en los segundos esta proporción ha de ser *con una y con otra serie*.

Todavía se pueden tener para cada especie de los repartos que acabamos de enumerar, los repartos *consecutivos;* lo cual sucede cuando una cantidad debe repartirse primero en cierto modo y después cada una de las partes así resultantes o sólo alguna de ellas deben repartirse de nuevo de modo diferente.

Sin embargo el caso más frecuente de repartos consecutivos se refiere a repartos complejos.

40.—Repartos simples directos. -Sea N el número que debe repartirse en partes directamente proporcionales a los a, b, c, y sean x, y, z, las tres partes buscadas. Se tendrá por definición:

$a : b : c = x : y : z$ o lo que es lo mismo $a : x = b : y = c : z$

y como en una serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente respectivo, resulta

$$(a + b + c) : (x + y + z) = a : x = b : y = c : z$$

Siendo $N = x + y + z$ y llamando T al total de los números dados se tendrán las proporciones

$$\left.\begin{matrix} a : x \\ T : N = b : y \\ c : z \end{matrix}\right.$$

que dan el modo de determinar las tres partes buscadas mediante el establecimiento de tantas proporciones cuantas sean las partes en que haya de dividirse el número, y todas iguales a la que formulamos a continuación

Total de los números : a la cantidad dada :: cada número : a su parte.

De cada una de las proporciones que se formen se obtienen los valores siguientes para las incógnitas

$$x = \frac{N}{T} \times a \qquad y = \frac{N}{T} \times b \qquad z = \frac{N}{T} \times c$$

de las cuales resulta que para tener las partes buscadas basta dividir el número a repartir por el total de los números dados y multiplicar el cociente que resulta (llamado *alícuota unitaria* y que da nombre al método) por cada uno de los números dados sucesivamente. Si dicho cociente no resulta exacto es preciso tener en cuenta el número de cifras decimales que han de calcularse para obtener la aproximación deseada, sin que el hallar estas cifras en mayor número que el necesario para llegar al orden que indica la aproximación represente aumento de trabajo, puesto que por este método se hace una sola división en vez de varias y permanece invariable el número de multiplicaciones que hubieran de hacerse por cualquier otro procedimiento; es decir, que el número de operaciones que por este método se han de efectuar será igual al de partes más una y por el de proporciones sería igual al doble de dichas partes.

En esta clase de operaciones será sumamente útil hacer las divisiones y multiplicaciones respectivamente por las reglas de Guy y de Oughtred.

Ejemplo: Sea repartir 625 en partes directamente proporcionales a 4, 9 y 11.

El divisor del reparto es $4 + 9 + 11 = 24$

que hace no sea exacta la división, y como el resultado bastará se exprese en céntimos, necesitaremos calcular en el cociente cuatro cifras decimales, y así la alícuota unitaria será

$$625 : 24 = 26{,}0416$$

y las partes buscadas serían

1.ª	$26{,}0416 \times 4 =$	104,17
2.ª	$26{,}0416 \times 9 =$	234,37
3.ª	$26{,}0416 \times 11 =$	286,46
	Total repartido....	625,00

41.—Repartos simples inversos.—Sea ahora N el número que haya de repartirse inversamente proporcional a los otros m, n, o, siendo x, y, z, las partes que de este reparto hayan de resultar. Por el enunciado del problema tendría que verificarse

$$xm = yn = zo$$

o sea,

$$x : y :: n : m; \qquad x : z :: o : m; \qquad y : z :: o : n;$$

y puesto que

$$n : m = \frac{1}{m} : \frac{1}{n}; \qquad o : m = \frac{1}{m} : \frac{1}{o}; \text{ y} \qquad o : n = \frac{1}{n} : \frac{1}{o}$$

también será

$$x : y :: \frac{1}{m} : \frac{1}{n}; \qquad x : z :: \frac{1}{m} : \frac{1}{o}; \qquad y : z :: \frac{1}{n} : \frac{1}{o}$$

y al cambiar de lugar los medios de las dos primeras proporciones resultaría

$$x : \frac{1}{m} :: y : \frac{1}{n}; \qquad x : \frac{1}{m} :: z : \frac{1}{o}$$

BIBLIOTECA DE CASTILLA Y LEÓN

de las que, por causa de la razón común que contienen, obtenemos

$$x : \frac{1}{m} :: y : \frac{1}{n} :: z : \frac{1}{o}$$

Por definición resulta también que la anterior relación es el reparto proporcional directo en el que los números fuesen

$$\frac{1}{m}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{o}; \text{ luego}$$

Cuando la repartición haya de ser inversa se sustituirán los números dados por sus inversos respectivos y hecha esta sustitución, bastará considerar este caso como el de repartición directa en que los números fuesen fraccionarios.

Este caso, de existencia de números fraccionarios para hacer el reparto, se resuelve sin más que reducir los quebrados a un común denominador y hacer luego el reparto en proporción directa de los numeradores. Claro está, que para facilitar la

rapidez en los cálculos ese común denominador debe siempre ser el mínimo.

Ejemplo: Resolver el anterior con proporcionalidad inversa. Sustituyendo los números por sus inversos resultan éstos

$$1/4, \quad 1/9 \quad y \quad 1/11$$

cuyo mínimo denominador común, que debe ser suprimido, es 396, y los numeradores respectivos serían

$$99, \quad 44 \quad y \quad 36$$

con lo que tendríamos para alícuota unitaria

$$625 : (99 + 44 + 36) = 625 : 179 = 3'4916$$

ya con los decimales necesarios; y las partes serían

1.ª	3,4916 × 99	=	345,67
2.ª	3,4916 × 44	=	153,63
3.ª	3,4916 × 36	=	125,70
	Total.....		625,00

42. Repartos compuestos.—Sea a dividirse la cantidad N en tres partes en razón compuesta de los números m, n, o, y los p, q, r.

Sabemos que los números de la primera serie m, n, o, deben representar cantidades independientes de los de la segunda serie p, q, r, y además los números correspondientes de las dos series deben ser factores de otras cantidades determinables, multiplicando los términos de la primera serie por los correspondientes de la segunda, con lo que los productos resultantes tendrán la homogeneidad necesaria para hacer en base a ello el reparto. Para aclarar mejor este concepto bastará citemos el caso práctico de una suma que deba repartirse entre tres familias en proporción compuesta de sus miembros y del gasto anual de cada uno de éstos en cuyo caso la multiplicación de dichos gastos por el número de miembros de cada familia nos dará el número homogéneo, gastos totales de cada familia en base a los cuales debe hacerse el reparto.

En el caso propuesto el reparto debe pues ser hecho en proporción de los números mp, nq, or; y llamando T el total de estos productos se tendrá

$$T : N = \begin{matrix} mp : x \\ nq : y \\ or : z \end{matrix}$$

La proporción anterior nos indica que el reparto compuesto se reduce a ser simple sustituyendo los números de las diversas series por los productos correspondientes, aun cuando la proporcionalidad fuese inversa, pues ya vimos en el párrafo anterior cómo ésta se reduce a la proporcionalidad directa, pudiendo suceder en los repartos compuestos que unas series de números sean de proporcionalidad directa y otras de inversa (repartición mixta de que hemos hablado) lo que se resuelve sustituyendo los números que indican proporcionalidad inversa por los cocientes en la forma conocida, dejando invariables las series de proporcionalidad directa y formando luego los productos base de la repartición.

Ejemplo: Distribuir el número 85.000 en partes directamente proporcionales a los números 5, 16 y 14, e inversamente proporcionales a los otros números 30, 21 y 18.

Deberemos efectuar el producto de los números de la primera serie por los inversos de la segunda ya que en ésta la proporcionalidad es inversa, lo que nos dará para números básicos respectivamente

$$5/30, \quad 16/21 \quad \text{y} \quad 14/18$$

quebrados que simplificaremos antes de continuar y tendremos

$$1/6, \quad 16/21 \quad \text{y} \quad 7/9$$

que reducidos al mínimo denominador común y tomando sólo los numeradores tenemos para base del reparto simple directo

$$21, \quad 96 \quad \text{y} \quad 98$$

de donde la alícuota unitaria sería

$$85.000 : (21 + 96 + 98) = 85.000 : 215 = 395{,}3488$$

y las partes respectivas

1.ª	$395{,}3488 \times 21 =$	8302,32
2.ª	$395{,}3488 \times 96 =$	37953,49
3.ª	$395{,}3488 \times 98 =$	38744,18
	Total.....	84999,99

cuyo error es imposible de evitar en muchísimos casos.

43. - Resolución general.—Por el examen que dejamos hecho puede apreciarse que tanto los repartimientos simples como los compuestos quedan reducidos en el último término a un repartimiento simple y directo, una vez que se hayan efectuado con los números de las series las transformaciones siguientes:

1.ª Sustitución de los números que indican proporcionalidad inversa, por los inversos de los mismos números dados.

2.ª Multiplicación de los números de todas las series en el caso en que sean varias por tratarse de repartimiento compuesto.

3.ª Reducción de los quebrados que resulten de las anteriores o que ya sean dados, a su mínimo común denominador, prescindiendo de éste para operar solo con los numeradores resultantes de esta reducción.

Hechas todas las transformaciones o solo algunas, si no fueren necesarias todas, podemos establecer como resolución de todos los repartimientos, cualquiera que sea el número de las partes, la fórmula general, considerando los números básicos representados por B con un subíndice ordinal, las partes por x con otro subíndice correspondiente al de B, y por N el número a repartir, y utilizando la notación sumatoria

$$x_n = \frac{N}{\sum_1^n B_n} B_n$$

que a su vez es fórmula especial del reparto simple directo.

Para el caso de repartimiento simple inverso la fórmula anterior se convierte en

$$x_n = \frac{N}{\sum_1^n \frac{1}{B_n}} \times \frac{1}{B_n}$$

y para el repartimiento compuesto se establecería

$$x_n = \frac{N}{\sum_1^n B'_n B''_n B'''_n \ldots B^{(n)}_n} \times B'_n B''_n \ldots B^{(n)}_n$$

Ejercicios números **1** al **4**, **6** al **14**, **16**, **19**, **20**, **23** al **26** y **28**.

44.—Repartición compleja.—Sea a dividir la cantidad N en tres partes en razón compleja de los números a, b, c, y de los p, q, r.

Ya sabemos que los números de la primera serie a, b, c, deberían representar cantidades proporcionales a los de la segunda serie p, q, r, de modo que si esta proporcionalidad fuese directa, deberíamos tener:

$$a : b : c :: p : q : r$$

y en esta hipótesis el reparto debería hacerse en razón de los tres números a, b, c, o en razón de los otros tres p, q, r, y los resultados serían evidentemente los mismos; pero como en la práctica los números de cada serie no son con toda rigurosidad proporcionales a los de las demás series, es por eso que el reparto debe ser hecho teniendo cuenta lo mismo de los números de una serie que de los de las demás.

Un ejemplo semejante al citado para la repartición compuesta nos aclarará este concepto. Supongamos en efecto, que se trate de repartir una herencia entre tres familias en proporción al número de sus miembros y a los gastos totales de cada familia; el número de miembros de una familia tiene cierta influencia sobre los gastos totales de la misma, pues a mayor número de miembros, mayores gastos corresponderán, pero como las variaciones de un elemento básico del reparto aunque son del mismo sentido que las del otro no guardan proporcionalidad, no puede tampoco elegirse una cualquiera de las dos series para hacer la repartición, sino que han de tenerse en cuenta todas las series a la vez, y, aun ésto, ha de hacerse de modo diferente a como lo hicimos en la repartición compuesta, lo que se consigue con el procedimiento que se denomina complejo y que ahora nos ocupa.

Para conseguir que todas las series básicas del reparto tengan igual influencia en éste se hace preciso efectuar la distribución tomando como base la media aritmética del conjunto de todos los números con respecto de su serie correspondiente, y así en el caso nuestro, los números de la primera serie con respecto a toda ella nos darían:

$$\frac{a}{a+b+c}; \quad \frac{b}{a+b+c}; \quad \frac{c}{a+b+c};$$

que utilizando la notación general del párrafo anterior haría

$$\frac{B_n'}{\Sigma B_n'}$$

los de la segunda

$$\frac{p}{p+q+r}; \qquad \frac{q}{p+q+r}; \qquad \frac{r}{p+q+r};$$

y en forma general

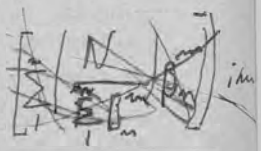
$$\frac{B_n''}{\Sigma B_n''}$$

que para la última serie de orden m sería

$$\frac{B_n^{(m)}}{\Sigma B_n^{(m)}}$$

de cuyos números tendríamos que tomar las medias aritméticas de todos los correspondientes a cada parte a formar, medias aritméticas que se hallarían **(27)** tomando un número de cada serie y el de mismo lugar dentro de cada una, con lo cual cada media, representada en general por a_n se hallaría por la expresión

$$a_n = \left(\sum_{1}^{m} \frac{B_n^{(m)}}{\sum_{1}^{n} B_n^{(m)}} \right) : m$$



en la que vemos serían tantas estas medias aritméticas cuantas unidades tuviera n, y el reparto se haría en razón simple de estos n números cuyo total es la unidad, por lo cual las partes correspondientes del resultado las obtendríamos multiplicando cada uno de los números a_n por el total a repartir, multiplicación que equivale al cálculo de la alícuota unitaria como en los repartos simples, por que los números a_n son quebrados que tienen todos el mismo denominador.

Ejemplo: Sea la distribución compleja de 5000 pesetas entre las tres series de números 7, 8, 5 y 5; 6, 4, 11 y 5; y por fin 9, 15, 24 y 30, todas con proporcionalidad directa.

Para aclarar la aplicación de la fórmula general consideraremos que el número m es 3, y el número n es 4, y que las tres sigmas que entran en el denominador de la fórmula serán respectivamente

$$\begin{aligned} \Sigma B'_n &= 7 + 8 + 3 + 5 = 23 \\ \Sigma B''_n &= 6 + 4 + 11 + 3 = 24 \\ \Sigma B'''_n &= 9 + 15 + 24 + 30 = 78 \end{aligned} \qquad [1]$$

y tomando ahora para los numeradores los números $B^{(m)}$ de cada serie, tendremos para las cantidades del paréntesis de la fórmula las siguientes:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7}{23} + \frac{6}{24} + \frac{9}{78} & a_2 &= \frac{8}{23} + \frac{4}{24} + \frac{15}{78} \\ a_3 &= \frac{3}{23} + \frac{11}{24} + \frac{24}{78} & a_4 &= \frac{5}{23} + \frac{3}{24} + \frac{30}{78} \end{aligned} \qquad [2]$$

todas las cuales para poderse sumar han de reducirse al mismo denominador, que en este caso sería para todas 7176 como mínimo denominador común y los numeradores respectivos

$$\begin{aligned} 2184 + 1794 + 828 &= 4806 \\ 2496 + 1196 + 1380 &= 5072 \\ 936 + 3289 + 2208 &= 6433 \\ 1560 + 897 + 2760 &= 5217 \end{aligned} \qquad [3]$$

que serán los que se dividirán por el m de la fórmula, en este caso 3, y nos daría para números definitivos básicos del reparto

$$1602;\ 1690\ \frac{2}{3};\ 2144 \text{ y } 1739 \qquad [4]$$

cuya suma es igual al denominador 7176, por lo que éste sirve para hallar la alícuota unitaria, que sería en este caso, calculada con 6 cifras decimales para que el error no llegue a los céntimos en el resultado

$$5000 : 7176 = 0{,}696767 \qquad [5]$$

que para las partes pedidas nos daría respectivamente

1.ª	$0{,}696767 \times 1602$	$= 1116{,}22$
2.ª	$0{,}696767 \times 1690{,}(6)$	$= 1178$
3.ª	$0{,}696767 \times 2144{,}(3)$	$= 1494{,}10$
4.ª	$0{,}696767 \times 1739$	$= 1211{,}68$
	Total.....	5000,00

45.—Variaciones de procedimiento.—El repartimiento complejo que acabamos de estudiar lo hemos hecho por el

sistema general de acuerdo con la definición; pero al analizar la fórmula general de determinación de los números básicos y el cálculo que luego sigue podemos apreciar las variaciones siguientes:

1.° Se obtiene el mismo resultado repartiendo el número tantas veces como sean las series de números básicos dadas, y hallando luego para cada parte la media aritmética de los resultados parciales, pues ello equivaldría a efectuar la operación [5] del ejemplo anterior antes que la [3] y que la [4].

2.° También se puede dividir el número a repartir en tantas partes iguales cuantas sean las series de números básicos, hacer el reparto de cada una de estas partes primitivas por separado proporcionalmente a los números de una serie distinta y sumar los resultados parciales obtenidos así para cada incógnita Esto equivaldría a empezar por la operación [4] del ejemplo resuelto, continuando por la [5] y [3] respectivamente.

3.° Si la proporcionalidad con todas o alguna serie de números fuere inversa, debiera empezarse por sustituir los números de proporcionalidad inversa por sus propios inversos como se hizo en las demás clases de repartos y operar con los quebrados resultantes. En este caso y en todos los que nos hallemos con quebrados, para facilitar el cálculo podemos siempre sustituir los quebrados por los numeradores respectivos después de reducir todos al mínimo denominador común

46.—Repartimientos consecutivos. - Pudiera ser considerado como de esta clase los procedimientos primero y segundo del párrafo anterior, si bien sólo se dice que el reparto es consecutivo cuando cada operación del segundo procedimiento corresponde a un reparto, es decir, que en vez de empezar dividiendo el número a repartir en partes iguales para cada serie, se hace de él tantos grupos como series haya y con arreglo a otros números básicos, y luego cada parte se distribuye en relación a su serie respectiva, sumando los resultados parciales de cada parte para hallar el pedido.

47. - Caso especial de repartos.—Como caso particular en los repartos conviene considerar aquél en que las partes a buscar hayan de añadirse o restarse a los números en base a los que se hace el reparto y se desee obtener estas sumas o diferencias directamente.

En este caso de las proporciones

$$T : N = \begin{matrix} a : x \\ b : y \\ c : z \end{matrix}$$

fácilmente se obtiene estas otras

$$T : T + N = \begin{matrix} a : (a + x) \\ b : (b + y) \\ c : (c + z) \end{matrix}$$

y

$$T : T - N = \begin{matrix} a : (a - x) \\ b : (b - y) \\ c : (c - z) \end{matrix}$$

que resuelven este caso particular lo mismo directamente que por las fórmulas de ellas derivadas para aplicar la alícuota unitaria.

Obsérvese que para este caso ya se consideran hechas las tres transformaciones preparatorias señaladas en el procedimiento general **(42)**.

Ejercicios números **4**, **5**, **8**, **15**, **17**, **18**, **21**, **22** y **27**.

CUESTIONES MERCANTILES

48.—Aplicaciones al comercio.—Aunque a medida que vayamos tratando las diversas cuestiones objeto de nuestro trabajo hemos de indicar la aplicación de la regla de prorrateos cuando por ella se resuelvan dichas cuestiones, hacemos aquí un estudio de los casos que pueden resolverse solo con esta regla sin necesitar otros estudios auxiliares de cuestiones mercantiles que hayan de tratarse en otra parte de nuestro trabajo.

49.—Cálculos del siniestro de riesgos generales sobre las cosas.—Cuando acaece un siniestro es imprescindible determinar el importe del mismo para que las cosas deterioradas o destruídas y que estaban aseguradas contra ese riesgo sean abonadas por el asegurador; pero esta determinación cuando es total la destrucción de las cosas consiste en calcular el importe de ellas según su número o medida, cálculo que debe ser conocido, y cuando el riesgo sólo produce deterioro no es posible el cálculo porque su determinación sólo puede hacerse por tasación.

El cálculo especial de estos siniestros consiste en el reparto del importe de la destrucción o deterioro, entre las diferentes personas a quienes corresponde satisfacerlo, si son varias. Estas varias personas son los diferentes aseguradores de la cosa, si el valor de ella se asegura por partes entre varios, y además el dueño de esa cosa, si hay una de esas partes sin comprender en ninguno de los seguros.

Fácil será comprender que estos cálculos constituyen aplicación de los repartos simples directos **(40)** en proporción a la parte que cada asegurador tenga en el total valor de la cosa asegurada y para el dueño por la parte dejada sin seguro.

Ejemplo: Un almacén en el que existen mercancías por valor de 560.000 pesetas, aseguradas contra incendios en la Compañía *A* por 100.000 pesetas, en la Sociedad *B* por 340.000 y en la Compañía *C* por 75.000 ha tenido un incendio cuyos desperfectos se valoran en 155.000 pesetas, siendo además necesario satisfacer 1.400 pesetas por diversos gastos de salvamento y apagado del incendio. Determinar la cantidad que cada asegurador ha de satisfacer al dueño del almacén que es el que hizo los desembolsos de salvamento.

Según lo que antecede han de ser repartidas las pérdidas y gastos entre los aseguradores y el dueño en proporción a las siguientes cantidades:

A.....	pesetas	100.000 —
B.....	»	340.000 —
C.....	»	75.000 —
Dueño del almacén.....	»	45.000 —
Total igual al valor de las mercancías... ...	»	560.000 —

con lo cual la parte que a cada uno corresponde resulta

$$A\ldots \frac{156.400 \times 100.000}{560.000} = 24.357'14 \text{ pesetas.}$$

$$B\ldots \frac{156.400 \times 340.000}{560.000} = 82.814'29 \text{ »}$$

$$C\ldots \frac{156.400 \times 75.000}{560.000} = 18.267'86 \text{ »}$$

$$\text{Dueño}\ldots \frac{156.400 \times 45.000}{560.000} = 10.960'71 \text{ »}$$

Total del siniestro ..... 156.400'00 pesetas.

50.— Averías.—Se conocen generalmente con este nombre todos los daños que pueden sufrir las mercancías durante el transporte marítimo, y teniendo en cuenta la semejanza entre este transporte y el terrestre, en cuanto a la forma en que haya de fijarse el importe de estos daños y el límite dentro del cual no puede considerarse la existencia de avería, no es aventurado el afirmar que por avería haya de entenderse *cualquier daño o deterioro que sufran las mercancías durante su transporte.*

51.—Clases de averías.—Las averías se deben clasificar en averías *simples o particulares*, y *gruesas o comunes*, de las cuales sólo la primera clase es propia del transporte terrestre. Las averías gruesas son las que redundan en beneficio de todas las que se transportan en el buque y del buque mismo, y tienen este carácter de avería, no sólo los daños sufridos por las mercancías, sino todos los gastos que se hagan para conseguir que el buque pueda llegar a su destino. Las averías gruesas están determinadas por los tres caracteres siguientes:

a) Que sean consecuencia de la espontaneidad del capitán de la nave.

b) Que sean hechas en beneficio o interés común del buque, de su cargamento y, en consecuencia, del flete.

c) Que tengan por objeto librar a todos los anteriores bienes de un peligro común.

Las averías simples son los daños que provienen de fuerza mayor o de caso fortuito, teniendo el transporte terrestre sólo esta clase de avería, porque en él no existe el peligro de pérdida total de mercancías y medios de transporte que pueda evitarse en la forma que se evita un naufragio, y ésto impide que se haga nada que sea beneficioso para el salvamento de todas las mercancías expresamente.

52.—Cálculos que precisan las averías.—Las averías simples y las terrestres en cuanto al importe de los daños no precisan más cálculo que el de cualquier otro siniestro **(49)**; pero en lo que se refiere a las averías gruesas, primero se determinará cuáles sean los daños que tienen este carácter, cosa que se hace por peritos nombrados al efecto y siguiendo las normas legislativas, en cuyo detalle no podemos entrar porque habría de ser muy extenso y no aportaría datos para el cálculo que es lo que a nosotros interesa.

Después de determinados los gastos y daños que constituyen la avería gruesa, ya entra la cuestión en el dominio del cálculo, pues si esos desembolsos o deterioros se hacen en beneficio del buque, de toda la carga y del flete, que habría de cobrarse en destino sólo en el caso de feliz término del viaje, si todos los interesados en este feliz término se pueden beneficiar con la avería, todos han de sufrirla en la parte proporcio-

nal al beneficio que encuentren, es decir, en proporción al interés de cada uno en el viaje.

Este interés para cualquiera de los cargadores ha de ser el importe de sus respectivos cargamentos, y el de los armadores será el del buque y el flete del viaje, pero teniendo en cuenta que en cualquier caso ha de haber necesitado la casa armadora ciertos desembolsos para preparar y hacer la parte de viaje que lleva recorrido la nave cuando tiene existencia la avería, se considera a los efectos de este interés del armador sólo la mitad del flete, porque se tiene por devengada la otra mitad en el momento de hacerse el buque a la mar. Una vez que se conoce el interés de cada parte y el importe de las pérdidas, el problema de las averías gruesas es el de repartir en partes directamente proporcionales y por reparto simple (**40**) los daños que constituyen la avería entre los valores interesados en el buen término del viaje.

Cuando ya se ha hecho este cálculo de distribución, falta saber lo que cada parte haya de cobrar o pagar, pues es indudable que las pérdidas de todos los interesados no han de ser exactamente iguales a lo que le corresponda sobrellevar de la avería.

Ejemplo: Un buque cuyos cargadores son los comerciantes *A*, *B*, *C*, *D*, y *E*, que respectivamente tienen cargado 250 sacos cacao a pesetas 485 saco de 100 kilos; 45.000 kilos azúcar a 1'75 ptas.; 500 Qm. de trigo a pesetas 42'70 los 100 kilos; 50.000 kilos café a 6'50 ptas.; y 100 balas algodón con un peso de 35.000 kilos a 226 ptas. los 50 kilos; hallándose en peligro de naufragio tiene necesidad de aligerar la carga y arrojan al mar todo el algodón, 2.000 kilos de azúcar y 50 sacos de cacao, además de aparejos y útiles del barco que se tasan por los peritos en 15.472 pesetas. El buque entra de arribada forzosa ayudado por un remolcador y hace las reparaciones indispensables a seguir a su destino por un importe de pesetas 5.200, debiendo pagar además al remolcador 6.500 pesetas. Llegado a destino, se procede a liquidar la avería gruesa tasando el buque en el estado en que se halla en 1.250.000 pesetas, y el flete según conocimientos en 65.000 pesetas, ascendiendo todos los gastos de peritos y liquidación de la avería a 1.746'50 pesetas. Determinar la parte que cada interesado ha de cobrar o pagar.

Procederemos por el orden en que se exijen estos cálculos dándolos la disposición práctica usual en estas cuestiones por medio de estados en que aparezca cada una de las cuatro operaciones numéricas que origina la avería gruesa en la forma siguiente:

Estado núm. 1

Masa activa o importe de las pérdidas de la avería

Reparaciones hechas en el buque....	Pesetas	5.200 —	
Remolque en la arribada...	»	6.500 —	
Objetos arrojados según tasación....	»	15.472 —	27.172 —
100 balas de algodón arrojadas.. ...	»		158.200 —
2.000 kilos azúcar »	»		3.500 —
50 sacos de cacao »	»		24.250 —
Gastos de liquidación.....	»		1.746'50
Total masa de avería.....	Pesetas		214.868'50

Estado núm. 2

Masa pasiva o contribuyente

Valor del buque según tasación..	Pesetas	1.250.000 —	
Objetos arrojados al mar.....	»	15.472 —	
50 % de flete.....	»	32.500 —	1.297.972—Ptas.
Cargamento de *A*, 250 s/ cacao a 485 ptas			121.250 — »
» de *B*, 45.000 kg. azúcar a 1'75 ptas.			78.750— »
» de *C*, 300 Qm. trigo a 42'70 ptas.....			12.810— »
» de *D*, 50.000 kg. café a 6'30 ptas.....			315.000— »
» de *E*, 35.000 kg. algodón a 226 pts. los 50 kg.			158.200 — »
Total.....	Pesetas...		1.985.982 — »

Antes de formar el estado 3.º hemos de advertir que es el de verdadero cálculo especial de las averías gruesas, el cual ha de hacerse como aplicación de los repartos simples directos (**40**), aunque no es difícil encontrar en las obras, que ha de hallarse, primero de hacer la distribución, el tanto por ciento o por uno de pérdidas que corresponde a la masa contribuyente, para después multiplicar por este tanto por uno la masa parcial de contribución de cada interesado, pero este procedimiento no es sino el mismo que indicamos en los repartos simples directos como de cálculo por la *alícuota unitaria* (**40**). Según los datos anteriores tendremos el siguiente:

Estado núm. 3

Distribución de la avería

Armador..... $\frac{214868'50 \times 1297972}{1983982}$ = 140572,49 pesetas.

Cargador *A*.... $\frac{214868'50 \times 121250}{1983982}$ = 13131'58 »

Cargador *B*... $\frac{214868'50 \times 78750}{1983982}$ = 8528'75 »

Cargador *C*.... $\frac{214868'50 \times 12810}{1983982}$ = 1387'34 »

Cargador *D*... $\frac{214868'50 \times 315000}{1983982}$ = 34115'02 »

Cargador *E*.... $\frac{214868'50 \times 158200}{1983982}$ = 17133'32 »

Total repartido... ..... 214868'50 Pesetas

y como resumen de todos los cálculos hechos hasta ahora resulta el

Estado núm. 4

Liquidación definitiva o resumen

Contribuyentes y acreedores	Daño sufrido	Cuota de avería	Sumas	
			A cobrar	A pagar
Armador.....	27172 —	140572 49		113400 49
Cargador *A*	24250 —	13131 58	11118 42	
» *B*	3500 —	8528 75		5028 75
» *C*....		1387 34		1387 34
» *D*.....		34115 02		34115 02
» *E*.....	158200 —	17133 32	141066 68	
Liquidador de la avería.....	1746 50		1746 50	
Suma..... Ptas.. ..	214868 50	214868 50	153931 60	153931 60

Observación.—Las averías gruesas son también siniestros que hayan de ser satisfechos por los aseguradores, así, pues, la suma importe del siniestro es la cuota de avería, y sobre ella se harían las distribuciones correspondientes en el caso en que fuesen varios los aseguradores o hubiese una parte de las mercancías que se hubiese dejado sin seguro siendo el dueño su propio asegurador, como antes hicimos (**49**).

53.—Distribución de gastos; su objeto. Las distribuciones de gastos en el comercio y la industria tienen por ob

jeto los cálculos de costo de los diferentes productos que han de ser vendidos, o bien la determinación de la parte de gastos generales de una empresa que corresponden a las diferentes secciones que abarca, para poder después conocer el coeficiente de gastos generales que corresponde a cada producto de la sección.

54.—Gastos por secciones.—En toda empresa mercantil o industrial hay muchos desembolsos que convienen a todas las operaciones que en ella se ejecutan, y hay muchas empresas que comprenden varias manifestaciones de la actividad, representadas por secciones, cada una de las cuales constituye a modo de empresa diferente, pero que sin embargo no pueden separarse, y siendo preciso conocer el coeficiente de gastos generales de la empresa a los efectos de la determinación de precios, no es conveniente atribuir a cada sección igual parte de esos gastos porque tampoco es igual su actividad e importancia relativa.

En tales condiciones, se hará la distribución de esos gastos en base al movimiento de cada sección, pero ese movimiento puede ser medido en relación a más de un elemento, por lo que será preciso distinguir el caso en que tales gastos generales dependan sensiblemente por igual de un sólo elemento, de aquel en que sean varios los elementos de importancia relativa de la sección, que influyen sobre los gastos generales que cada sección origina. Tal sucedería, por ejemplo, en un bazar y una empresa minera, en que en el primero los gastos generales dependerán de la mayor o menor venta relativa a cada sección, mientras que en la empresa minera se tiene por un lado que las distintas secciones originarán más o menos gastos del grupo de los generales según sea mayor o menor el producto obtenido, pero a la vez también influirá no poco sobre esos gastos generales el que el número de obreros sea mayor o menor, teniéndose ahora que son dos los elementos básicos de la distribución de gastos que haya de hacerse, y si aún consideramos que esos productos sean de un valor muy diferente y que conveniencias administrativas aconsejen tener presente en el reparto este diferente valor, nos hallaremos con otro elemento más para las bases de repartición.

De cualquier forma que sea la distribución, los elementos básicos del reparto que indican la importancia relativa de la sección no pueden ser determinados exactamente *a priori*, por lo cual se hacen estos repartos en relación a los datos veraces obtenidos de las anotaciones del ejercicio o año anterior, y si han de hacerse los cálculos al empezar la vida de las empresas, se tomarán como números básicos los resultados del presupuesto que haya servido de base a los estudios de establecimiento.

Obtenidos los números básicos, se aplicará uno de los sistemas de reparto (**39**) que indudablemente será *repartos simples directos para la distribución de gastos en base a un sólo elemento de importancia relativa, y repartos complejos directos cuando hayan de servir como base varios elementos de importancia relativa.*

Debemos hacer en este caso el reparto complejo de los gastos en proporción directa de las series de números porque aumentando un número cualquiera de una de las series también producirá aumento en los gastos generales de la sección con respecto a las demás, pero no es posible emplear la distribución por reparto compuesto porque si se tuviese por ejemplo que todos los números de una sección fuesen exactamente el doble que sus correspondientes de otra, es indudable que originaría unos gastos generales exactamente también igual al doble de una fábrica o sección respecto de otra y haciendo el reparto compuesto se tendría para la fábrica o sección de más movimiento unos gastos cuádruples si son dos las series básicas del reparto, gastos ocho veces mayores si las series son tres, y así sucesivamente aumentando por potenciación, en vez de hacerlo por producto como corresponde y como sucederá de servirse del reparto complejo.

Ejemplos:

1) Un comercio que comprende tres secciones efectúa ventas anuales en cada una de ellas respectivamente por 467.000 pesetas; 155.000 pesetas y 90.000 pesetas. Sus gastos generales ascienden a 21.650 pesetas. Determinar la parte de gastos que corresponde a cada sección.

Aplicando el reparto simple directo (**40**) conforme a lo dicho, tenemos para valor de la alícuota unitaria

$$21.650 : (467.000 + 155.000 + 90.000) = 0'031286127$$

de donde resulta para las partes de los gastos correspondientes a cada sección:

1.ª..... ... 0'051286127 × 467.000 = 14.610'62 pesetas
2.ª..... 0'051286127 × 155.000 = 4.225'65 »
3.ª..... ... 0'051286127 × 90.000 = 2.815'75 »

Total de gastos de la empresa..... 21.650'00 pesetas

2) Una empresa industrial posée tres fábricas que respectivamente producen 25.000; 60.000 y 8.000 kilos en condiciones de venta, cuyos valores respectivos a precios de mercado son de 50.000 pesetas, 75.000 pesetas y 42.000 pesetas. En la primera fábrica trabajan 120 obreros, en la segunda 84 y en la tercera 36, hallándose centralizado todo el trabajo de administración, oficina y servicio comercial en una sola oficina para toda la empresa, que tiene unos gastos generales por valor de 6500 pesetas. Determinar la parte de gastos generales que corresponde a cada una de las tres fábricas.

Por medio del reparto complejo **(44)** hemos de calcular la alícuota que representa cada número en relación a su serie respectiva, por lo que llamando S_1 a la suma de los números de la primera serie; S_2 a la suma de los de la segunda serie, y S_3 a la suma de la tercera serie también será:

$$S_1 = 25000 + 60000 + 8000 = 93000$$
$$S_2 = 50000 + 75000 + 42000 = 167000$$
$$S_3 = 120 + 84 + 36 = 240$$

y de aquí hallaremos para números básicos de cada fábrica

$$1.ª \ldots\ldots \frac{25000}{93000} + \frac{50000}{167000} + \frac{120}{240} = \frac{33181000}{31062000}$$
$$2.ª \ldots\ldots \frac{60000}{93000} + \frac{75000}{167000} + \frac{84}{240} = \frac{44861700}{31062000}$$
$$3.ª \ldots\ldots \frac{8000}{93000} + \frac{42000}{167000} + \frac{36}{240} = \frac{15143300}{31062000}$$

en los que prescindiremos de los denominadores como hemos prescindido del divisor de la media aritmética ya que en uno y otro caso el denominador y el divisor comunes intervendrían en el numerador y denominador de la operación final del reparto, y así tendremos para gastos de cada fábrica

Suma de los números básicos

$$33181000 + 44861700 + 15143300 = 93186000$$

y por fin partes de gastos

$$1.ª \ldots\ldots \frac{6500 \times 33181000}{93186000} = 2314'47 \text{ pesetas}$$
$$2.ª \ldots\ldots \frac{6500 \times 44861700}{93186000} = 3129'24 \text{ »}$$
$$3.ª \ldots\ldots \frac{6500 \times 15143300}{93186000} = 1056'29 \text{ »}$$

Total repartido..... 6500'00 »

55.—Distribución de beneficios y quebrantos.—La distribución de beneficios y quebrantos claro está que sólo ha de tener lugar cuando sea el propietario de la empresa una Sociedad ya sea mercantil o civil, pues que en el cálculo no es posible diferenciarlas.

Por la razón de ser solamente precisas las distribuciones de beneficios en las Sociedades se ha dado la denominación de *regla de Compañía* al procedimiento de cálculo por el que se hacían tales repartos, distinguiéndola en *simple* y *compuesta* según la clase de reparto en que se hacía (**39**); o queriendo que fuesen casos distintos los que resultan de considerar: 1.° iguales las participaciones de cada socio en la sociedad y los tiempos que cada uno estuvo en la misma; 2.° que sólo fuesen iguales los capitales; 3.° que sólo sean iguales los tiempos, y 4.° que sean distintos los capitales y los tiempos.

Esta última distinción aunque parece más lógica por ser más detallada es sin embargo la que más debe desterrarse, porque en la situación actual del desarrollo de las Sociedades liquidando cada año o período de tiempo el resultado de las operaciones que determinan la ganancia o pérdida, siempre han de ser iguales los tiempos que en la Compañía tienen todos los socios sus capitales, y además, cuando se da el caso de admisión de un nuevo socio o salida de alguno que antes formara la Sociedad (*), se exije por todas las legislaciones unas formalidades que llevan en sí el término de uno de esos períodos de tiempo (ejercicio administrativo), con lo cual subsiste siempre esa igualdad de tiempo a que nos hemos referido, luego no queda más distribución de beneficios o quebrantos, que la proporcional a los capitales que integran el de la Sociedad que le obtuvo.

En tales circunstancias *la distribución de beneficios o quebrantos en las Sociedades constituye un problema de reparto simple directo, cuyos números básicos son los respectivos capitales de los socios.*

(*) Téngase en cuenta que la negociación de acciones de Sociedades en las Bolsas no constituye entrada ni salida de socios a los efectos del cálculo, ya que siempre subsiste la misma acción como representativa del derecho a los beneficios o responsable de las pérdidas, y sea cualquiera su poseedor.

Cuando las Sociedades tengan su capital representado por acciones, los estatutos, que son los que fijan las normas de distribución en cualquier caso, fijan los tantos por ciento de beneficios que hayan de ser repartidos a cada clase de acciones y a cada una de las personas o entidades que tengan derecho a esos beneficios, cuales son en muchos casos los Administradores, gerencia, empleados, fondos de reserva o de ahorro, instituciones de previsión sostenidas por la Sociedad, o cualquier otro concepto. En estos casos *la distribución de beneficios será un problema de tantos por ciento en la forma que determinen los estatutos sociales.*

Para conocer después la parte que corresponde a cada acción, bastaría dividir el total hallado para cada clase de acciones por el número de las mismas, si bien en la mayoría de los casos se distribuye una cantidad a cada acción para que el total sea un número redondo, dejando una fracción de beneficio para el reparto siguiente, como sobrante.

Ejemplos:

1) Una sociedad integrada por dos socios que respectivamente tienen interesado en ella 25000 y 80000 pesetas ha obtenido en un año 15400 pesetas de ganancia. Determinar la parte que corresponderá a cada uno.

Se entenderá que este beneficio es ya el líquido de los impuestos con que puede estar gravado, único que podrá repartirse, y aplicando el repartimiento simple directo (**40**), se tiene:

$$1^{er}.\ \text{socio}.....\frac{15400\times 25000}{105000} = 3190'48 \text{ pesetas}$$

$$2.^{o}\ \text{socio}.....\frac{15400\times 80000}{105000} = 10209'52 \text{ pesetas}$$

2) Los estatutos de una Sociedad anónima determinan que de los beneficios que se obtengan se destine el 15 %, a constituir un fondo de reserva, el 5 % a gratificaciones del personal de la empresa en diversas proporciones, el 5 % al Consejo de Administración, el 10 % como primer dividendo a las acciones preferentes y el resto como dividendo total a toda clase de acciones. En tales condiciones y siendo de 50000 pesetas el beneficio obtenido, determinar lo que corresponde a cada uno de los conceptos entre los que ha de ser repartido.

Siendo todas las determinaciones parciales aplicaciones del tanto por ciento (**6**) resulta:

Fondo de reserva.....	50000 × 0'15 =	7500 —	pesetas
Personal.....	50000 × 0'05 =	2500 —	»
Consejo de Administración.....	50000 × 0'05 =	2500 —	»
Acciones preferentes.....	50000 × 0'10 =	5000 —	»
Dividendo general.....	50000 × 0'65 =	32500 —	»

y si ahora suponemos que las acciones preferentes son en número de 150 y las ordinarias son 500, resultará que a las acciones ordinarias ha de corresponder a cada una, una participación en los beneficios de

$$\frac{32500}{150 + 500} = 50 \text{ pesetas}$$

y a cada una de las preferentes ha de corresponder

$$50 + 5000 : 150 = 50 + 33'33 = 83'33 \text{ pesetas}$$

56.—Beneficios de Cooperativas. La distribución de los beneficios que se obtienen en una Sociedad cooperativa, no se hace en razón al mayor o menor capital o cuotas del mismo que posean los cooperadores, sino que teniendo en cuenta el fin de estas Sociedades han de participar los cooperadores de esos beneficios en proporción a lo que cada uno ha contribuído a obtenerles, y así en las cooperativas de producción se distribuyen los beneficios en razón directa de los trabajos hechos por cada cooperador; en las cooperativas de consumo en proporción directa de las cantidades compradas por los socios a la cooperativa, y en las de crédito también en razón de las operaciones que cada socio ha hecho con la sociedad, y en todos los casos por reparto simple.

Como en estas Sociedades la resolución directa del reparto para todos los socios es operación demasiado larga y pesada, se determina en todo caso la alícuota unitaria, y después se multiplica por ella el importe de las operaciones hechas con la Sociedad por el socio cuya participación se trate de hallar.

57.—Beneficios de Trusts y Sindicatos.—Los Sindicatos de venta formados por diversos productores, ya tengan la forma de *trust*, *cártel*, *consorcio*, etc., teniendo por objeto regularizar la distribución de productos, obteniendo con ello algún mayor beneficio, no pueden tener normas precisas y generales para la distribución de los beneficios totales o del beneficio extraordinario obtenido por tal concepto, y en consecuencia *la distribución de los beneficios se hará en la forma que determinen los pactos de constitución del Sindicato,*

pudiendo ser la distribución por reparto simple, compuesto o complejo.

La especial circunstancia de que estos beneficios puedan distribuirse por reparto complejo, nos hace resolver el siguiente ejercicio en que esta forma de reparto haya sido convenida por el pacto contractual como vulgarización de los repartos complejos e indicación de las posibilidades de ser útiles en muchas cuestiones mercantiles.

Ejemplo:

Para eliminar la competencia respectiva de dos fábricas, convienen entre sí la venta a los mismos precios, distribuyéndose después los beneficios que se obtengan de la venta, en proporción del capital de cada fábrica, de la producción respectiva y de la venta que cada una obtenga, siendo los datos relativos al problema los siguientes:

	1.ª fábrica	2.ª fábrica
Capital.....	12.000.000	8.000.000
Producción.....	230.000	210.000
Venta.....	245.000	215.000
Ganancias.....	3.000.000	2.700.000

Nos encontramos en un caso al que son aplicables en todo las consideraciones hechas en otro lugar (**34**), para hacer el reparto por la forma compleja (**44**), por lo que dividiendo el beneficio a repartir en tres partes iguales (**45**, 2.º) hallamos para cada una

$$5700000 : 3 = 1900000$$

con lo cual el reparto sería

Alícuotas unitarias	CUOTAS DE BENEFICIO	
	1.ª fábrica	2.ª fábrica
Rep. por raz. del cap. $\frac{1900000}{12+8} = 95000$	1140000	760000
Rep. por raz. de prod. $\frac{1900000}{23+21} = 43181'\widehat{81}$	993181'82	906818'18
Rep. por raz. de venta $\frac{1900000}{245+215} = 4130'4348$	1011956'52	888043'48
Totales..... pesetas..	3145138'34	2554861'66

y de acuerdo con tales resultados la segunda fábrica dará a la primera una participación en sus beneficios por importe de 145138'34 pesetas.

58.—Repartos de masa de quiebras.—El estado de quiebra de una entidad mercantil es aquel en que no son bastante todos los bienes que posée dicha entidad para el pago de sus acreedores, y en tales circunstancias sólo será posible cobrar una parte de los créditos hasta donde alcance la masa de la quiebra.

Llegado el momento del reparto cada acreedor cobrará una parte proporcional a su crédito, por lo que habrá de distribuirse la cantidad disponible en reparto simple directo, siendo números básicos los créditos respectivos.

La cantidad a repartir, no es única durante el proceso de la liquidación motivada por ese estado, sino que en primer lugar se distribuye entre el primer grado de acreedores, puesto que éstos forman categorías de preferencia para el cobro, y cada cierto tiempo en que los liquidadores hayan reunido cantidad bastante en metálico, distribuyen la misma entre los acreedores del grado más preferente, hasta pagarles completamente en uno o varios repartos, y después en repartos sucesivos se van pagando a los de menor preferencia hasta donde alcance el total obtenido en la liquidación.

Resulta por consiguiente, que en las quiebras serán varios los repartos a efectuar, todos los cuales han de ser simples y directos, para cuyo cálculo sucederá lo mismo que para los del caso de cooperativas, que debiendo ser muchas las partes entre que haya de distribuirse la cantidad, convendrá determinar la alícuota unitaria y después multiplicarla por cada crédito para hallar la parte correspondiente.

Ejemplo:

Un comerciante declarado en estado de quiebra posée en conjunto bienes que liquidados alcanzan un valor en metálico de 80000 pesetas, siendo su pasivo o conjunto de deudas de 110000 pesetas, de las cuales 64000 consisten en hipotecas que tienen derecho privilegiado al cobro. Determinar la cantidad que recibiría un acreedor ordinario de dicho comerciante, siendo su crédito de 8900 pesetas.

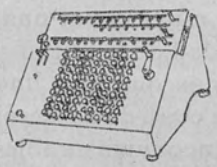
Deducido del importe del metálico disponible el importe de los créditos privilegiados, queda para los acreedores ordinarios 16000 pesetas, lo que da como alícuota unitaria.

$$\frac{16000}{46000} = 0'347826$$

y de aquí obtenemos para la parte que corresponde al acreedor a que nos referimos

$$0'347826 \times 8900 = 3095'65 \text{ pesetas}$$

Ejercicios números **1310** al **1314**, y **1316** al **1341**.



IV

GRÁFICOS

59. - Representación gráfica de las magnitudes.— Teniendo presente que en los cálculos las magnitudes se hallan siempre determinadas por números abstractos que las representan, resultará que en el caso de utilizar medios gráficos para conocer las magnitudes quede reducido el problema a la representación de números; pero como siempre será posible representar cada número por una longitud, con tal que se haya elegido la unidad de longitud para la unidad de número, de aquí tendremos que una línea será suficiente para representar cualquiera clase de números, ya sean éstos enteros, o ya fraccionarios o inconmensurables, con la única limitación de que la unidad elegida haya de ser la misma para todas las magnitudes que entren en la misma cuestión.

60.—Rectas y segmentos orientados.— Considerada una recta cualquiera podremos examinar los puntos que la forman, o algunos de ellos en una o en otra de las dos direcciones en que puede ser recorrida; pero esta duplicidad de sentidos corresponde exactamente con las dos cualidades de la magnitud, positiva o negativa, y si al fijar en la línea la representación de la magnitud, según dijimos en el párrafo anterior, queremos que resulte determinada la cualidad de esa misma magnitud será preciso que determinemos antes el sentido que dentro de la recta corresponde a cada una de esas dos cualidades, o lo que es lo mismo, que asignemos un sentido a la cualidad positiva y otro a la cualidad negativa. Cuando se haya determinado el sentido que en la línea corresponde

a las cantidades positivas, resulta también determinado por contraposición el sentido en que se contarán las cantidades negativas y entonces se dice que la recta, o línea, o segmento está orientado, y dicho en forma de definición, *recta, línea o segmento orientado es aquél en que se han fijado el sentido que corresponde a las cantidades positivas y el que ha de representar las negativas.*

61.– Determinación de un punto en una recta. Escalas.—La orientación de una línea es esencialmente indiferente que se haga eligiendo uno u otro sentido para las cantidades positivas; sin embargo, generalmente en una línea horizontal se toma el sentido de izquierda a derecha como positivo, y si la línea es vertical el sentido positivo será el que va de abajo arriba, con lo cual resultan determinados los dos sentidos y las dos cualidades de la magnitud.

Después de orientada una línea se elige la unidad de longitud que haya de corresponder a la unidad numérica y con ello siempre existirá un punto de la línea que corresponda a un número determinado y sólo un punto, tanto si el número es entero como en el caso de ser fraccionario o inconmensurable, pero este punto de la línea más que corresponder al número corresponde al extremo de un segmento de línea que mide el número a representar, de donde resulta que la determinación de este extremo, considerado fijo el otro, es lo mismo que determinar el número que haya de representar la línea. El extremo de segmento que se considera fijo sirve como punto de partida para la medida longitudinal de todos los números y de ahí el que se llame origen de las cantidades, y corresponda al número cero como intermedio entre las positivas y negativas.

Si para aclarar estas ideas tomamos una línea horizontal AB señalaremos un punto O que la divida en dos semirrectas OB y OA (fig. 1.ª) y este punto O será el origen de las cantidades.

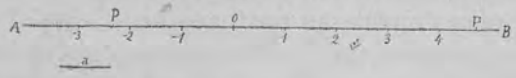


Fig. 1.ª Puntos sobre una recta.

La posición de un punto cualquiera sobre la recta estará determinada cuando se conozca la longitud del segmento que corresponde al número que tratamos de representar, pero medido este segmento con la unidad arbitraria elegida para el caso. Así siendo a la unidad elegida, la posición del punto será P o P' según que el número sea positivo o negativo, por lo que se hace preciso que antes de fijar ese punto sepamos la cualidad del número a que pertenece y sólo entonces será cuando tengamos para extremo del segmento que empieza en O uno u otro solamente de los dos puntos señalados.

La distancia OP se denomina *abscisa* o *cota* del punto P, y como la partida de esa distancia es el punto O, a éste se denomina *origen de las abscisas*. Cuando una recta tiene marcadas las cotas de varios puntos se dice que está *acotada*, y si estos varios puntos corresponden a números de valores que toma una variable, se dice que la recta es una *escala* de dicha variable. La mayoría de las escalas se hacen con valores numéricos enteros naturales, pero pueden hacerse con cualesquiera otros, aunque no reunan la condición de igualdad de distancia entre las cotas, como sucede con las escalas logarítmicas, que son muy utilizadas y las distancias en la recta corresponden a las mantisas de los logaritmos.

62.—Coordenadas cartesianas ortogonales.—Considerando dos rectas de un plano que respectivamente sean una horizontal y otra vertical, se denominan *ejes coordenados ortogonales*, y el punto de cruce de ambas rectas se denomina origen de los ejes.

Estos ejes aparecen en la fig. 2.ª con una orientación idéntica a la que antes señalamos, o sea que a partir del origen O serán positivos los puntos que se hallen a la derecha o en la parte superior y serán negativos los de la izquierda y los de la parte inferior, y designando estos ejes por las letras x e y que es la notación universal para tales casos, resultará además el espacio del plano dividido en cuatro secciones (cuadrantes) que se designan por la notación romana I, II, III y IV, con lo cual siempre se consideran positivos los valores de x que se hallen en los cuadrantes I y IV, negativos los de los cuadrantes II y III, y en cuanto a los valores del eje y serán positivos los de los cuadrantes I y II, y negativos los de los III y IV.

Todavía para distinguir los números que se representan en el eje x y los que corresponde representar en el eje y, se sigue llamando abscisa y eje de las abscisas a los puntos y línea x y se llama eje de las *ordenadas* al eje y, que así tendrá en cada uno de sus puntos una ordenada de otro número, y por fin para designar a la vez las cantidades que se cuentan en el eje de las abscisas y las que se señalan en el de las ordenadas se dice que cada par de puntos de los ejes forman unas *coordenadas.*

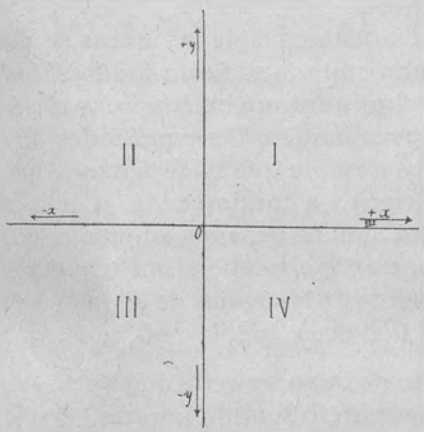


Fig. 2.ª Coordenadas cartesianas ortogonales

63.—Angulos orientados.—Si en un plano consideramos un haz de radios con el origen común como el O de la fig. 3.ª, dos cualesquiera de esas semirrectas dividen el espacio en dos ángulos que son, en general (1) uno convexo y el otro cóncavo, como sucedería con los radios a y b de la figura. En esta indeterminación hemos de limitarnos a considerar uno solo de estos dos posibles ángulos, y todavía en él nos hallaríamos con que al examinar la forma de engendrarse dicho ángulo podría haberlo sido por giro de uno de sus lados alrededor del punto central o vértice, y necesita-

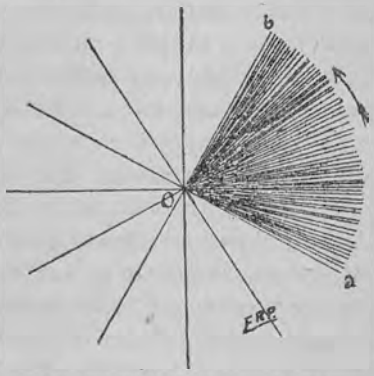


Fig. 3.ª Orientación de ángulos

(1) Decimos en general porque pudieran las dos semirrectas ser una continuación de la otra, resultando entonces dos ángulos planos.

ríamos entonces conocer cual era el lado que efectuó el movimiento para conocer el sentido de ese movimiento, ya que es evidente que según sea el lado a o sea el b así la rotación tendría un sentido o el contrario.

En forma semejante a la orientación de las líneas se dirá que *un ángulo está orientado cuando se haya fijado el lado que gira alrededor del vértice para engendrarlo, y el sentido que en esa rotación corresponde a las cantidades positivas.* Los ángulos orientados siempre que se designan se hace señalando primero el lado origen y a continuación el lado extremo, y como también está universalmente adoptado que, salvo especial indicación contraria, el sentido positivo del giro sea el contrario al movimiento de las agujas de un reloj (sentido antihorario), en la figura al decir ángulo ab o al escribir $\overset{\frown}{ab}$ será siempre ángulo positivo, y sería ángulo negativo el engendrado por giro opuesto, o sentido horario.

64.—Coordenadas polares.—Cuando se ha obtenido la orientación de un ángulo, para que éste quede perfectamente determinado sería preciso conocer el origen del movimiento, o sea la posición inicial del lado que gira y la unidad que se hubiera elegido como medida del mismo ángulo, o sea algo semejante a lo que se hizo con la línea para que representara una cantidad, y en esta condición el ángulo también podría representar una cantidad cualquiera.

Combinando la cantidad que represente el ángulo con la que pueda representar una semirrecta, como las representaba el eje de las abscisas antes considerado, tendremos una paridad de representaciones para otra paridad de cantidades, pero en sistema diferente al cartesiano antes estudiado. Esta paridad de representaciones serán, una la línea OP de la fig 4.ª a cuyo origen O se denomina *polo* y a toda ella *radio vector*, y la otra la que nos diga la posición de este radio y que

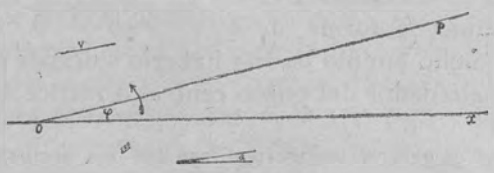


Fig. 4.ª Coordenadas polares.

será la amplitud del ángulo, representado por φ en la figura al cual se denomina *coeficiente angular* y *anomalía*. Toda esta representación se basa en la posición inicial del lado móvil Ox que por semejanza con lo anterior se llama *eje polar*. Las unidades gráficas son la línea v y el ángulo a.

65. – Otras coordenadas. – De un modo general debemos llamar coordenadas a todo par de puntos que correspondan a otro par de cantidades, y del mismo modo que la disposición relativa de las líneas sobre que se midan este par de puntos ha originado las dos clases principales de coordenadas que acabamos de examinar, así también existen coordenadas *paralelas*, cuando los dos ejes son paralelos y tienen el origen de sus cantidades unido por una misma línea recta; coordenadas *cartesianas oblícuas*, cuando los dos ejes que antes consideramos forman ángulos no rectos; coordenadas *tangenciales* cuando los pares de números expresan líneas tangentes a otra.

De estas clases de coordenadas no haremos empleo en esta obra por el carácter elemental de ella y porque en la mayoría de los casos son utilizadas las otras dos clases y muy especialmente las coordenadas cartesianas ortogonales que son las que exclusivamente utilizaremos.

66. – Determinación de un punto en el plano. – Cualquiera que sea la especie de coordenadas que hayan de ser utilizadas siempre queda determinado un punto en el plano conociendo dos números que habrán de ser medidos respectivamente en cada uno de los ejes, o sea que siempre son dos las coordenadas de un punto.

Considerando las coordenadas cartesianas ortogonales y que fueren 3 y 5 respectivamente las cantidades que corresponden como ordenada y abscisa a un punto cualquiera, la ordenada al ser medida sobre su eje, nos indica la distancia del punto del espacio al eje de las abscisas, y recíprocamente la abscisa también nos indica la distancia de ese punto al eje de las ordenadas, por lo que el punto que tratamos de representar y determinar ha de ser tal que se halle a una distancia de 3 unidades del eje x (fig. 5.ª) y a otra distancia de 5 unidades del eje y, pero al considerar que la distancia de un punto a una línea es siempre la perpendicular bajada desde el punto a dicha línea, forzosamente este punto estará sobre perpendiculares de ambos ejes, o sea el punto de cruce de perpendiculares a ambos ejes, por lo que elevando la perpendicular en el punto 5 del eje x y la perpendicular en el punto 3 del eje y encontraremos el punto P que es el

que tratamos de encontrar. Según esto, todo punto del espacio se halla en el cruce de las perpendiculares a los ejes, trazadas a una distancia del origen igual a las coordenadas.

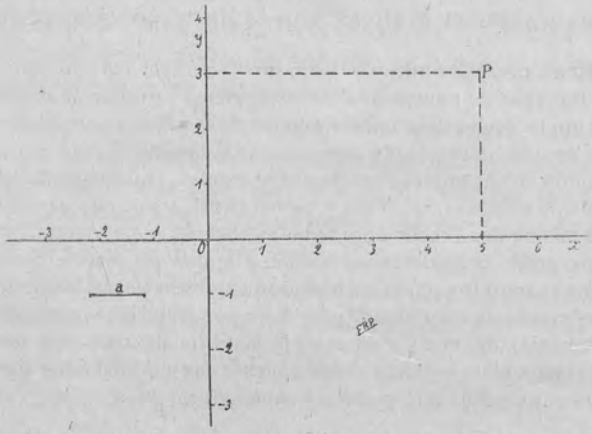


Fig. 5.ª Determinación de un punto en el plano por coordenadas cartesianas

Si las coordenadas hubieran sido oblícuas en vez de ortogonales, bastaría considerar que en éstas las perpendiculares son respectivamente paralelas al otro eje, para utilizar paralelas a los ejes oblícuos, que además se cortarían en el mismo punto que lo harían las perpendiculares.

Considerando ahora el sistema polar, y tomando como radio vector la cifra 5, será el coeficiente angular 3, por lo que sobre el polo construiremos un ángulo igual a tres unidades, y si consideramos como unidad el ángulo *a* de la fig. 6.ª re-

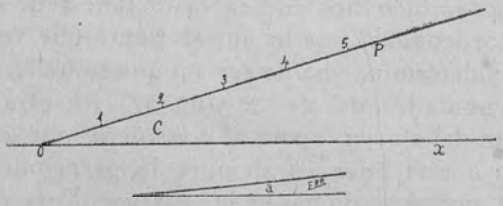


Fig. 6.ª Determinación de un punto en el plano por coordenadas polares

sultará el ángulo *C* y midiendo sobre el radio vector la cifra 5 tendríamos el punto *P* como incógnita buscada.

67.—Representación de funciones.—Las coordenadas son utilizadas en multitud de aplicaciones matemáticas para representar las variaciones que experimenta una función, haciendo que sobre uno de los ejes se midan las alteraciones de la variable que se considera independiente y sobre el otro los valores que va tomando la función para estas variaciones de la variable independiente, y determinando por cada par de estos valores un punto en el espacio, tendremos al final una línea, recta, curva, quebrada, etc. que nos indica la representación de la función con todas las alteraciones de aumentos y disminuciones, valores al límite, etc.

Para la representación de la función siempre ha de considerarse que de todos los valores que entren en la fórmula sólo uno ha de ser variable independiente, y se acostumbra a representar siempre las cantidades que toma esta variable en el eje de las abscisas, tanto porque así se siguen las variaciones de izquierda a derecha en la función, como porque además las elevaciones de la línea en coordenadas cartesianas ortogonales nos señalan los aumentos de la función, y recíprocamente los descensos de la línea las disminuciones de la misma función, sucediendo cosa semejante con las coordenadas polares en que se representen los valores de la variable independiente por coeficientes angulares y entonces los valores de la función serían las medidas de los radios vectores, con lo que el acercarse de la línea al polo indica disminuciones de la función y los aumentos quedarían representados por los alejamientos del mismo polo.

Sea por ejemplo representar la función.

$$y = ax - b$$

siendo respectivamente las constantes

$$a = 5 \qquad\qquad b = 9$$

y dando sucesivamente los valores de números enteros naturales a la variable independiente x iríamos teniendo para valores de la función y los siguientes:

$x = 1$ . . . . . $y = -4$
$x = 2$ . . . . . $y = 1$
$x = 3$ . . . . . $y = 6$
$x = 4$ . . . . . $y = 11$
$x = 5$ . . . . . $y = 16$

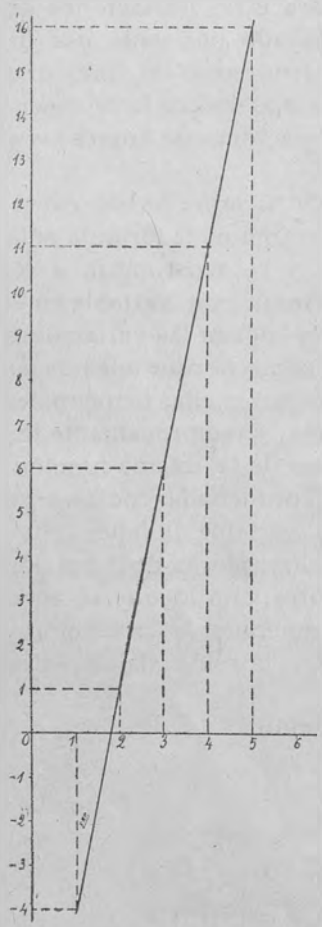


Fig. 7.ª Función en coordenadas cartesianas

pares de valores que medidos sobre cada uno de los ejes respectivos nos daría para representación de la función la figura 7.ª en coordenadas cartesianas, y tomando como coeficientes angulares los valores de x y como radios vectores los de y, la representación en coordenadas polares de la misma función sería la figura 8.ª, ya trazada en la curva correspondiente.

68. — Diagramas. — Son la representación gráfica de funciones de cualquier clase, y como indica su nombre se basan en la existencia de dos variables que puedan ser expresadas gráficamente.

El diagrama admite varias clasificaciones bajo el punto de vista estadístico en que se emplea con mucha frecuencia, pero como derivado de la representación por medio de coordenadas, debemos limitar nosotros el estudio a los derivados de las dos clases de coordenadas a que nos hemos referido hasta aquí, y así diremos que el diagrama será diagrama lineal con base diferente según la clase de coordenadas que sean utilizadas, teniéndose el de base rectilínea cuando las coordenadas sean cartesianas y el de base circular si las coordenadas son polares.

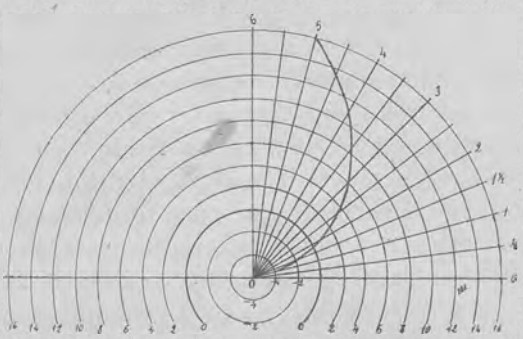


Fig. 8.ª Función en coordenadas polares

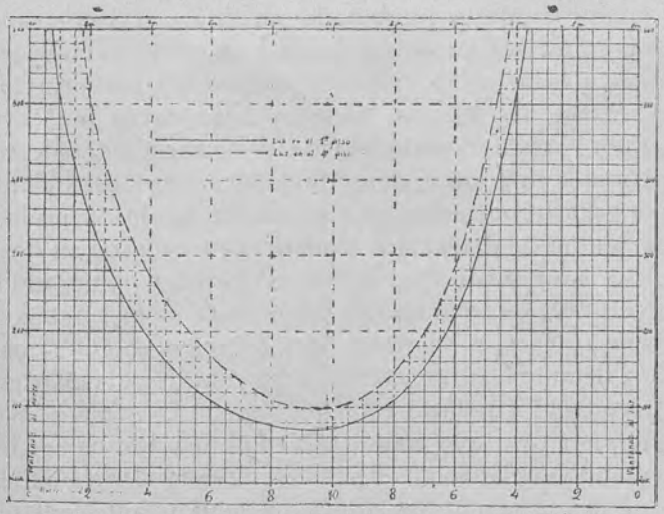


Fig. 9.ª Gráfico-diagrama con líneas auxiliares de lectura

Para facilitar la lectura de los diagramas se acostumbra en la mayoría de los casos trazar líneas paralelas a ambos ejes de coordenadas haciéndolo de forma que se distingan los ejes por medio de un trazo más grueso, y por otro también las unidades principales de división de la medida en los mismos ejes, utilizando en muchos casos el papel milimetrado a fin de conocer mejor las cantidades que corresponden como abscisa y ordenada de cualquier punto. La representación cartesiana ortogonal sería entonces la que aparece en la fig. 9.ª

Considerando que después de determinados puntos diversos de una función pudieran ser examinados sólo los comprendidos entre ciertos límites empezando a contar o estudiar sólo las variaciones a partir de una ordenada o abscisa cualquiera diferente que cero, resultará que pueden construirse diagramas en los cuales el punto cero origen de las ordenadas sea sustituido por otro punto cualquiera del espacio tanto si es perteneciente a uno de los ejes como si es extraño a ambos.

Del mismo modo la unidad de medida lineal correspondiente a la numérica puede ser distinta en el eje de las ordenadas que en el de las abscisas sin que varíen los principios de representación gráfica, si bien en tales casos las curvas que resulten para representación de la función consideradas en sí mismas cambiarían de propiedades; pero este cambio que es de gran importancia en Geometría Analítica no lo es en la formación de diagramas y hasta existen casos en que es beneficioso la adopción de cantidades distintas como unidad de medida lineal en cada uno de los ejes de coordenadas; tal sucede con las escalas logarítmicas que luego estudiaremos.

Lo que dejamos dicho referido a las coordenadas cartesianas se hace con las polares trazando circunferencias concéntricas equidistantes, que sean medidas de los radios vectores y que teniendo el centro en el polo faciliten la lectura del diagrama si a la vez se han trazado radios equidistantes que sean la medida del coeficiente angular, y hasta pueden trazarse diagramas circulares en que el polo de la figura pertenezca a una ordenada del radio vector mayor o menor que cero; pero si fuere menor sólo debe añadirse que la circunferencia perteneciente al punto cero del vector sea de trazo más grueso a fin de facilitar la lectura según dijimos.

69. – Interpolación gráfica. – Una vez que se haya conseguido la representación gráfica de una función habiendo tomado por base ciertas variaciones en el eje de las abscisas, pueden determinarse por medio del gráfico el valor de la función perteneciente a una abscisa intermedia, sin más que trazar la perpendicular al eje en el punto que corresponda a la abscisa tomada como dato del problema, y leer en el eje de las ordenadas el resultado, valiéndose para ello de otra perpendicular a este eje que pase por el punto en que la perpendicular primera corta a la línea de la función, como puede

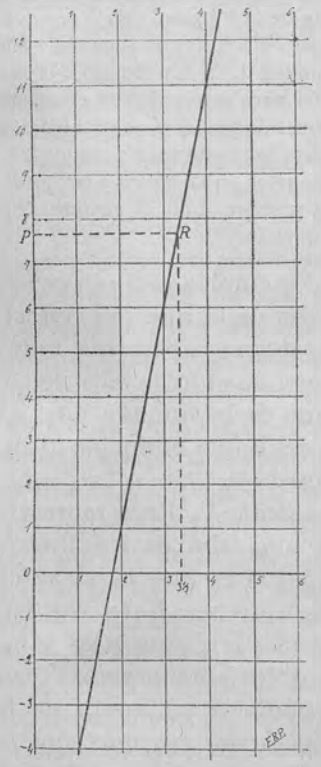


Fig. 10 Cálculo por interpolación gráfica

verse en la fig. 10, en que aplicamos a este caso el ejemplo resuelto en las figuras 7 y 8 del párrafo **67** para el caso de 3 y 1/3 de valor de la abscisa, resultando para valor de la función 7'66 según señala la horizontal *PR*.

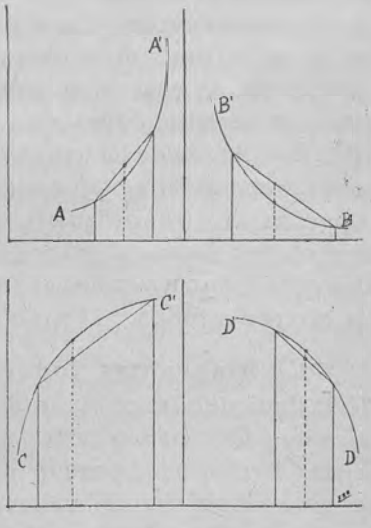


Fig. 11 Aproximaciones en la interpolación gráfica

Si las coordenadas son polares se traza el radio vector correspondiente al valor de la coordenada y se lee en la línea de la función el resultado ya directamente en el punto de intersección del radio vector trazado y dicha línea funcional.

Existe otra interpolación gráfica utilizada en el manejo de tablas numéricas, a cuya parte remitimos al lector.

Casi siempre los resultados así obtenidos suelen ser aproximados, debido a la imperfección de los medios de medida de la longitud de eje que debe ser considerada como resultado; pero esta interpolación tiene además la ventaja, de que en caso de que la línea representativa de la función sea una curva, como serían las de la fig. 11, y se emplease para una incógnita el sistema de cálculo numérico de la proporcionalidad entre dos valores cualesquiera de la función no conocidos, la operación ordinaria equivaldría a sustituir la línea funcional por la recta que como cuerda aparece en la figura y por medio del cálculo gráfico conocemos la amplitud y sobre todo el sentido de la aproximación que dá el cálculo numérico ordinario.

70.—Extrapolación gráfica.—Se emplea esta operación para determinar valores de una función de la que son conocidos algunos, y en la cual el nuevo valor es superior a todos ellos o inferior también a todos, o bien cuando hemos de conocer el valor de la variable para uno de la función que sea también de los comprendidos fuera del límite conocido o del que es posible calcular numéricamente.

Para resolver esta cuestión se construye la línea representativa de la función, prolongándola más allá de los límites que sirven de base a la construcción, si es que la clase de línea lo permite, como será siempre que sea línea regular, (recta, o alguna de las curvas que estudia la Geometria) y tomando una ordenada que nos dé el problema, hallaremos como solución la otra ordenada correspondiente al punto de la función, en forma idéntica a la interpolación sin más que e valor hallado en vez de ser intermedio entre otros conocidos es externo a todos.

71.—Diagramas logarítmicos.—Según antes dijimos **(68)** pudiendo tener distinta unidad de medida lineal los dos ejes de coordenadas cartesianas ortogonales, se pueden establecer ciertas relaciones de proporcionalidad, o de otra clase, no ya sólo en el total valor que va adquiriendo la función, sino entre dos valores cualesquiera, de forma que medidas las variaciones en la escala a partir del origen de los ejes, represente cada alteración nueva una medida total y otra medida tomando como base el valor anterior de la función.

De todos estos diagramas los más importantes son los logarítmicos llamados también *gráficos de razón constante*,

denominación ésta que en forma más general determina la construcción de tales diagramas haciendo asequible su conocimiento hasta para las personas que no hubieran estudiado los logaritmos. En efecto; las longitudes de uno de los ejes de coordenadas, (suele ser el de las abscisas), a partir del origen son constantes entre cada dos consecutivos, de forma que la suma de estas longitudes que es la abscisa del punto considerado, va aumentando siempre en la misma cantidad por suma, mientras que en el otro eje, las distancias entre cada dos puntos consecutivos van siendo cada vez más pequeñas, puesto que la ordenada aumenta según el producto de la ordenada anterior por un número mayor que la unidad, y en consecuencia corresponden mayor número de unidades de ordenada por cada unidad de longitud a medida que va siendo mayor la distancia al origen de los ejes; pero la variación de distancias en el eje de las ordenadas es tal que siempre cualquiera de ellas representa el mismo tanto por ciento, o sea la misma razón, respecto de la anterior, y en tal forma resulta que el mismo espacio lineal corresponde al pase de ordenadas de 2 a 3 que de 20 a 30 y que de 200 a 300 y así sucesivamente, y de igual forma la ordenada 8 al pasar a 12 tiene el mismo espacio que desde la 12 a la 18, porque en ambos casos es la mitad de la anterior lo que se aumenta y el producto de una de ellas por 1,5 nos da la siguiente en valor numérico. De estas propiedades es de donde se deriva la denominación de gráficos de razón constante, y son de grandísima utilidad en los negocios para conocer la proporcionalidad de las variaciones en los datos estadísticos.

Para aclarar mejor estos conceptos presentamos los gráficos en diagrama lineal ordinario y en diagrama logarítmico para el ejemplo de dos funciones V y Z que respectivamente en unidades sucesivas de tiempo van tomando los valores siguientes:

Función $V = 3,\ 5,\ 10,\ 12,\ 23,\ 26,\ 25,\ 23,\ 19,\ 16$ y 15
Función $Z = 8,\ 12,\ 18,\ 27,\ 30,\ 29,\ 27,\ 20,\ 16,\ 12$ y 8

Estos valores serán las ordenadas de varios puntos de las respectivas funciones que construídas nos dan los dos gráficos de la fig. 12, en los cuales podemos observar que mientras en el gráfico ordinario la línea Z es recta en su última parte porque entonces las disminuciones totales en las ordenadas son constantes, al considerar el gráfico logarítmico la parte recta

en la línea Z es la primera hasta la ordenada 27 porque hasta ésta es cuando cada una es la anterior aumentada en su 50 %.

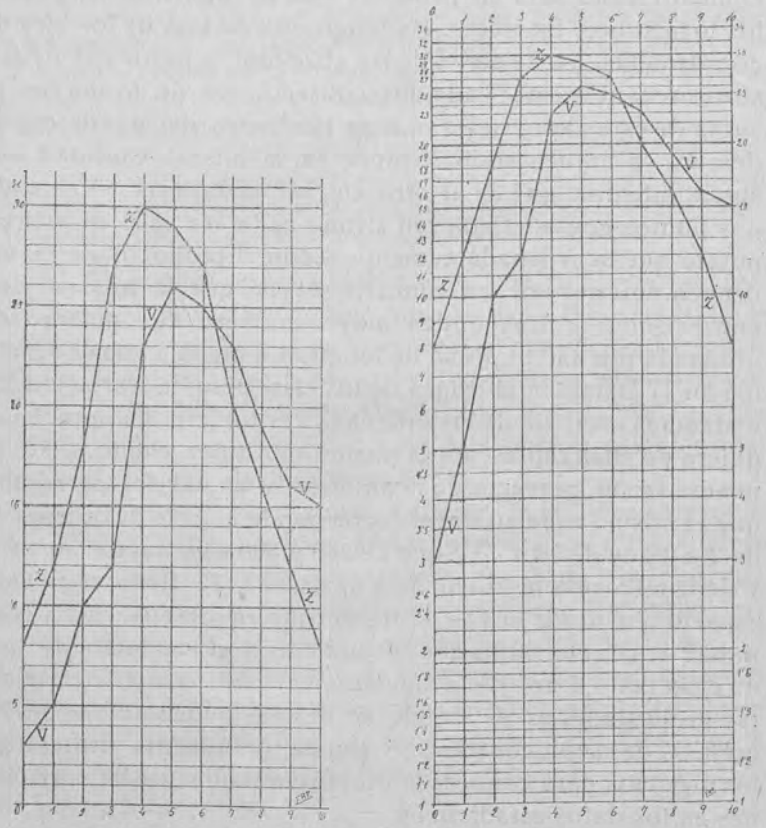


Fig. 12 Representación de funciones en escala distinta
Izquierda: Escala numérica constante.
Derecha: Escala logarítmica.

Con objeto de que nuestros lectores puedan construir diagramas logarítmicos diremos que los datos de medida del eje de las ordenadas, a partir del origen de los ejes, para cada ordenada será el que dan las mantisas de los logaritmos que pueden tomarse de cualquier tabla, o bien utilizar el papel especial llamado *papel logarítmico*.

72.—Diagramas sin línea funcional.—Son aquellos en los que la línea de la función ha sido sustituída por la indicación del punto que corres-

ponde al valor de cada ordenada según los valores de las abscisas, haciendo que sea destacado gráficamente cada uno de estos puntos de ordenadas que dan el valor de la función para una abscisa determinada.

Pueden ser estos diagramas de barra y de superficie rectangular, y siempre la longitud de la barra y la altura del rectángulo son la medida lineal de la ordenada, por lo que son igualmente aplicables a la escala ordinaria que a la logarítmica; pero como en estos gráficos sólo se indican los puntos de la función, no es posible la interpolación ni la extrapolación gráfica **(69** y **70)** la aplicación de ellos sólo es a la presentación de estadísticas, motivo por el que no entramos en tal detalle, remitiendo al lector a las obras de Estadística y Contabilidad.

73.—Funciones de más de dos variables.—Nomograma.—Aunque los cálculos gráficos a medida que son mayores las variables que intervienen en la función, son más engorrosos y difíciles de aplicar por el aumento de trabajo que representa su construcción, han adquirido una gran importancia al considerar el caso de personas que tienen que resolver a menudo el mismo problema con datos distintos, porque siendo en todos ellos utilizada siempre la misma fórmula basta una construcción para todos los casos con sólo cambiar las variables de los datos de cada caso particular.

Esta construcción gráfica que permite obtener una de las variables de una función, constituye el llamado *nomograma*, del cual el diagrama es sólo un caso particular referido a la función de dos variables, y claro está que siempre la lectura de los gráficos ha de ser sólo aproximada, y en consecuencia a medida que sean más las variables también serán más los motivos de error y por consiguiente menos exactos los resultados obtenidos, inconveniente que se salva en la práctica hasta el grado de aproximación que cada persona necesita construyendo el gráfico utilizable dentro de unos límites especiales para las necesidades del constructor, con lo cual se puede hacer el gráfico de mayores dimensiones y por tanto con mayor aproximación.

74.—Construcción de nomogramas.—Para las construcciones de estos gráficos se pueden utilizar diversas coordenadas, pues todos ellos consisten en suponer fijas las variables excepto dos de ellas y resolver la cuestión para estas dos variables en casos diversos a que se haya dado también otros valores a esas otras variables fijas, y por cada una de estas combinaciones se obtiene una línea funcional distinta, que a su vez puede servir de base para formar otras líneas, consideradas ya las tres variables como otras tantas coordenadas para las nuevas líneas funcionales.

Limitando nuestro estudio al caso de tres variables y coordenadas cartesianas, bastante para el carácter elemental de esta obra, diremos que se considera una de las variables con un valor fijo y se construye la línea de la función que así resultaría como si fuera un diagrama; hallada esta primera línea se considera otro valor diferente de la variable fija y con las coordenadas de las otras dos variables se halla la segunda línea funcional, y así sucesivamente.

Para utilizar luego el gráfico así construído se toman las dos variables

conocidas y se lee en la otra coordenada el valor buscado; pero si el nomograma ha de tener un valor práctico deberán hacerse las líneas de forma que todas las tres coordenadas se hallen en líneas que concurran en un sólo punto.

Si por ejemplo tomamos el caso de tres variables que constituyan el producto de dos números y satisfagan a la función

$$xy - z = O$$

que en otra forma de indicación será

$$xy = z$$

consideraremos fija una de las variables, la z, y construiremos los puntos de los valores de las otras dos coordenadas, por lo que tomando los casos de que el valor z fuesen 5, 10, 20 y 50, como la función es un producto para la curva del producto 5 señalaremos la ordenada 10 en el cruce con la abscisa un medio, y la ordenada un medio con la abscisa, 10, la ordenada 5 con la abscisa 1 y la abscisa 5 con la ordenada 1, y así sucesivamente veremos que los puntos son simétricos con respecto a la línea equidistante de los ejes de coordenadas cartesianas, lo que nos dará una curva de ramas iguales, que es la que en Geometría se llama una hipérbola, equilátera con respecto a la bisectriz de las coordenadas, y como ese caso se repetiría para los otros tres valores, de z, la figura resultante será la 13, que se llama nomograma o ábaco de la multiplicación.

Ese mismo ejemplo resuelto por tres ejes concurrentes en un punto, nos dará la fig. 14, para cualesquiera valores de z, y cualesquiera de las otras dos variables, para lo cual consideramos fijo uno de los factores, tomamos como ordenada el producto y como abscisa el otro factor, y así las líneas inclinadas resultantes son respectivamente las correspondientes al número por que debemos multiplicar la abscisa para que nos dé la ordenada, y en ellas al tomar una abscisa cualquiera y una de las líneas inclinadas veremos que la ordenada correspondiente al punto de cruce de la abscisa con la línea del otro factor es el producto buscado.

En el ejemplo resuelto el punto del factor por que debiéramos multiplicar 6 para que nos de 50 está en la línea 5 que es la que pasa por el cruce de las dos coordenadas $x = 6$ e $y = 50$, y si buscásemos el punto, o sea, el factor que corresponde a una multiplicación de producto 65 y cuyo otro factor conocido es 4, se hallará este punto que será N en la fig. y que corresponderá a la línea OR punteada en la figura, que sensiblemente está a igual distancia de las líneas 15 y $17\,^1/_2$, lo que dá un resultado de $16\,^1/_4$ para el factor buscado.

Tomando ahora los dos factores veremos que el producto de 7,2 por 8 será la ordenada del punto P de la fig. que trazada nos dá el valor aproximado de los tres cuartos del espacio entre 50 y 60, siendo el resultado aparente de 57,5 en vez de 57,6 que es el verdadero, apreciando así la forma de leer estos nomogramas o ábacos.

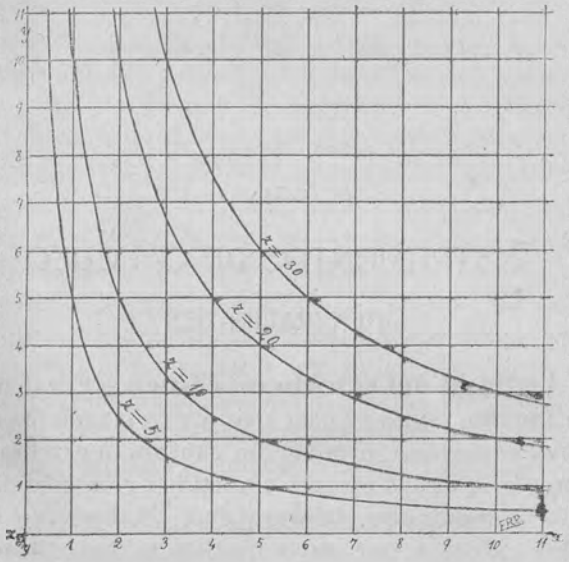


Fig 13. Nomograma o ábaco.

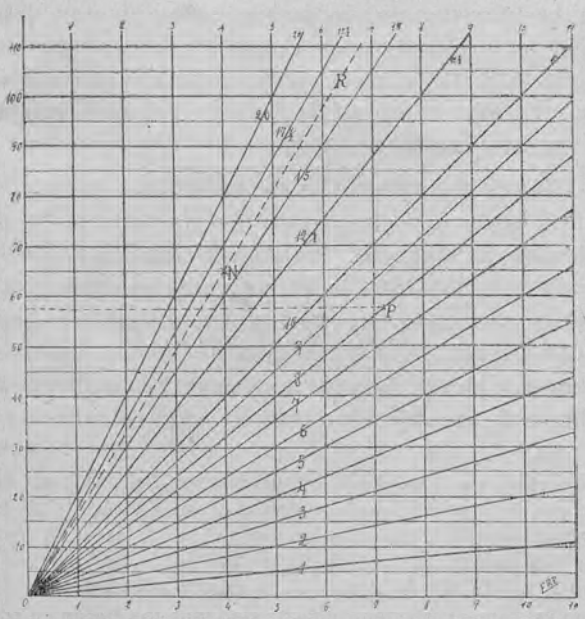


Fig. 14. Nomograma de ejes concurrentes.

V

INSTRUMENTOS DE CÁLCULO

GENERALIDADES

75.—Utilidad del cálculo mecánico.—El cálculo numérico continuado, como es casi siempre en las oficinas, además de ser muy engorroso, produce un cansancio cerebral causante de la mayoría de los errores cometidos y, a medida que ese trabajo va aumentando, disminuye el rendimiento de quien efectúa los cálculos, por cuyo motivo se han ideado desde tiempos remotos medios mecánicos de realizar éstos.

La principal utilidad de las máquinas de calcular consiste, pues, en la inexistencia de errores provinientes del cálculo mismo, es decir, la mayor exactitud y precisión de las operaciones, cosa tan necesaria en toda oficina, y la posibilidad de rendir mucha más cantidad de trabajo útil en el mismo tiempo, con un esfuerzo menor a la vez.

76.—Clases de aparatos de cálculo.—Aunque es bastante difícil hacer una clasificación de las máquinas de calcular, podemos formar, sin embargo, con ellas dos grandes grupos que comprendan respectivamente las que dan resultados exactos y aquellas cuyos resultados, siendo aproximados, puede conseguirse lleguen al grado de aproximación tan pequeño como se desée. Las primeras son las máquinas propiamente dichas y las segundas las reglas de cálculo. (1)

(1) Nos referimos a las máquinas aritméticas, únicas de que nos ocuparemos, ya que las algebraicas no reunen el carácter elemental de este Tratado, ni tienen aplicación a los estudios que hemos de hacer en capítulos sucesivos de nuestra obra.

Tampoco incluímos las máquinas contabilizadoras que si bien hacen cálculos no es éste su objeto principal, sino que los hacen en cuanto sean necesarios a la operación contable.

Estas máquinas propiamente dichas, pueden, a su vez, ser escribientes y mudas, y cualquiera de estas dos clases, pertenecer a uno de los grupos de contómetros y aritmómetros, según la clase de operaciones que principalmente efectúan.

Desde luego esta clasificación y todos los estudios que hemos de hacer se basan en la utilización de estos aparatos para el cálculo y aplicación de ellos en los negocios y oficinas administrativas, dando una importancia muy relativa y secundaria al aspecto mecánico de las características de estos aparatos, ya que más conveniente es para el operador saber las partes de la máquina que pondrá en movimiento que el conocimiento del fundamento mecánico de las transmisiones de movimientos. Por esta causa aparecerán en un mismo grupo máquinas que son materialmente bastante diversas.

MÁQUINAS DE SUMAR

77. – Contómetros.—Son los contómetros máquinas de sumar, si bien con ellos se hacen otras operaciones sirviéndose de artificios calculatorios, y comprenden dos subclases a saber: los clavígrafos y los contostilos, según que obren mediante impulso de teclas o se utilice un estilete para mover los aparatos operadores.

En el comercio de estos aparatos a todos los contómetros se les denomina máquinas sumadoras, porque originariamente sólo eran utilizadas en esta operación.

78. – Contostilos —Son los aparatos en los cuales para señalar las cantidades que hayan de sumarse siempre se emplea un estilete que introducido en el agujero correspondiente al valor absoluto de cada cifra pueda poner en movimiento el marcador de la máquina, que unas veces es de cadenas, otras de ruedas y otras de cremalleras, y siempre el número marcado se une a los señalados anteriormente para efectuar la operación que se pretenda, según la clase de contostilos y como se dice en la forma de operarlos.

79. – Modo de operar con los contostilos. – Varían según sean escribientes o mudos, y según tenga o no el transporte de decenas de una cifra a la otra por lo que debemos distinguir los diferentes casos.

1.° *Suma en aparatos de cadena.* — Carecen de transporte de decenas, por lo cual debe hacerse este transporte por medio del estilete. Se empieza marcando las diferentes cifras del primer sumando, introduciendo el estilete en el agujero de las cadenas de las unidades que corresponda al número a escribir y se hace deslizar dicha cadena hasta que llega el estilete al final del aparato en la parte inferior (fig. 15), siguiendo así con todas las cifras; en las ventanas que enfrentan con las ruedas numéricas aparecerá la cantidad que se ha marcado con el estilete; para el segundo y sucesivos sumandos se repite la operación de marcarlos como se hizo con el primero excepto en el transporte de decenas que resulten de la suma. Este

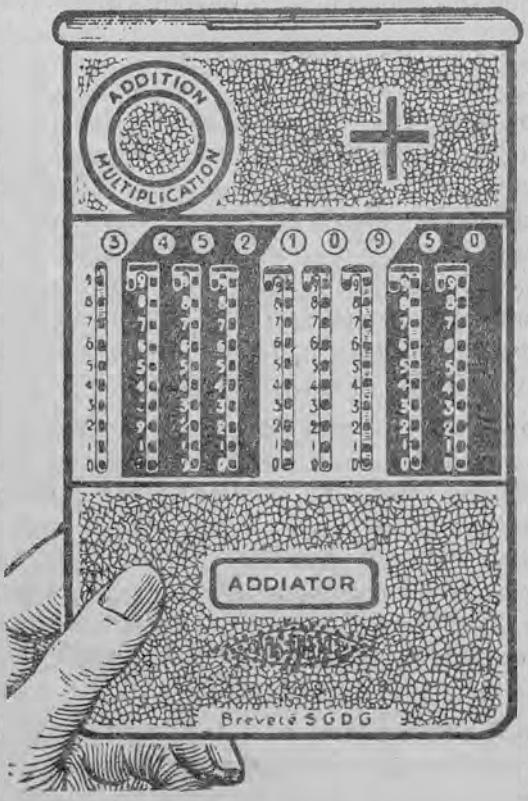


Fig. 15. Contostilo sumador de cadena

transporte de las decenas se hace moviendo el estilete en sentido inverso al de marcar y pasándole por la vuelta que está en la parte superior del aparato. Entonces en las ventanas aparece solamente la suma de todas las cantidades marcadas con el estilete.

2.º *Resta en aparatos de cadena.*—Si son como el de la figura 15, debe procederse en la misma forma que para la suma pero operando con el complemento aritmético de la cifra que hubiere de restarse sin dar la vuelta que transporta decenas, pero teniendo cuidado de agregar a la cifra siguiente la unidad que se le agregaría restando sin la máquina.

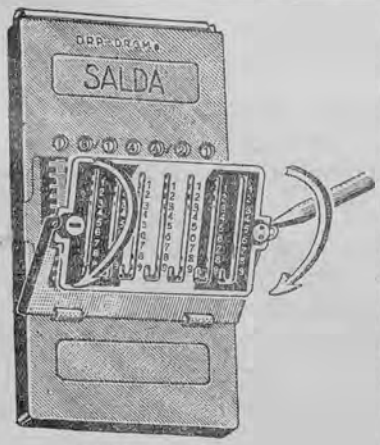


Fig. 16.

Cuando la máquina dispone de aparato para restas, consiste éste en una plancha que ocupa el marcador de la máquina y que se puede invertir a voluntad, fig 16, con lo cual en la suma deja al descubierto el transporte de decenas en la parte superior y para la resta este transporte queda en la parte inferior, y marcando los números como si se tratase de suma y moviendo el estilete como para sumar se hará el transporte de decenas al llegar el estilete a la parte inferior del aparato y quedarán en las ventanas la diferencia entre el minuendo que se marcó como un sumando y el sustraendo marcado después.

3.º *Aparatos de ruedas.*—Son modificaciones pequeñas de la máquina sumadora de Pascal, y tienen el transporte de decenas, presentando el aspecto de la fig 17. En ellos la suma se hace marcando las cifras de cada sumando por la colocación del estilete en el agujero de su valor absoluto y en la rueda que corresponda a la posición relativa y moviendo el estilete hasta llegar a cero, como se marcan los teléfonos automáticos, y con ello, en cualquier orden que se hubieren mar-

cado las cifras se tienen en las ventanas del aparato la suma buscada.

Para restar es necesario valerse del complemento aritmético de cada cifra y tener presente la decena que puede haber sido transportada indebidamente.

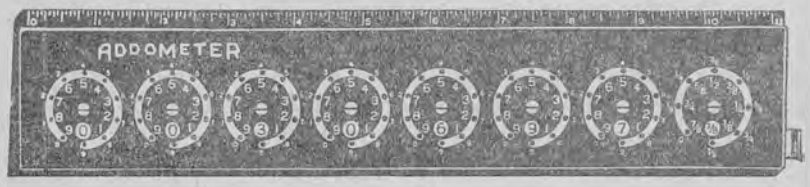


Fig. 17. Contostilo de ruedas.

4.° *Reducción a cero.*—En los contostilos mudos que acabamos de indicar se reducen a cero los marcadores por el deslizamiento producido por una palanquita colocada en la parte superior o a un lado del aparato.

5.° *Números no decimales.*—Para ello los discos o columnas marcadoras tienen los agujeros necesarios, como puede verse en la fig. 17 en el último disco que para sumar octavos son 8 los agujeros del disco, y así serían 12 los agujeros para unidades duodecimales, haciéndose el transporte por discos completos en vez de hacerse por decenas. De esta especie son las que se utilizan para la moneda inglesa.

6.° *Contostilos escribientes.*—En ellos hay que distinguir la máquina propiamente dicha y la parte escribiente, aunque funcionan simultáneamente.

Para hacer las sumas se empieza por escribir el primer sumando en la parte del marcador *A* (fig. 18) colocando el estilete en la columna de cifras que corresponda al orden decimal de la que vamos a anotar y en la parte inferior del número que se trata de marcar, deslizando el estilete hasta la parte inferior, con lo cual al terminar de operar con todas las cifras aparece en la línea inferior del marcador el número anotado, que en la figura es el 5369755. Una vez marcado se baja la palanca *B*, y el sumando queda incorporado a la suma que ya hubiere en la abertura *C*, escrito en la parte *D* del

aparato, y reducido a cero el marcador; repitiendo la operación con todos los sumandos se obtiene la suma deseada.

Si se tratase de restar se hace necesario valerse de los complementos aritméticos de cada cifra marcando dichos complementos en vez de las cifras del sustraendo, pues el minuendo es un sumando, y a la izquierda de la cifra de orden superior del sustraendo todas las columnas que queden se marcan con nueves y con ello al sumar el número así formado queda en la ventana *C* efectuada la resta que se quería.

Estos aparatos tienen también una disposición que permite que el marcador no vuelva a cero cuando se baja la palanca *B* sino que continúa con el número marcado en tanto que se quiera y de esta forma por sumas repetidas se consigue una multiplicación.

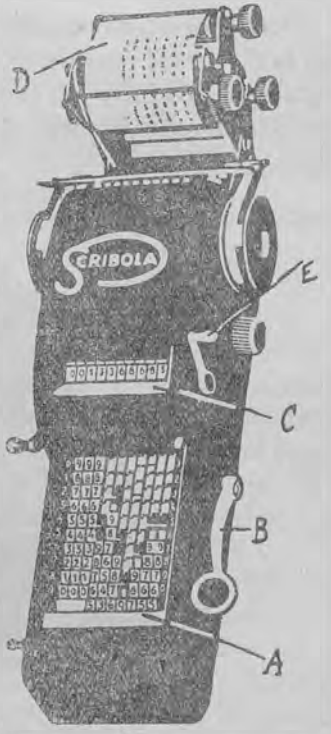


Fig. 18. Contostilo escribiente.

80.—Clavígrafos.—En estos aparatos deben ser distinguidos el marcador de sumandos, el operador que pone en movimiento la máquina y hace la incorporación de los sumandos marcados, y el aparato escribiente, siendo éste último la única diferencia que existe entre los contómetros escribientes y los mudos.

Esencialmente en todos los modelos de esta clase de máquinas el aspecto exterior guarda cierta semejanza con las máquinas de escribir ordinarias, porque en todas el marcador es un teclado numérico, ya con nueve filas horizontales de números correspondientes cada una a un dígito, o ya con solo las diez teclas de las diez cifras, además de las teclas de mando para el funcionamiento del aparato, y el mecanismo impresor cons-

ta de un cilindro portapapel, del papel y de la cinta impresora, todo casi idéntico a las máquinas de escribir.

Esta clase de máquina comprende, como todas las demás que hemos de estudiar, mucha variedad de marcas que se agrupan en dos variedades según el teclado que forma el marcador, y en consecuencia con fundamento mecánico diferente y modo de operar también distinto.

81.—Sumadoras de teclado completo. Según vemos en la fig. 19 las nueve filas de teclas que componen el marcador están subdivididas en grupos de diferente color para indicar los distintos órdenes de unidades enteras y decimales y facilitar la escritura.

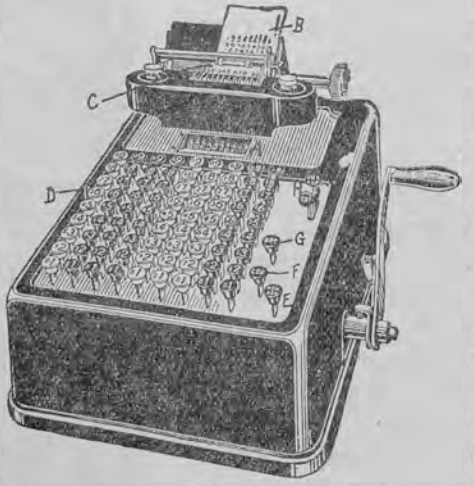


Fig. 19. Sumadora de teclado completo.

Las otras partes esenciales de la máquina son la *abertura*, —*A* en la figura— en que van apareciendo las sucesivas sumas de todas las cantidades que forman la operación que se está ejecutando, como se ve en la fig. que aparecen en dicha abertura precisamente las mismas cifras que forman el último número escrito en el papel *B*. El aparato motor de la máquina es la manivela que se ve en la derecha de la figura, que en los modelos eléctricos está sustituída por una tecla que co-

necta la corriente de un motor adosado a la máquina, y el impresor se halla en la parte posterior, oculto en la figura.

Los aparatos mudos son esencialmente lo mismo que los escribientes sin más que prescindir de la impresión, teniendo un manejo igual en ambas clases excepto en lo de imprimir los datos o el resultado.

Muchos de estos aparatos tienen teclas especiales, como las de resta directa, — *D* en la figura—, corrección, repetición, no suma, total y subtotal, todas en la parte derecha del marcador en la figura, y las de servicios de los varios acumuladores de sumas en los modelos en que hay más de uno, y en no pocos, movimiento del carro que lleva el papel para escribir cantidades en varias columnas.

82.—Modo de operar con las sumadoras de teclado completo. Para mayor claridad seguiremos el orden de las diferentes operaciones que con ellas pueden efectuarse en la forma siguiente:

1.°—*Suma.*—Oprimiendo las teclas que corresponden a los sumandos, cada una en la columna del orden de unidades que deba expresar, y dejando sin oprimir ninguna tecla en la columna cuya cifra deba ser cero, queda la máquina en disposición de escribir y sumar, lo que conseguiremos moviendo la manivela hacia adelante hasta dar un cuarto de vuelta; con ésto aparecerá la cantidad en el papel que sostiene el carro y cilindro, y a la vez en la abertura de la caja y repitiendo esta operación por cada sumando se obtiene el total. Como hasta ahora en el papel han ido apareciendo las cantidades o sumandos y en la abertura las sumas, si queremos que también ésta quede impresa bastará que oprimamos una de las dos teclas *H* de la fig. según se desee suma parcial o total, y volvamos la manivela en la forma ordinaria, apareciendo entonces la suma debajo del último sumando escrito, y en la mayoría de los modelos el subtotal o suma parcial aparece en tinta diferente. El uso de la tecla de total además reduce siempre a cero el acumulador o sumador de la máquina.

Para que alguna cantidad pueda ser escrita y no sumada tiene el aparato la tecla *E* de no suma, y si hubiera error en la colocación de cantidades en el marcador puede éste subsanarse haciendo funcionar la tecla *F* de corrección.

2.º —*Resta complementaria.*—En todos los modelos antiguos y en muchos de los que aún se hallan en el mercado se efectúa la resta haciendo aplicación de los complementos aritméticos de los sustraendos que suponemos conocidos indudablemente por quienes lean estas líneas.

Sabemos que si se reemplaza en una resta el sustraendo por su complemento, al sumar éste se comete un error por exceso igual a la suma del número que debía restarse y de su complemento, error que es la unidad del orden inmediatamente superior al más elevado del sustraendo, luego, restando esta unidad tendremos corregido el resultado.

Para facilitar la corrección se puede hacer correr la unidad a suprimir algunos lugares hacia la izquierda hasta quedar fuera de las que comprende la máquina de sumar y hacer preceder al complemento de las cifras 9 que para ello sean precisas, lo que no causará cambio alguno en el resultado.

Las máquinas de sumar ayudan a la ejecución de este trabajo llevando escritas en sus teclas con caracteres más pequeños los complementos a 9 de cada una de las cifras, de forma que para restar un número cualquiera basta oprimir las teclas que en pequeños caracteres marcan las cifras de dicho número excepto la tecla correspondiente a la primera cifra significativa de la derecha que deberá ser oprimida la correspondiente al número dígito inmediatamente inferior, y para hacer la corrección se oprimen las teclas de órdenes superiores al mayor del sustraendo que llevan el 0. Así por ejemplo, para restar el número 538064 se deberán oprimir las teclas que lleven las cifras pequeñas 538063 y todas las 0 de las columnas de la izquierda no oprimidas anteriormente. Haciendo después uso de la manivela en la forma conocida quedará efectuada la operación e impreso el sustraendo; si queremos imprimir la diferencia usaremos la tecla de total y con nuevo movimiento de la palanca motor se imprime el resultado y reduce a cero el acumulador.

3.º—*Resta directa.*—Este perfeccionamiento de las máquinas de sumar consiste en invertir los engranajes, de forma que el acumulador cambie de dirección en sus giros y por consiguiente cuando se oprime la tecla especial de resta directa del aparato, o se cambia la palanca correspondiente, —la *D* en la

figura –, basta escribir primero el minuendo como sumando y después hacer funcionar esta tecla especial escribiendo el sustraendo como si fuera también sumando, oprimiendo la palanca motor como de costumbre y la sola máquina efectúa la resta sin la preocupación de los complementos que antes indicamos.

4.° *Multiplicación.*—Esta operación se verifica escribiendo el multiplicando del mismo modo que se hace con los sumandos; pero moviendo la manivela de propulsión tantas veces como unidades tenga la cifra correspondiente del multiplicador.

Para que la repetición de la cantidad escrita como multiplicando se haga sin operar sobre el teclado a cada propulsión de la manivela, tienen estas máquinas una tecla especial que es indispensable oprimir al hacer multiplicaciones o divisiones; esta tecla es la *G* de la figura.

Multiplicada en la forma que antecede la primera cifra del multiplicador si queremos efectuar esta operación con varias cifras se reduce a cero el marcador por medio de la tecla de corrección y se escribe de nuevo un lugar más hacia la izquierda, repitiendo la operación de movimiento de la palanca motor tantas veces como unidades tiene la nueva cifra, se reduce de nuevo a cero, se escribe otro lugar más hacia la izquierda y se mueve la palanca otras veces, repitiendo estas operaciones hasta terminar con todas las cifras del multiplicador, si es que la capacidad de la máquina permite operar con todas las cifras de ambos factores. Teniendo cuidado en todas las operaciones parciales de haber hecho funcionar la tecla especial o el dispositivo de no imprimir, resultará que al operar la tecla de total al final de la multiplicación resultará escrito el producto total, y reducido a cero el acumulador de la máquina.

5.° *División.*—Hay dos procedimientos indirectos en estas máquinas para lograr obtener un cociente. El primero consiste en tomar el dividendo como un factor y sustituir el divisor por su recíproco o inverso, haciendo la multiplicación por este último; como sería, por ejemplo, al tener que dividir un número cualquiera por 648, en que la operación se haría multiplicando el dividendo por $\frac{1}{648} = 0{,}001543209..$ para lo

cual empezaríamos la multiplicación por la primera cifra de la izquierda de este segundo factor colocando el dividendo en el marcador todo lo más a la izquierda posible para ir marcándole sucesivamente hacia la derecha para las restantes cifras y luego separar en el total final las cifras decimales precisas.

El segundo procedimiento de efectuar la división es por medio de restas sucesivas, pero utilizando siempre el método de restas por complementos, debido a que por el sistema de resta directa sólo se obtendría el resíduo y no el cociente. Para hacer, pues, la división por complementos, se escribe el dividendo como sumando, y después el complemento del divisor en la forma que dijimos para la resta, pero sin hacérsele preceder más que de una cifra 9; impulsaremos la manivela hasta conseguir un resto menor que el divisor, a la izquierda del cual aparecerán uno o más ceros hasta el orden de unidades que representa la cifra nueve escrita a la izquierda del complemento, y a la izquierda de estos ceros tendremos un número, igual al de veces que movimos la manivela y que es la cifra del cociente; se corre el carro de la máquina un lugar hacia la izquierda y se repite la operación anterior apareciendo la nueva cifra del cociente escrita a la derecha de la primeramente hallada y continuando en esta forma hallaremos el cociente y resto de la división que deseabamos efectuar.

Para dividir, por ejemplo, 3908 por 26, iremos obteniendo los resultados que a continuación se van indicando, habida cuenta de que el complemento del divisor es 74.

3908 974			
101308 974	en el que es cociente	1 y resto	1308
111048 974	» » » » »	11 » »	1048
120788 974	» » » » »	12 » »	788
130528 974	» » » » »	13 » »	528
140268 974	» » » » »	14 » »	268
150008	» » » » »	15 » »	8

83.—**Sumadoras de teclado reducido.**—Son esencialmente idénticas a las de teclado completo, disponiendo de las mismas teclas de mando del aparato, para efectuar sumas, restas directas, imprimir o no a voluntad, sumar o dejar de hacerlo para que sirva como numeración que no se incorpora al acumulador, totales y subtotales que se imprimen; pero se diferencian en que el teclado principal de números tiene solo diez teclas, una para cada una de las cifras, o doce teclas si además permite escribir dos o tres ceros finales de un sólo golpe de tecla, como el modelo de la fig. 20.



Fig. 20. Sumadora de teclado reducido.

La forma de operar con estos contómetros sólo se diferencia de los de teclado completo en el modo de marcar los números, pues para esta operación debe empezarse por colocar el carro de forma que corresponda el punto de él con el lugar que haya de ocupar la cifra de la izquierda de la cantidad a marcar, y una vez así colocado el carro portapapel, se escribe la cantidad como en las máquinas de escribir ordinarias, o sea empezando por la primera cifra de la izquierda y una vez terminada la escritura en el teclado es cuando se mueve la palanca motor o la barra de conección eléctrica, según el mo-

delo, y se oprimen las teclas de mando para que la cantidad escrita quede sumada o restada en el acumulador de la máquina y a la vez quedará impresa en el papel correspondiente la cantidad marcada y aparecerá en la abertura de la máquina la suma o diferencia con las anteriores cantidades, reduciéndose a cero el acumulador al escribir el total por medio de la tecla de mando especial para esta cantidad.

84.—Cajas registradoras.—Son estos aparatos máquinas de sumar, que a la vez que imprimen y suman las cantidades, como las sumadoras corrientes, imprimen un billete o ticket que corta el mismo aparato y accionan una gaveta de caudales dividida en tantos compartimentos como número de combinaciones consienta la máquina. A cada una de estas combinaciones corresponde una tecla especial que marca la cantidad que pertenece a cada operación o combinación y a la vez que hace la suma, abre automáticamente la gaveta para poder guardar el dinero cobrado y suelta el ticket, que sirve de recibo al pagador.

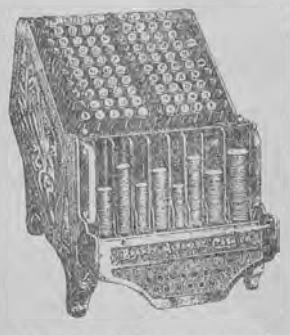


Fig. 21. Contadora cambiadora de moneda.

La manipulación es en todo semejante a la de las máquinas de sumar de teclado completo, tanto en la forma de marcar las cantidades por medio de teclas como en necesitar de impulsora la manivela, o el motor eléctrico.

También son sumadoras de teclado completo las cambiadoras de moneda, como la de la fig. 21, las cuales además de sumar seleccionen monedas de su depósito.

MÁQUINAS DE CALCULAR

85.—Aritmómetros.—Estos aparatos efectúan las cuatro operaciones aritméticas sin necesidad de recurrir a los artificios que hemos indicado como necesarios para los contómetros y de ahí la denominación que encabeza este párrafo y la de *máquinas de calcular* con que son conocidas en el mercado.

Bajo el aspecto de su utilización, debemos distinguir en estos aparatos las partes siguientes: 1.° el *marcador* en el que han de ser señalados o puestos los datos del problema, para luego transmitirlos a las demás partes de la máquina; 2.° el *transmisor* o aparato motor de la máquina que pone en juego

las diferentes partes del aparato para que se produzca el funcionamiento, y 3.° el *carro* o receptor de los datos que se pusieron en el marcador, y compuesto de *indicador* de resultados, o parte receptora de la transmisión, y *contador* de revoluciones para saber las veces que se efectuó la transmisión, según veremos al examinar su funcionamiento. Además de estas tres partes esenciales existen servicios secundarios en el aparato como son el de poder reducir a cero alguna o todas las partes, el transmitir los resultados a una parte de la máquina para sucesivos cálculos, corregir errores que pudieran cometerse, indicación de los decimales en las operaciones en que intervienen fraccionarios de esta clase, colocación automática de las comas en estos mismos casos, movimientos del carro en forma parecida al de las máquinas de escribir, cierre del mecanismo cuando no están bien colocadas las partes de la máquina, aviso de errores, etc.

86.—Clases de aritmómetros. - Examinando las partes principales de las máquinas de calcular y las variedades que así presentan, tendremos:

1.° El marcador, que puede ser: *de teclas* en forma idéntica al teclado completo de los contómetros; *de palancas deslizantes*, que consiste en varias ranuras en las que aparecen lateralmente marcadas las cifras de 0 a 9 frente a cada posición que puede tomar la palanca marcadora; *de palancas giratorias* cuando en forma semejante a las anteriores son las palancas marcadoras partes de una rueda interior. Estas tres clases pueden verse en las fig. 22, 23 y 24 respectivamente.

2.° Con respecto al transmisor, pueden ser las máquinas de manivela o eléctricas según que sean movidas manual o eléctricamente por motor; pero al considerar la forma en que se efectúa la transmisión por engranes y ejes del aparato, resultan las dos variedades de aritmómetros *horizontales*, como el de la fig. 22, en los que los números transmitidos están en ruedas colocadas horizontalmente, cada una en un eje distinto; y aritmómetros *verticales*, cual el de la fig. 24, cuya transmisión se hace a ruedas colocadas verticalmente, y todas las de una misma cantidad en el mismo eje.

3.° En cuanto al carro, ofrecen la misma particularidad de clases que para el transmisor, porque es en el carro en donde

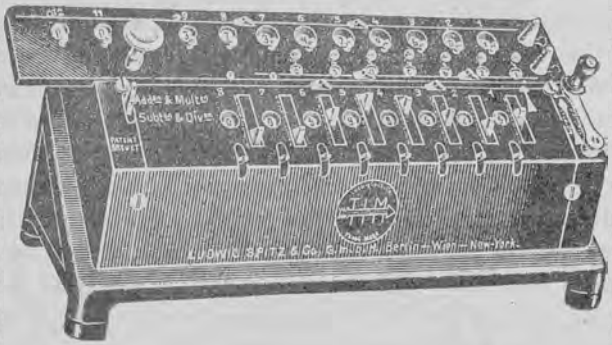


Fig. 22. Aritmómetro horizontal de palancas.

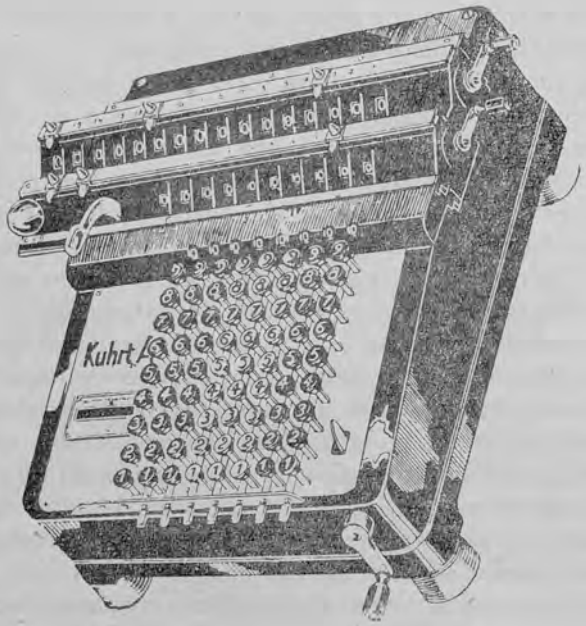


Fig. 23. Aritmómetro horizontal de teclas.

se hallan colocados los ejes y ruedas que motivaban la clasificación.

4.º Por la forma que tienen de efectuar las operaciones, la clasificación de los aritmómetros es en *multiplicadores por sumas repetidas* cuando el aparato motor produce una suma por cada movimiento principal (vuelta de su eje); y *multiplicadores directos*, si la parte mecánica exige un sólo movimiento para efectuar esta operación. Esta última agrupación es la que utilizamos para el estudio de las máquinas porque es la que crea variaciones esenciales en los actos del operador.

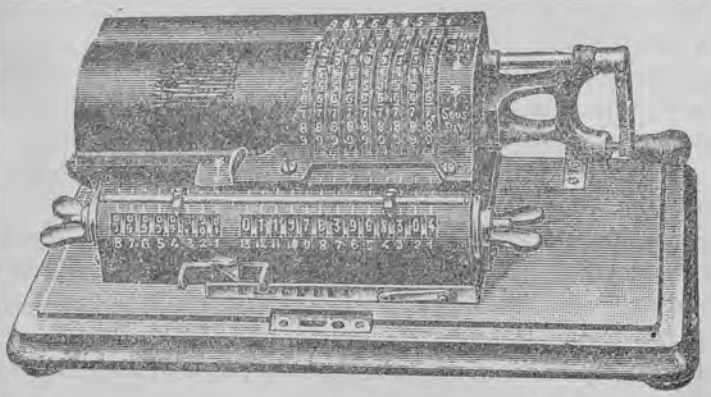


Fig. 24. Aritmómetro vertical.

87.—Multiplicadoras por repetición.—En forma semejante a lo hecho en los contómetros indicaremos la forma de operar de un modo resumido y por orden de operaciones como sigue:

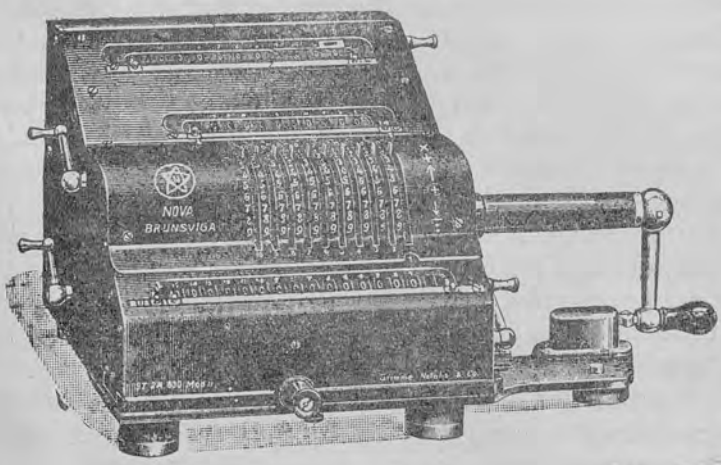
1.º *Operaciones directas de suma y multiplicación.*—Se marcan por medio de las teclas o palancas el sumando o el multiplicando y colocado el carro en el lugar en que deban aparecer la suma o producto, según las cifras que haya de tener éste, se imprime el movimiento del transmisor por medio de una vuelta de la manivela y el sumando queda incorporado a la cantidad que ya figurase en el carro a la vez que en otra parte del mismo carro aparece el número 1 como señal de haber sido incorporado un sumando, y si hubiere más sumandos

se repite la operación las veces necesarias obteniendo en un lado del carro la suma y en el otro el número de sumandos.

Cuando se trata de multiplicar, una vez señalado el multiplicando en el marcador y colocado el carro se dan tantas vueltas a la manivela motora como unidades tenga la cifra del multiplicador y aparece el producto parcial en una parte del carro y la cifra en la otra, corriendo luego el carro un lugar hacia la parte correspondiente se repite el movimiento de la manivela tantas veces como unidades tenga la segunda cifra del multiplicador, cifra que aparece al lado de la anterior a la vez que la otra parte del carro indica la suma de ambos productos parciales y siguiendo con la tercera cifra como se hizo para la segunda y así sucesivamente, se tiene en una parte del carro el producto y en la otra el multiplicador y de esta forma los tres elementos de la multiplicación están a la vista, respectivamente el multiplicando en el marcador, el multiplicador en el contador de revoluciones y el producto en el indicador de resultados.

En las máquinas de palancas giratorias, o sea los aritmómetros verticales siempre debe girarse la manivela en el sentido de las agujas de un reloj sin precisarse cuidado especial ninguno, mientras que en las otras dos clases, aritmómetros horizontales, debe ponerse una palanca especial en el lugar que sirva para las operaciones directas, o combinar las palancas o teclas de sumar o multiplicar que por estar indicado en las mismas teclas no precisan instrucción especial.

2.º *Operaciones inversas de resta y división.*—En ellas se coloca en el marcador y se pasa al indicador de resultados el minuendo o dividendo en la forma que se pasa el primer sumando, e inmediatamente debe reducirse a cero el contador de revoluciones. Después se marca el sustraendo o divisor que quedará rebajado del anterior mediante una vuelta de la manivela efectuada en sentido inverso al de la suma cuando sea un aritmómetro vertical; pero si la máquina fuere horizontal entonces antes de mover el transmisor deben haber sido colocadas las palancas en el punto de las operaciones inversas o bajadas las teclas especiales de resta directa y de división, moviendo siempre el transmisor en el mismo sentido que para la suma. Hecho este movimiento en un sentido o en otro se-



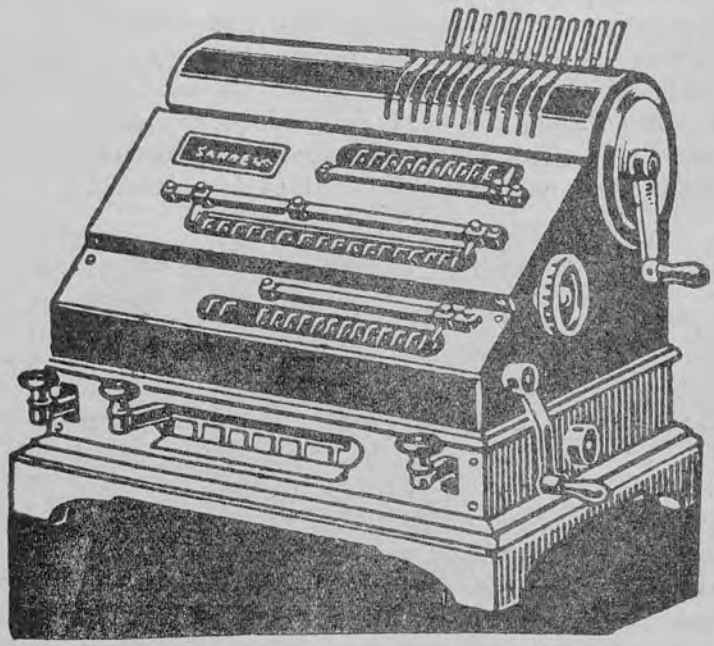


Fig. 25 y 26. Aritmómetros de resultados múltiples.

gún la clase de máquina, se tiene en el contador la cifra del cociente y en el indicador de resultados el resíduo, y corriendo el carro un lugar hacia la izquierda se puede efectuar de nuevo el movimiento de la manivela motora y obtener la segunda cifra y el segundo resíduo en forma semejante al primero, repitiendo la operación hasta que el carro haya llegado al final de su movimiento o se haya obtenido cero de resíduo.

3.° *Repetición de operaciones.* – Los modelos modernos de aritmómetros tienen en relación con el carro una parte fija a la que pueden transmitirse íntegramente como un sumando las cantidades que haya en el indicador de resultados del carro, con objeto de que sean conservados para sumarse con nuevos resultados de otra operación y según que esa transmisión se haga por el movimiento de suma o por el de resta así en esta parte de resultados reservados se tendrá el total o una diferencia, pudiendo ser utilizada la máquina para la formación de facturas o estados que necesiten hacer sumas parciales y totales en forma semejante a como se puede obtener en los contómetros con las teclas de total y subtotal.

Tienen este mecanismo las máquinas de diversas marcas, de cualquier especie de las indicadas como son las de la figura 25 y 26 en cualquiera de las cuales puede efectuarse el ejemplo que sigue obteniendo sucesivamente en los mecanismos los resultados que indica cada cantidad del ejemplo.

486,25	×	327	=	159003,75	159003,75
127,05	×	218	=	27696,90	186700,65
358,37	×	177	=	63431,49	250132,14
— 38,36	×	45	=	1726,20	248405,94
		33%	=	81973,96	330379,90
		15%	=	49556,98	379936,88
		— 7%	=	26595,58	353341,30

4.° *Funcionamiento eléctrico.* – Los aritmómetros de marcador de teclas o de palancas deslizantes pueden ser accionados por medio de la electricidad, oprimiendo un botón del mecanismo que imprime el movimiento a los ejes de la máquina cual lo hiciera la manivela impulsora, unas veces en forma ilimitada del número de giros de la manivela, como sucede

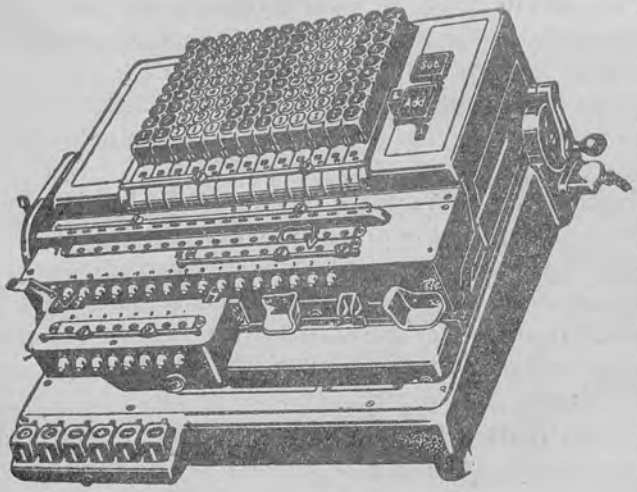


Fig. 27. Aritmómetro de funcionamiento eléctrico total.

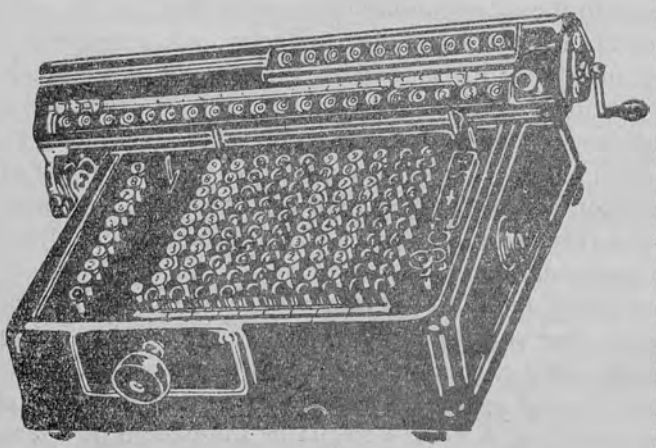


Fig. 28. Aritmómetro eléctrico con mando numérico.

con el modelo de la fig 27, y otras oprimiendo uno de los botones numerados de uno a diez que tiene el aparato, según aparecen en la parte izquierda del modelo de la fig. 28, con la ventaja en este segundo caso de que la máquina se detiene cuando se hayan efectuado el número de revoluciones que indica la tecla oprimida.

El resto de las operaciones de manejo de la máquina para determinar la operación que debe ser ejecutada, marcar, etcétera, son esencialmente idénticas y si acaso sólo es el movimiento del carro el que se efectúa eléctricamente, o la transmisión del resultado al mecanismo reservador si es que tiene este perfeccionamiento la máquina.

88.—Multiplicadoras directas.—Aunque las máquinas eléctricas que efectúan la multiplicación y división para cada cifra del multiplicador o para obtener la del cociente son casi del cálculo directo aparentemente, es lo cierto que siempre la multiplicación queda hecha por repetición de sumas y la división por repetición de restas, y las que ahora examinamos hacen la multiplicación por un sólo movimiento del mecanismo. Son de dos clases; una muda que además hace la multiplicación por una sola cifra y otra escribiente que multiplica por cualquier número de cifras en ambos factores, por lo que las examinamos separadamente.

La multiplicadora muda directa es la de la fig. 29, en la que se ve en el centro el marcador de teclas, a la izquierda las cifras del multiplicador, en la parte inferior el carro con sus dos líneas de cifras, de uso conocido, y en la parte superior el mecanismo reservador que puede no poseer la máquina, y en la parte derecha dos ranuras curvas de las que la inferior señala la operación aritmética que debe ser efectuada, la superior la unión del resultado de la operación con la cantidad del mecanismo reservador.

Para hacer funcionar la máquina se marca el dividendo o minuendo, que son pasados al carro como en las máquinas ordinarias antes examinadas, después se marca el sustraendo o divisor, y si es operación directa el multiplicando o sumando, colocando en la parte derecha la indicación de operación que debe ser efectuada y en la parte izquierda la cifra del co-

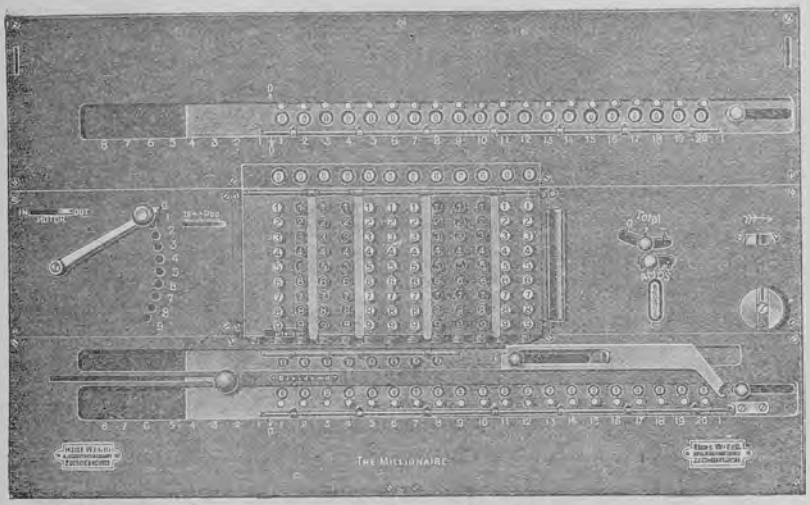


Fig. 29. Multiplicadora directa muda.

ciente o del multiplicador, y ya bastará que se dé una vuelta a la manivela impulsora del aparato, o se establezca la corriente si es eléctrica como el modelo, para que en el carro se obtenga el resultado, y el producto de la multiplicación o la suma o resta puede a la vez ser transmitida al mecanismo reservador sumando o restando de la que ya hubiera según se haya señalado en la parte derecha del aparato.

La multiplicadora directa escribiente que aparece en la fig. 30 es en su aspecto exterior el de una máquina sumadora doble de teclado completo, con teclas de mando semejantes a las de estas máquinas para imprimer totales, subtotales, y dejar de imprimir o de sumar, o bien restar o repetir operaciones.

El funcionamiento es sumamente sencillo, pues basta escribir en un teclado el multiplicando y en el otro el multiplicador para que sin oprimir ninguna tecla de mando sea efectuada la multiplicación de ambos y escritos los datos y el resultado con sólo conectar la corriente eléctrica por medio de la barra especial, pues todos los aparatos de esta clase son accionados eléctricamente. El total de la operación queda en



Fig. 30. Multiplicadora directa escribiente.

el acumulador de la máquina como un sumando en los contómetros y como en éstos puede hacerse que las sucesivas operaciones sean unidas a las anteriores en el acumulador por medio de suma o de resta, y aún el que no se unan, según la tecla que sea oprimida, y hasta escribir la suma parcial por medio de la tecla de subtotal o la suma definitiva por la tecla total que a la vez reduce a cero el acumulador. Si hubiere de ser empleado varias veces el mismo multiplicador o el mismo divisor (la división se hace por medio de los números inversos) basta marcarle una sola vez si se oprime la tecla de repetición, y si hubiere error, otra tecla permite corregirlo.

89.—Cálculo mecánico rápido.—En las explicaciones que anteceden sobre los aparatos de cálculo, nos hemos atenido a las operaciones aritméticas principales sin indicar el uso de más artificios que los de resta y división complementaria y el de división por multiplicación del inverso; pero debemos advertir que estos aparatos son susceptibles de utilizarse con todos los artificios y procedimientos rápidos que estudia la Estenoritmia, combinando las operaciones por

descomposiciones sumatorias y factoriales de los datos, valiéndose de reglas abreviadas, cuales las de Oughtred, Guy y Wantzel con resultados de aproximación preestablecida, y con ello siempre se tendrá la seguridad de no existir equivocaciones de cálculo y además una mayor rapidez en obtener los resultados, dando a estos aparatos una serie de combinaciones innumerables que aumentan su utilidad y que el lector deseoso de conocerlos podrá hallar en las monografías especiales de aplicación del cálculo mecánico al trabajo de oficina y en las revistas de Organización administrativa, de todas las cuales hallará buenas citas en nuestra bibliografía.

REGLA DE CÁLCULO

90.—Definición y fundamento.—Es una combinación del cálculo gráfico y de los logaritmos, dispuesta en forma de aparato que permita variar las lecturas según la operación que haya de ser efectuada.

Esencialmente todas las reglas de cálculo consisten en dos escalas logarítmicas, idénticas a las del eje de ordenadas de los diagramas logarítmicos (**71**) y dispuestas en forma que puedan deslizar una sobre otra de forma que se haga posible la coincidencia de dos cualesquiera puntos de las dos escalas. Esta coincidencia y la seguridad de ella, se consigue marcando ambas escalas en los bordes de contacto de dos reglas que pueden deslizar una sobre otra y permanecer paradas en el punto que se desea.

En virtud de la proporcionalidad que debe existir entre cada dos divisiones consecutivas de la escala logarítmica (**71**) si ponemos el punto 1 de una de las reglas enfrentado con el punto m de la otra, los números m_x de esta segunda escala que se hallan enfrentados con los n_x de la primera en el borde común serán tales que siempre se tenga

$$\frac{m}{1}=\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3}=\ldots\ldots=\frac{m_x}{n_x}$$

explicando esta relación constante el que las primeras reglas de cálculo fueran llamadas reglas de proporciones.

Poniendo en evidencia la propiedad fundamental de las proporciones se tendrá que siempre un punto cualquiera m_x

tiene un valor numérico igual al producto del punto que enfrenta con el 1 de la otra escala y el que coincide con m_x, o sea

$$m_x = mn_x$$

y la distancia de la escala de la regla de los m_x medida desde el origen de la misma escala, que es siempre 1, será la suma de las dos distancias m y n_x con lo cual vemos que la suma de distancias en la regla equivale a la multiplicación de los números que corresponden a las divisiones examinadas, propiedad ésta que es la misma regla de multiplicar por medio de los logaritmos. Consideraciones iguales nos llevarían a deducir reglas semejantes para las operaciones de dividir, potenciación y radicación.

Las reglas de cálculo se construyen de multitud de modelos, la mayoría de los cuales está destinado a cálculos especiales, según la profesión del que haya de utilizarla, teniendo así reglas para electricistas, químicos, etc., por lo que debemos limitarnos a describir ligeramente los modelos llamados ordinario y mercantil.

91.—Reglas ordinarias.—En una regla de cálculo deben considerarse las partes siguientes: *cara anterior* que constituye la verdadera regla porque en toda ella están las escalas logarítmicas sobre que se han de efectuar los cálculos; *cara posterior*, que pueden ser completamente lisa y que en la mayoría de los modelos contiene tablas o fórmulas útiles a la profesión a que se destine o al calculista en general; *cara lateral superior*, que suele contener una escala de centímetros y hallarse en forma biselada, y *cara lateral inferior* sin indicación ni forma especial.

Debiendo ser la regla de al menos dos escalas que se puedan enfrentar entre sí en varios puntos, se hace necesario la existencia de dos reglas en una, que respectivamente se denominan parte *fija* y *corredera* o *reglilla* y que en la fig. 31 página 119 son: AB la corredera y lo demás la fija, apreciándose además en el grabado un índice P que desliza sobre toda la regla para facilitar la lectura de ella tanto por el aumento que produce sobre las divisiones de la regla como por la línea que

atraviesa dicho índice y que debe coincidir con la división a que la lectura se refiera.

Examinando la cara anterior se considera dividida en dos mitades por el centro de la corredera teniendo siempre en cada una de estas dos partes escalas dobles idénticas de las cuales una está en la parte fija y la otra en la móvil, escalas que es de uso hacerlas diferentes y así en el modelo del grabado la inferior es la escala de números, *EN*, o escala logarítmica simple, y la superior *CD* es la escala de cuadrados. Además la reglilla lleva en su reverso otras tres escalas que respectivamente corresponden a los senos, logaritmos y tangentes, por lo que suelen estar marcadas con las iniciales *S*, *L* y *T*.

Debe considerarse todavía otra parte en la regla, que no aparece en el grabado porque se trata del fondo de la acanaladura de la regla fija por donde desliza la reglilla, y en el que algún modelo lleva índices y marcas también constantes y fijas.

92.—Reglas mercantiles. -Hay varios modelos especialmente adaptados para el uso de las oficinas de negocios (Merchants Slide Rule) en la que se han suprimido las escalas que son de cálculos técnicos y de ingeniería, para sustituirlas por otras que facilitan y simplifican los cálculos de multiplicación y división, que son los que en resumen son de necesidad frecuente en el trabajo de oficina.

La regla mercantil tiene escalas en las dos caras, anterior y posterior, que son *A* y *B* de la fig. 32, pág. 119, designando las escalas por medio de letras, con objeto de establecer la relación y correspondencia de las de una cara con las de otra. La reglilla de este modelo tiene la particularidad de que en la cara posterior *B*, la escala está señalada en orden inverso al que debe corresponder en la regla fija, para los casos en que las reglas ordinarias sería precisa la inversión de la corredera o reglilla. El índice de este modelo es de doble vidrio por necesitarse la lectura simultánea de ambas caras.

Otro modelo que puede ser muy útil para usos mercantiles es el de Lalanne, y el de Nestler que tiene en el anverso la escala de las reglas ordinarias y la trigonométrica y en escala ordinaria tiene señalados factores constantes y densidades y equivalencias de medidas.

93.- Cuadrantes, regillas y cilindros de Cálculo.— Todos son disposiciones especiales de estos instrumentos de cálculo, para aumentar las posibilidades de obtención de resultados a la vez que se consigue en éstos una mayor aproximación por el aumento de las dimensiones de las escalas, ya que siendo todas las reglas aparatos de resultados doblemente aproximados deben procurarse eliminar al menos algunas causas de error. En efecto, todo cálculo logarítmico es aproximado porque se efectúa con cantidades aproximadas y números inconmensurables, y además en las reglas es necesario leer los resultados apreciando a ojo alguna parte de división, lo que da nuevo motivo de error.

Los cuadrantes o círculos de cálculo son las mismas reglas dispuestas en forma de dos círculos concéntricos que pueden girar uno sobre otro y que tienen las escalas marcadas en las circunferencias de contacto.

Las regillas son varias reglas unidas entre sí dejando espacios iguales que pueden ser ocupados por una u otra corredera o reglilla, para dar mayores dimensiones al aparato, y los cilindros son las mismas regillas en que se ha dispuesto las reglas que la forman, no en plano, como está en ellas sino en forma de dos cilindros que además de girar uno sobre otro pueden deslizar para hacer coincidir todas las escalas posibles y en cualquier punto de la longitud de cada una.

Esencialmente estas disposiciones pueden tener en sí reglas de todas las clases y en consecuencia las operaciones en ellos son las mismas que las de las reglas, por lo que no entramos en más detalles para no hacer demasiado extenso nuestro trabajo, que repetimos tiene sólo un carácter de aplicación mercantil de matemáticas elementales.

94.—Cálculos con reglas.—Por las mismas razones antes indicadas de salirse de los límites de un libro de Cálculo Comercial, no examinaremos aquí todas las operaciones que pueden hacerse con las reglas de cálculo, sino únicamente las principales con vista especial a esa regla mercantil de que antes hemos hablado aunque refiriéndonos en lo posible al modelo ordinario a fin de que pueda servir de iniciación a nuestros lectores sobre estas materias.

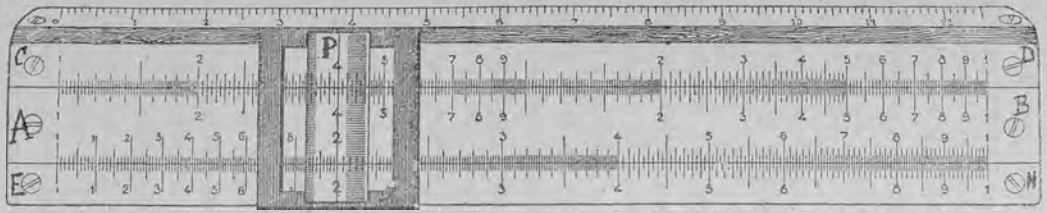


Fig. 31. Regla de cálculo ordinaria.

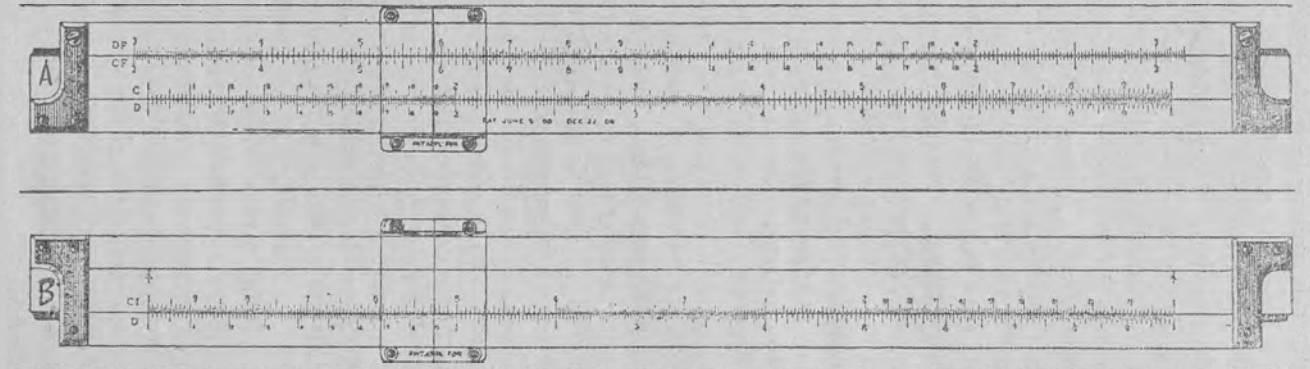


Fig. 32. Regla mercantil de cálculo

Antes de aplicar la regla deberemos estar ciertos de que no existen términos que deban ser calculados o reducidos por separado, y en tal caso efectuaremos estos cálculos separados que de una manera general han de ser: sumas y restas; elevación a potencias que no puedan hallarse directamente por la regla ni aún con descomposición sumatoria del exponente; cálculo de logaritmos o antilogaritmos que deban intervenir como factores, y en general todas las precisas para dejar la expresión matemática reducida a las posibilidades de la regla, según el modelo de que se trate, y que referido a la regla mercantil serán factores y divisores simples.

Para utilizar estos instrumentos deben tenerse siempre presente que las graduaciones de las reglas no son medidas de longitud, sino que representan cifras numéricas, y que el primer cuidado del que ha de aprender el manejo es aprender a leer las graduaciones en números de cifras indeterminadas, para lo cual en las escalas que se hallan dispuestas de izquierda a derecha, que son la generalidad, se lee la cifra que figure en la división principal a la izquierda del resultado, a continuación de esta cifra se considera escrita la que corresponda a la división secundaria, luego la cifra de la división terciaria, y así sucesivamente si es que hubiera más de tres clases de divisiones, y a partir de la última clase de división se aprecia a ojo el espacio correspondiente. En el número así leído se pone la coma de decimales en el lugar que corresponda o se añaden ceros a su derecha, según los datos del problema, porque los números correspondientes a los logaritmos pueden ser diferentes entre sí, para el mismo logaritmo, en el producto de dicho número por potencias positivas o negativas de diez. Así si nos fijamos en la escala *DF* de la fig. 34 apreciaremos que guiados por el índice de la regla mercantil que representa, encontramos el número 222 al leer la división principal de la izquierda y las otras dos divisiones inmediatas a la línea capilar del índice, y apreciado a ojo el espacio entre las otras dos divisiones vemos que es algo mayor de la mitad por lo que podremos poner la cifra 7 y así el número que leeríamos sería 2227 al que podríamos dar el valor de 22,27; 222700; 0,02227, y cualquier otro que tuviera las mismas cifras significativas dispuestas en el mismo orden.

95.— Operaciones sencillas.—Son los cálculos en que sólo interviene una operación aritmética.

1.° *Multiplicación.*—Ya vimos anteriormente (**90**) que la multiplicación se reduce a una suma de distancias en la escala logarítmica, para lo cual se hace coincidir el 1 de la reglilla con la división correspondiente a uno de los factores y se tendrá el resultado en la división de la parte fija que coincida con la que en la reglilla señala el otro factor. Si, por ejemplo, tratamos de hallar el producto de 24 × 35 correremos la reglilla hacia la derecha hasta hacer coincidir el 1 de la escala inferior móvil con el 24 de la escala fija y buscando en dicha

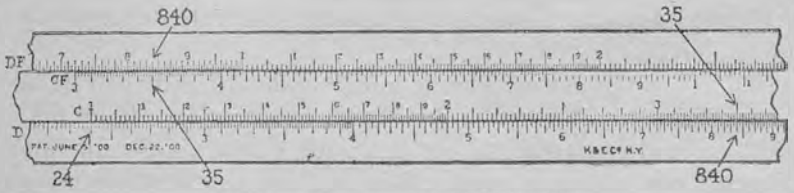


Fig. 33. Regla mercantil.—Multiplicación.

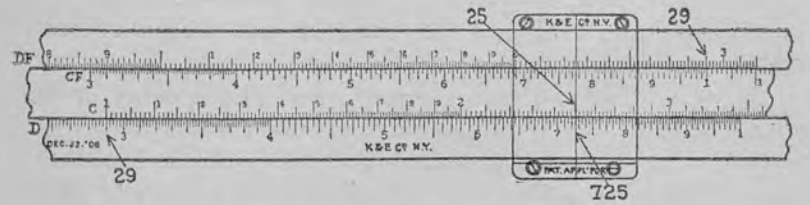


Fig. 34. Regla mercantil.—División.

escala móvil el otro factor 35 leeremos en la escala fija la división correspondiente al resultado, que es 840, como aparece en la fig. 33. Como esta figura es la reproducción de la regla mercantil, podemos apreciar que en ella el resultado puede leerse en dos puntos, porque también es simultánea la coincidencia del punto 10 de la escala *CF* con el 240 de la escala *DF*, y como los cálculos logarítmicos se hacen con las mantisas y éstas son las mismas para cualquier número multiplicado o dividido por una potencia de 10, de ahí que tengamos el resultado en las dos partes. Además esta disposición de la regla mercantil nos dice que podemos hacer coincidir el punto 10 de la escala con uno de los factores y buscar el otro hacia

la izquierda para tener en el punto de coincidencia el resultado apreciado en números diez veces menores que por el otro sistema, pero que puede ser bastante si la aproximación no exige otra cosa.

Cuando el resultado que debiera leerse hacia la derecha de las escalas en la multiplicación cae fuera de la escala fija, se hace necesario utilizar el artificio que acabamos de señalar, de partir del punto 10 de la escala móvil leyendo hacia la izquierda, para lo cual se hace necesario deslizar la reglilla en los modelos ordinarios hacia la izquierda; pero que en el modelo mercantil por traspaso a la escala de la parte superior acabamos de ver que siempre es posible la lectura de izquierda hacia derecha.

2.° *División.*—Para ello se hacen coincidir el divisor de la escala móvil inferior con el dividendo en la escala inferior fija, y entonces el cociente está en el punto de la escala fija que coincide con el 1 de la escala de la reglilla, como puede verse en la figura 34 en la que además aparece el cociente en la escala superior coincidiendo con el punto 10 de la escala *CF*, para un ejemplo de dividir 725 entre 25, que dá un cociente de 29.

3.° *Cuadrados y raíces cuadradas* —Para estas operaciones se utiliza la combinación de las dos escalas de la regla ordinaria fig. 31 haciendo coincidir el índice con la base de la potencia en la escala inferior, ese mismo índice señala en la escala superior el cuadrado que se busca, como aparece en la figura para el cuadrado de 2. Para extraer la raíz se hace coincidir la línea del índice con el radicando en la escala superior y esa misma línea del índice señala en la escala inferior la raíz buscada.

96. – Operaciones combinadas. – Se efectúan multiplicaciones y divisiones combinadas siguiendo un orden cualquiera ayudados del índice cursor del aparato sin cuidarse de leer los resultados hasta el final de todas las operaciones, para lo cual el resultado de la primera multiplicación se obtiene haciendo coincidir la línea del índice con dicho resultado y luego con la línea de dicho índice se hace coincidir de nuevo el uno de la escala móvil o el 10, según se haya de hacer la segunda o sucesiva multiplicación corriendo el índice hasta el

nuevo resultado, haciendo coincidir con dicho índice otra vez el uno de la escala si se trata de multiplicación o el divisor si es división la operación correspondiente, corriendo de nuevo el índice al resultado y repitiendo estas coincidencias de la línea del índice y los cambios de lugar hasta llegar al último resultado que es el que debe leerse, determinando luego las cifras de este resultado por la norma ordinaria del número de cifras de un producto o cociente según las que tienen los datos. Si hubiéramos de efectuar la operación

$$\frac{45 \times 36 \times 28 \times 64}{24 \times 23 \times 49}$$

valiéndonos de la regla ordinaria, empezaríamos por hacer coincidir el uno de la corredera con el 45 de la escala inferior; pasaríamos el índice a la división 36 de la escala móvil, con la línea del índice hacemos coincidir de nuevo el 1 de la escala móvil, corriendo el índice hasta la división correspondiente al número 28, y como ya haciendo coincidir con este resultado el número 1 de la reglilla el nuevo resultado se sale de la regla fija, debiéramos hacer coincidir con la línea del índice en esta segunda posición el final de la reglilla y buscar hacia la izquierda el otro factor 64, y como ya se terminaron las multiplicaciones empezamos las divisiones haciendo coincidir con la línea del índice cursor el divisor 24 para correr este índice hasta el uno de la escala de la reglilla o hasta el 10 según sea uno u otro el que cae dentro de la regla fija, se hace coincidir otra vez el nuevo divisor 23 en la escala de la corredera con el índice y se corre éste hasta el uno de la reglilla, en cuya posición se vuelve a poner frente a dicho índice el último divisor 49 y ya frente al 1 de la regla móvil tenemos el resultado pedido que leeremos en la forma antes indicada.

Si las operaciones combinadas hubieran de efectuarse por medio de la regla mercantil entran en juego las tres escalas para facilitar el resultado con pocos movimientos del índice y en consecuencia con también pocos de la reglilla. Para ello veamos algunos ejemplos.

Si tratásemos de efectuar la operación

$$\frac{24 \times 35}{6} = 140$$

para ello el 6 de la escala *C* se hace coincidir con el 24 de la escala *D*, en la cual frente al 35 de la escala *C* se halla el resultado de 140. Esto se hallaría igual con la regla ordinaria.

En el caso de ser tres factores como por ejemplo

$$37 \times 15 \times 74$$

en la cara posterior en la escala *CI* se toma el 35 que se hace coincidir con el 15 de la escala *D* y al volver la regla tendremos en la escala *DF* el resultado frente al otro factor 74 de la escala *CF*, operación que en la regla ordinaria exigiría más de un movimiento de la reglilla.

Por fin en el caso de los cuatro factores y tres divisores antes indicado para resolver con la regla ordinaria que exigía seis operaciones de las cuales sólo una es posible reducir, cuando nos valemos de la regla mercantil exige sólo las siguientes:

Se hace coincidir el divisor primero 24 de la escala *C* con el dividendo primero 45 de la escala *D* y correremos el índice para que coincida con el segundo factor 36, de la escala *CF*, moviendo la reglilla para que con este índice coincida el segundo divisor 23 de la misma escala *CF*, se pasa el índice a la división del tercer factor de la misma escala 28, y se corre de nuevo la reglilla para que coincida el último divisor 49 con el índice, y entonces opuesto al último factor 64 de la escala *CF* se hallará el resultado en la escala *DF*, con lo cual los movimientos de la reglilla son mucho menores que por la ordinaria y de menor amplitud debido al transporte de una a otra escala.

Cálculos especiales.—Las reglas de cálculo de aplicación a determinadas actividades todas permiten efectuar las operaciones especiales con una sola colocación de la regleta, y así sucede con las reglas especiales mercantiles que antes hemos indicado. Estas operaciones por ser las que hemos de ir estudiando en esta obra serán indicadas en los lugares correspondientes.

VI

METROLOGÍA GENERAL

97.—Metrología.—Sistemas de medidas.—La *Metrología* es la parte de las matemáticas que trata del estudio de todas las unidades empleadas en la medición de cantidades, y teniendo presente que las cantidades medidas pueden referirse a especies diferentes, llamaremos *Sistema de medidas* al conjunto armónico de unidades que sirvan para todas las mediciones.

Desde hace ya mucho tiempo se intenta llegar a la obtención de un sistema de medidas universal fácilmente adaptable al sistema de numeración, sin que hasta la fecha haya tenido éxito este proyecto a pesar de que existe un sistema (el llamado métrico decimal) que reune esta última condición, si bien sea éste casi universalmente usado; pero como los países que tienen la supremacía del comercio mundial no le han hecho obligatorio se hace preciso conocer los sistemas de estos países para las necesidades mercantiles tanto como el propio sistema decimal.

98.—Clases de medidas.—Las unidades que comprenda cada sistema han de ser forzosamente tantas cuantas fueren las clases que pueda afectar la cantidad, prescindiendo ahora de enumerarlas porque ninguna utilidad reportaría esta enumeración, además de que la verdadera clasificación de las medidas ha de ser en *medidas de cuenta* y *medidas efectivas*.

Las medidas de la primera clase son aquellas que se emplean en los cálculos y en el lenguaje, sin que sea preciso que tengan existencia material; al paso que las segundas son las que materialmente existen aun cuando no se empleen siempre para los cálculos

El que las medidas efectivas no siempre se empleen en los cálculos, tiene por causa el que éstos se efectúan a base de unidades fundamentales para cada clase de cantidades y las medidas efectivas son múltiplos o submúlti-

plos de éstas, adaptados a la necesidad material de la medición, sin tener para nada en cuenta si las operaciones aritméticas quedarán más o menos facilitadas.

99. — Sistema métrico decimal. — Este sistema comprende las unidades de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso, sirviendo de base para las de otra especie, que no pocas veces se incluyen como formando parte del mismo sistema.

El fundamento del sistema es la longitud llamada *metro*, equivalente a poco menos de la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre, y prácticamente consiste en la longitud del modelo internacional construído de platino e iridio cuando se estableció el sistema y conservado en París, del cual son copia los modelos que posee cada país.

La elementalidad de conocimiento que representa el detalle de este sistema, para todos los países de habla española, hace que nos limitemos a dar un resumen de sus unidades y aplicaciones en la *tabla* **III**.

El uso de este sistema, es universal, obligatorio en casi todos los países civilizados, facultativo o autorizado en los demás; pero aún en los de carácter obligatorio se emplean otros sistemas que estudiamos a continuación.

100. — Unidades efectivas métricas. — Son los objetos materiales que se utilizan directamente en la medición, construídas de una materia que las haga lo menos alterables posible y cuya forma exterior facilite su manejo.

Para que la materia sea poco alterable se emplean maderas duras, o metales, teniendo cuidado que éstos últimos no ejerzan acción química sobre las sustancias que con ellos se pongan en contacto en la medición, y así en las medidas de capacidad para líquidos se utiliza la hojalata o el zinc recubierto de estaño, y en cuanto a la forma varía según la naturaleza de las unidades de cuenta a que se refieran las efectivas.

Las unidades que se construyen en cada clase siempre son la unidad de cuenta, ya sea la principal o cualquiera de sus múltiplos y submúltiplos, y además el doble y la mitad de dicha unidad de cuenta, y así en las unidades de capacidad las correspondientes al decálitro en unidades efectivas serán el doble decálitro, el decálitro y el medio decálitro, con lo cual basta conocer la unidad mayor y la menor que se

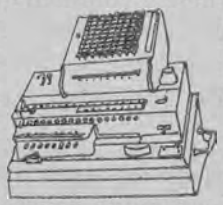
construyen para saber cuáles son las intermedias, en cuya forma aparecen en la *tabla* **IV**.

101.—Sistema español antiguo.—Aunque el uso del sistema métrico en España es obligatorio es conveniente el conocimiento de las medidas que se emplearon antiguamente, tanto por el uso que de ellas se hace todavía en algunos casos, cuanto porque las adoptadas como principales de Castilla se emplean en muchas repúblicas americanas. Estas medidas de Castilla son las adoptadas como legales para toda España por Pragmática de 26 de enero de 1801, señaladas en la *tabla* **V**.

102.—Sistemas regionales españoles.—Antes de establecerse como legal en España el sistema general llamado de Castilla, antes indicado, tenía cada región el suyo propio, que no sólo continuó utilizando sino que aún se emplea en ciertos casos, fijando los precios de mercancías en base a alguna medida de tales sistemas, por lo que se hace indispensable su conocimiento, y para ello formamos con estos sistemas la *tabla* **VI**, por regiones y provincias de cada una, pero sólo en aquellas medidas que son diferentes de las castellanas, y suprimiendo las de superficie y volumen que corresponden exactamente a la segunda y tercera potencia de las respectivas lineales del propio sistema. Resulta, pues, que las medidas que falten en la tabla deberán ser halladas en la de medidas castellanas.

103.—Sistemas hispano americanos.—Los países de América han tenido de un modo general el sistema de pesas y medidas de sus colonizadores, por cuya causa los países de habla española adoptaron el sistema legal de Castilla *(tabla* V), aunque introduciendo modificaciones insignificantes o conservando algunas otras medidas distintas, por lo que basta conocer esas diferencias con el sistema castellano para las necesidades comerciales, habida cuenta de que aún son empleadas esas medidas antiguas a pesar de ser en todos estos países legal y obligatorio el sistema métrico decimal. La *tabla* **VII** contiene esas medidas que difieren de las castellanas, a cuyo sistema acudirá el lector que quiera conocer completamente los americanos.

104. – Sistemas extranjeros. – Todos los países han tenido sus sistemas de pesas y medidas que son empleados hoy mismo, ya con carácter de casi exclusividad o bien influenciados por el desarrollo del sistema métrico y por el de los países de la preponderancia mercantil, por lo que el estudio metrológico ha de comprender estos sistemas de todo el mundo en forma semejante a lo hecho antes con los de España y pueblos hermanos, para atender así a las necesidades de las transacciones mercantiles, dando nosotros estos sistemas en detalle en la *tabla* **VIII**.



VII

METROLOGÍA CRONOLÓGICA

105.—Unidades principales de tiempo.—De todas las unidades que no se incluyen en los sistemas de medidas, las de empleo más general son las de tiempo, si bien la medición de las cantidades de tiempo ofrece particularidades que en la práctica queda reducida al empleo del calendario.

Para los calendarios las *unidades principales* de tiempo son el año y el día, las dos *de fundamento natural* basado en los movimientos de la Tierra y como de estos dos movimientos el de duración más uniforme es el de rotación, de aquí que la *unidad principal del tiempo* sea *el día*.

El día puede ser solar, sidéreo o civil. El *día solar* es el transcurso de tiempo que media entre dos pases consecutivos del Sol por el mismo meridiano terrestre; el *día sidéreo* es ese mismo transcurso referido a una estrella en vez de serlo al Sol, y que por consiguiente su empleo es sólo interesante en Astronomía; el *día civil* es el día solar medio calculado para hacer uniforme el tiempo del día solar y poder referir mejor el transcurso de varios días y comparar unos con otros los momentos de días diferentes.

El año también puede ser considerado de las mismas tres especies, y entonces será *año solar* el tiempo que emplea la Tierra en recorrer toda su órbita, y por el hecho de que el punto de partida y término de este recorrido sea muchas veces la coincidencia de la situación aparente del Sol sobre los trópicos, se llama *tropical* al año solar; el *año sidéreo* es el tiempo que tarda la tierra en colocarse en igual posición relativa respecto a una estrella, y lo mismo que el día su empleo es propio de la Astronomía. Estos dos años son de duración fraccionaria con relación al día, y por ello se ha establecido

convencionalmente el *año civil* que es un número exacto de días variable según el sistema de calendario que se adopte.

La duración de un año solar es de 365,24221679..... días, y la duraión del año sidéreo es de 365,2549769..... días.

106.—Unidades secundarias de tiempo. Son los múltiplos y submúltiplos de las dos unidades principales, si bien ya referidas a la adaptación civil de ambas, naciendo las tres categorías de unidades que indicamos a continuación.

MÚLTIPLOS DEL AÑO.—Son el siglo, de 100 años; decenio, de 10 años; lustro o quinquenio, de 5 años; trienio, de 3 años; y bienio, de 2 años.

SUBDIVISIONARIAS DEL AÑO.—MÚLTIPLOS DEL DÍA.—Son el mes, que según el calendario es la dozava o treceava parte del año, y que se compone de un número variable de días; la semana, de 7 días; y derivadas de ellas la quincena, o medio mes; y la decena, de 10 días.

Además como múltiplo del día se tiene el año común y el año bisiesto, que también varían según los calendarios.

SUBDIVISIONARIAS DEL DÍA.—Son las más fijas en todo el mundo por ser adaptación convencional hecha por el hombre y así resulta el día dividido en 24 horas; la hora en 60 minutos, y el minuto en 60 segundos, y ésta última en décimas o centésimas según las necesidades.

107.—Unidades auxiliares.—Llamamos así las divisiones del tiempo que se utilizan en los cálculos relacionados con los calendarios, basadas en los movimientos de la luna y que son:

Ciclo lunar, período al cabo del cual se repiten las mismas fases de la luna en iguales días del año, que referido especialmente al año civil más generalizado (de 365 días en año común) es aproximadamente de 19 años, con un error tan pequeño que se desprecia en la práctica.

Número áureo, es el que en cada año indica los que van transcurridos del ciclo lunar antes definido.

Edad de la luna, o número de días que van transcurridos desde el en que tuvo lugar el último novilunio.

Epacta, que es la edad de la luna el día primero de cada año.

108.—Problemas que origina la división del tiempo.—Deben ser considerados los problemas de las unidades del tiempo por un lado como las de cualesquiera otras de medida en cuanto que son números y como tales será examinados con las de las demás medidas; pero a la vez la falta de divisiones exactas de unas divisiones a otras y el distinto número que sirve para indicar un mismo momento en puntos diferentes de la Tierra hacen que se tengan dos especies de problemas especialísimos en la determinación del tiempo y que revisten no pequeña importancia en el comercio.

Son estos problemas el conocimiento de la hora que corresponde a un lugar determinado de la Tierra cuando se conoce el de otra parte y el saber si cierto día será festivo, el primero para apreciar si será posible que una orden llegue a su destino dentro de la limitación de tiempo en que pueden efectuarse ciertas operaciones mercantiles, cuales contrataciones en Bolsas, por ejemplo, y el segundo para saber también si será posible que se efectúen operaciones en la fecha en cuestión.

Además de estos dos problemas son especialísimos los auxiliares de ellos para los números de unidades de esta última clase.

Para la resolución de los problemas relativos a días determinados ha de tenerse presente siempre el calendario a que se refieren pues que de ese mismo calendario depende no sólo la especie de fiestas sinó también su distribución en el año y el número que en cada año indica el mismo día.

109.—Horas legales mundiales.—*Hora legal es la adoptada por cada país con relación a un punto o meridiano tipo para unificar los servicios oficiales.*

Dividido el día en 24 horas que corresponden al movimiento real de la Tierra sobre su eje y al aparente del Sol alrededor de la Tierra, en cualquiera de estos dos casos por cada día resulta recorrido un círculo, en el primero por un punto de la Tierra y en el segundo por el Sol, y dividida la circunferencia en 360 partes iguales o grados se tiene que por cada

$$360 : 24 = 15 \text{ grados}$$

corresponde una hora de tiempo.

A los efectos de fijar exactamente la relación entre horas de diferentes puntos de la Tierra se considera dividida ésta en partes o husos de 15 grados cada uno atribuyendo la misma hora a todos los países comprendidos en cada uno, y tomando como hora para cada huso la que corresponda al meridiano que pase por el centro del mismo; sistema horario que ha sido aceptado por la mayoría de los países civilizados, quedando para los no adaptados una hora propia también idéntica para todo el país como hora legal.

La convención internacional que estableció la división en husos horarios estableció además el sistema de numerar las horas de cada día desde el instante de la media noche, que debe escribirse 00'00, de 1 a 24 como horas cumplidas, con lo cual el primer segundo siguiente a la media noche es 00,00,01, y lo que antes se llamaba 3 de la tarde será ahora 15 horas, evitando así el añadir denominación de mañana, tarde o noche.

El punto inicial de la enumeración de las longitudes en la Tierra es el meridiano de Greenwich, y este mismo es el inicial para la división y numeración de los husos horarios. Los husos horarios y países que en ellos se hallan incluídos como también las diferencias de cada país en su hora legal con la del meridiano de Greenwich se hallan en las *tablas* **IX** y **X.**

110. - Diferencia horaria. Su cálculo.—Cuando el meridiano adoptado como tipo en un país no es el que le corresponde por el huso en que se halla incluído, se tiene una diferencia horaria fraccionaria con los que han adoptado dicho sistema, y en estos casos es necesario conocer la hora de un país exactamente cuando se conoce la del otro, como también cuando se desea saber la diferencia entre la hora legal y la natural de un país, problema este último de importancia nula en el comercio.

Este cálculo se hace a base de que cada 15 grados al Oeste disminuye una hora completa y por cada 15 grados al Este aumenta dicha hora y por cada 15 minutos se tiene una diferencia de un minuto de tiempo del mismo modo que por cada 15 segundos de longitud la diferencia de tiempo es un segundo, y así bastará dividir por 15 la longitud dada para conocer la diferencia horaria y en cuanto al signo atender a la clase de longitud.

Ejemplo: Determinar la hora que corresponderá a un punto de la Tierra situado a los 36° 18' 47" de longitud Este de Greenwich, cuando en este punto sean las 4 de la tarde (las 16 horas) 3' 9".

Dividiendo la longitud por 15 el cociente será de 2 horas, 25 minutos y 15 segundos, despreciando la fracción $^{2}/_{15}$ de segundo, con lo cual la hora pedida será la diferencia entre la de Greenwich y esa cantidad, o sea, las 13h. 37' 54".

111.—Calendario Juliano.—El calendario en la antigüedad distribuía el año civil con sólo 365 días, tomando como base de él el año solar; pero como este cómputo origina un error anual de 0,24221679.. días, a fin de establecer el acuerdo entre los años civiles y solares, dispuso el Emperador romano Julio César que se añadiese un día al año civil cada cuatro años, por tomarse entonces esa fracción como un cuarto exactamente, llevando a cabo la reforma a partir del año 46, y haciendo que el día añadido lo fuera inmediatamente seguido al *sexto calendas martias* (*) llamando a ese día *bis-sextos* y al año que lo tenía se le denominó *bisiesto*, siendo el primero de esta clase el año 48, pues que se toma siempre como año bisiesto el que sea múltiplo de cuatro.

Este calendario con un año bisiesto de cada cuatro se denomina Juliano por el nombre del Emperador, y es el que aún se utiliza por los servios en Yugoslavia y por Bulgaria.

La reforma juliana se ratificó por el Concilio de Nicea el año 325, tomando para todos los cómputos este último año como partida porque el mundo cristiano se rige por las bases acordadas en este Concilio para la determinación de las fechas de cada año, según veremos en los cálculos que luego haremos para hallar estas fechas.

112.—Calendario Gregoriano.—El error que se comete anualmente con el calendario juliano es de

$$0{,}25 - 0{,}24221679 = 0{,}00778321...$$

y como el punto de partida de los cálculos cristianos es el año 325, en tiempos del Pontífice Gregorio XIII, se apreció que tenía bastante importancia y consultados matemáticos para el

(*) Las calendas era el día primero del mes contando los días de cada uno por orden inverso desde las calendas del siguiente.

cálculo del error, y el Concilio de Trento para la posibilidad de adaptación de las bases cristianas a la realidad del año solar, se acordó la reforma que se llevó a cabo en 1582, por disposición de dicho Pontífice, que así dió su nombre al nuevo calendario.

El error que se había cometido en total en la fecha de la reforma gregoriana era de

$$(1582 - 325) \times 0{,}00778321 = 9{,}78349497 \text{ días}$$

por lo que se dispuso suprimir diez días del año de la reforma, para que el error fuera despreciable, toda vez que la diferencia estaba de sobra compensada con los errores anteriores al Concilio de Nicea, y en consecuencia el día 5 de octubre tomó la cifra 15 del mismo mes restableciendo la coincidencia del año civil y el solar. Pero como el error seguiría siendo el mismo sin reforma posterior, se vió que el error en 400 años era de $0{,}00778321 \times 400 = 3{,}113284$ días, esta nueva reforma consistió en dejar de añadir el día bisiesto a los años fin de siglo que no fueran múltiplo de cuatro, con lo cual el error cometido era de 0,113284 días cada 400 años y así el anual se reduce a 0,00028321 y sólo llega a valer un día al cabo de 3531 años.

Resulta por tanto que el calendario gregoriano divide el año en 365 días, llamándole año común, y añade un día para los años bisiestos, siendo de esta naturaleza todos los múltiplos de 4, excepto los seculares que sólo lo serán si sus centenas son múltiplos de 4

113.—Corrección del error del calendario gregoriano.—El día que hemos visto llega a valer el error del calendario gregoriano cada 3531 años, se ha acordado sea suprimido en el año bisiesto 3600 para facilitar mejor la regla de la corrección, y así según este último acuerdo dejarán de ser bisiestos los años cuyas centenas sean múltiplos de 36.

114.—Cálculo de una fecha.—El objeto de este cálculo es conocer el día de la semana que corresponde a una fecha cualquiera en los calendarios juliano y gregoriano, para lo cual distribuiremos la cuestión por partes:

1.° *Fundamentos.—A).* La era cristiana, que es la que hacen referencia los años de ambos calendarios, empezó el año siguiente al del nacimiento de Jesucristo, siendo sábado el día 1.° del año 1.

B) Siendo un año común igual a 52 semanas y un día, cada año tiene en una fecha cualquiera el día de la semana que sigue al que le correspondió en el año anterior. Tomando para los cálculos el 1.° de enero de cada año, esta regla queda modificada diciendo que el año siguiente al bisiesto el día de la semada en 1.° de enero es posterior en dos nombres al del año bisiesto.

C) Para cualquier cálculo se considera numerado cada día de la semana por una cifra que pueda ser resto de dividir por 7. Esta numeración es completamente convencional y según la que se adopte así resultará una fórmula diferente para los cálculos; pero si se tiene presente la facilidad de recordar dicha numeración será conveniente dar al Domingo la cifra 0 como de semana completa y así se tienen

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1	2	3	4	5	6	0

que es la notación más generalizada y que nosotros emplearemos.

D) El índice numérico para cada mes, será el resto de dividir por 7 los días que transcurren desde 1.° de enero a su comienzo y equivaldrá a los días de la semana que para cada mes avanzan sus fechas, y que será:

Ener.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

E) Para una fecha cualquiera del año el avance del día de la semana respecto del de 1.° de enero es la suma del índice numérico que antecede con los días de la fecha y disminuído de 1.

F) En cualquier cálculo sólo debe tomarse el resto de la división por 7, sustituyendo todo número por dicho resto, en cuantas ocasiones sea posible.

2.° *Fecha del calendario juliano.*—Debemos tomar como partida el 1.° de enero del año 0, para añadir un cambio de nombre por cada año común, dos cambios por cada año bisiesto y tantos como días sigan al de 1.° de enero, y siendo el día de partida viernes para que el comienzo de la era sea en sábado, es indudable que representando por a el número del año, por m el índice numérico del mes y por d el día

de la fecha deberá tenerse como fórmula para cualquier fecha la de

$$5 + a + \tfrac{1}{4}a + m + d - 1$$

puesto que al día inicial del cálculo le corresponde el número 5; pero como el día de aumento por cada aña bisiesto no transcurre hasta terminar febrero de los años comunes, la fórmula anterior para año bisiesto exigirá que se disminuya de 1 el resultado para enero y febrero.

Ejemplo.—Determinar el día de la semana que correspondió al 7 de abril de 1254 y el que corresponderá en Bulgaria al 19 de marzo de 1932.

Siendo el índice de abril 6, la primera fecha será el resto de dividir por 7 la suma siguiente:

$$5 + 1254 + 508 + 6 + 7 - 1 = 1559$$

que dará como resto 5 y el día propuesto fué viernes.

Para la segunda fecha, como el índice de marzo es 5, se tendría por suma básica

$$5 + 1932 + 483 + 5 + 19 - 1 = 2441$$

que dividido por 7 da de resto 5 y por tanto será viernes esa fecha.

Si hubiéramos utilizado los restos de 7 en la última suma hubiéramos tenido

$$5 + 0 + 0 + 5 + 5 - 1 = 12$$

con lo que rápidamente se ve que el día hubiera sido el quinto de la notación que es el viernes encontrado.

3.° *Fecha del calendario gregoriano.*—Para hallar esta fórmula de la suma básica del cálculo, o sea, del dividendo por 7, será conveniente separar en la fórmula anterior las centenas de las cifras de los años y llamar s a dichas centenas, con lo cual la fórmula anterior se transforma en

$$5 + 100s + \tfrac{1}{4}100s + a + \tfrac{1}{4}a + m + d - 1 =$$

$$= 5 + 100s + 25s + a + \tfrac{1}{4}a + m + d - 1$$

y siguiendo la regla de tomar los restos por 7 de cualquier cantidad podemos sustituir 125 por 6 que es su resto y convertir la fórmula en

$$5 + 6s + a + \tfrac{1}{4}a + m + d - 1$$

que es la que muchos ponen como propia del calendario juliano

Haciendo en esta última fórmula las correcciones que exige la modificación gregoriana, o sea quitando de la suma 3 por resto de los diez días suprimidos en octubre de 1582, y las tres cuartas partes de los años seculares posteriores al 1600 tendremos

$$6s + a + \tfrac{1}{4}a + m + d + 5 - 4 - \tfrac{3}{4}(s - 16) =$$

$$= 6s - \tfrac{3}{4}s + a + \tfrac{1}{4}a + m + a + 1 + 12$$

a la que cambiaremos la estructura de la operación con las centenas y sustituiremos la última suma por el resto 6, para tener como fórmula general de una fecha en el calendario gregoriano el resto de dividir por 7 la suma

$$5s + \tfrac{1}{4}s + a + \tfrac{1}{4}a + m + d + 6 =$$

$$= 5s + \tfrac{1}{4}s + a + \tfrac{1}{4}a + m + d - 1$$

y todavía si aplicamos la fórmula al siglo actual veremos que la suma de los dos primeros términos será

$$5 \times 19 + 4 = 95 + 4 = 99$$

y como su resto por 7 es 1, tendremos para cualquier fecha de nuestro siglo la suma básica de

$$a + \tfrac{1}{4}a + m + d + 1 - 1$$

Ejemplo.—Calcular el día de la semana que corresponderá al 25 de agosto de 2059, y al de 17 de mayo de 1957.

Sabemos que el número índice de agosto es 2 y tendremos para la primera fecha la suma básica de

$$5 \times 20 + 20 : 4 + 59 + 59 : 4 + 2 + 25 - 1 = 204$$

cuyo resto por 7 es 2 y el día buscado será martes.

Siendo 1 el número índice de mayo y el siglo actual la suma habrá de ser $57 + 57 : 4 + 1 + 17 = 64$ y el día de la semana buscado el primero que es el lunes.

Ejercicios **XXIII** al **XXX.**

115.—Cálculo de fiestas.—Las fiestas que pueden necesitarse conocer son de tres clases que sucesivamente vamos a indicar.

1.° Fiestas fijas, que no precisan cálculo ninguno y que dependen de la religión del país.

2.° Fiestas bancarias y bursátiles, especialmente de la última clase que son los llamados puentes o día que cae entre dos fiestas, fijas o no, como sucede con frecuencia con lunes y sábados y los sábados de la época estival en muchos países. Los puentes son días inhábiles para muchas operaciones y se calculan o determinan una vez resuelto el problema del párrafo anterior o el de las fiestas movibles.

3.° Fiestas movibles. Todas dependen de la fecha de la Pascua de Resurreción, y ésta se ha de celebrar en el primer domingo que siga al primer plenilunio de primavera, según acuerdo del concilio de Nicea que antes dijimos fijó las bases del calendario.

Las fiestas que pueden ser necesario conocer son Pentecostés que es en domingo 7 semanas después de la Pascua, Corpus Dómini que es el jueves de la semana que sigue a la de Pentecostés o sea 60 fechas después de Pascua, la Ascensión que es en jueves 5 semanas antes del Corpus, las fiestas de la semana antes de Pascua (semana Santa) que suelen ser jueves y viernes con el puente del sábado, los lunes siguientes a Pascua y Pentecostés, el domingo de Carnaval que es 7 semanas anterior al de Pascua y los dos o tres días que le siguen, y otras pocas que varían con el lugar.

116. —Cálculo de todos los domingos del año.—Basta para esto determinar el día de la semana que corresponde al 1.° de enero según la fórmula antes indicada, y de ella deducir la del domingo siguiente si ya no lo fuera el día 1.°, y añadiendo sucesivamente 7 días a esta fecha tendremos todos los domingos de enero, y si por medio de los números índices de cada mes hallamos el primer domingo de cada mes sucesivo, tendremos los restantes por la suma de 7 como en enero.

Si se deseare conocer sólo los domingos de un mes cualquiera, se aplicaría la suma del párrafo **114** al 1.° del mes propuesto y se procede en la forma indicada ahora.

Ejemplo: Hallar las fechas de domingo en enero y noviembre de 1955
El primero de enero de este año tendrá por suma básica

$$55 + 55 : 4 + 1 = 42$$

que dividido por 7 nos dice que ese día será domingo, y por tanto serán domingos de enero los días 1, 8, 15, 22 y 29, siendo el 1.° de noviembre $0 + 5 = 5$, o sea miércoles, que hace sea primer domingo el día 5 y los 12, 19 y 26 de dicho noviembre.

117. Cálculo de la Pascua.—Teniendo presente que desde 1.° de enero a igual fecha de marzo en años comunes

transcurren 59 días y que la lunación es de 29 días y medio resultan exactamente dos lunaciones, lo cual hace que la epacta sea el número que indica la edad de la luna en 1.° de enero y marzo de años comunes y en 29 de febrero en los bisiestos.

Conocida esta edad y siendo preciso para la Pascua saber la fecha del primer plenilunio de Primavera bastará restar la edad de la luna en 1.° de marzo de 15 si la edad es menor que esta cifra, y de 45 si es mayor y esta diferencia nos dirá la fecha de marzo en que tendrá lugar el primer plenilunio, habiendo de disminuir el resultado en 1 si el año es bisiesto, y si la fecha así encontrada fuere menor que 20 se añadiría una lunación para obtener la fecha del plenilunio base de la fijación de la Pascua.

Una vez obtenida esta fecha se determina el día de la semana que le corresponde y se encontrará el domingo siguiente en la forma conocida, teniendo así la fecha de la Pascua.

Este cálculo que acabamos de indicar exige el conocimiento previo de la epacta por lo que deberemos añadir que la epacta se calcula por medio del áureo número El áureo número de un año cualquiera es igual al resíduo de dividir por 19 el número del año aumentado en una unidad, y la epacta siempre es el resíduo de dividir por 30 el producto del número áureo menos uno, multiplicado por 11.

Ejemplo: Determinar la fecha de la Pascua de Resurrección del año gregoriano de 1941.

El áureo número será el resíduo de la división siguiente:

$$(1941 + 1) : 19$$

o sea 4 y de ahí hallamos para epacta, el resíduo de esta otra división

$$(4 - 1) \times 11 : 30$$

que es 3, y restando este resultado de 15 obtenemos 12 como fecha del plenilunio de marzo, y siendo todavía invierno añadimos las 30 fechas de la lunación obteniendo así por fecha del primer plenilunio de primavera la del 11 de abril.

Calculado el día de la semana de esta fecha **(114)** nos da el día 5, o sea el viernes, luego el domingo siguiente 13 de abril es la fecha de la Pascua que se trataba de hallar.

Ejercicios **XXXI** al **XL**.

118.—Calendario Perpetuo.—Se denomina así una disposición especial de las cifras de los años, meses y días que permita encontrar el de la semana que corresponde a una fecha cualquiera de cualquier año, y para

ello se disponen tablas con los restos a 7 de cada uno de los elementos que entran en el cálculo del día de la semana según antes hemos indicado o de otras fórmulas, si se empleasen otras, y combinando estos restos se llega al final pedido. Como las disposiciones de estos calendarios varían según la fórmula ponemos uno de esos modelos en la tabla **XI** en el que la primera parte es el resíduo a 7 de los elementos de la fórmula en que entra el año y los cuadros siguientes el resíduo después de intervenir los demás elementos.

119.—Calendario moderno.—Aunque todavía sólo es un proyecto, tiene gran importancia por la fijeza que da a las fechas de la Pascua y de todos los días de la semana del año el calendario moderno, propuesto por los americanos y en estudio por la Sociedad de Naciones, según el cual el año de 365 días se distribuiría en 13 meses de 28 días cada uno, o sea de 4 semanas exactas y el día sobrante se consideraría como festivo de principio o de final de año, no contando como día semanal, ni éste ni el día de los años bisiestos que de igual modo estaría entre junio y julio.

Las ventajas bajo el punto de vista de los cálculos están en la supresión de todos los que hemos examinado para días de la semana y fiestas; en la coincidencia del día semanal con igual fecha de cada mes, y en la facilidad que crea para calcular los días comprendidos entre dos fechas tan frecuentes en los cálculos del interés. Las demás ventajas son aún mayores bajo los aspectos administrativo, industrial, contable, carácter económico general y monetario, pero que no examinamos por caer fuera del objeto de este trabajo.

120.—Otros calendarios.—Sólo indicaremos aquí los calendarios hebreo y musulmán.

El *calendario hebreo* cuenta por meses alternos de 29 y 30 días, o sea por lunaciones, teniendo 12 meses el año, o 354 días, por lo que a fin de armonizar este año con el solar se tienen los años embolísticos, con un mes de esta clase, y que son 7 en cada ciclo de 19 años

El *calendario musulmán* también es de 12 meses lunares alternos de 29 y 30 días, o sea los 354 días, con uno llamado intercalar en número de 11 cada período de 30 años. La desigualdad del cómputo con la realidad de los movimientos terrestres hace que cada vez sea más dispar una fecha musulmana y la correspondiente del calendario gregoriano.

Como todos estos calendarios sólo se utilizan por pueblos atrasados prescindimos de los cálculos, que se harían en forma semejante a la utilizada antes **(114** a **117).**

VIII

METROLOGÍA ESPECIAL (*)

121.—Medidas angulares.—La medida de un ángulo se expresa por la del arco comprendido entre sus lados trazado desde el vértice como centro, existiendo dos sistemas para dividir la circunferencia en arcos que a la vez midan los ángulos.

1.° *Sistema sexagesimal.*—Pudiera llamarse sistema natural porque nace de la división de la circunferencia en 6 sextantes, obtenidos llevando sobre ella sucesivamente su radio. Cada sextante se divide en 60 partes iguales llamadas grados (abreviatura °), con lo que la circunferencia resulta dividida en 360°; cada grado a su vez en 60 minutos (abreviatura ′), cada minuto en 60 segundos (abreviatura ″) y cada segundo en décimas y centésimas, división esta última que constituye una adición al sistema sexagesimal primitivo. Un arco o ángulo en este sistema se escribiría 35°22′19″,73.

2.° *Sistema centesimal.*—Es la división moderna de adaptación al sistema de numeración y al métrico, y en él la base de la división de la circunferencia es el cuadrante, que corresponde al ángulo recto. Cada cuadrante se divide en 100 grados (abreviatura g.), con lo cual la circunferencia resulta de 400 grados centesimales, cada grado es de 100 minutos y cada minuto de 100 segundos, escribiéndose, por ejemplo, un arco o ángulo en sistema centesimal 78^{g}42′59″ o también como un sólo número decimal 78,4259$_g$.

Es de especial importancia la medida angular llamada *radian* que corresponde al ángulo cuyo arco es exactamente igual en longitud al radio de la circunferencia, y que en división sexagesimal equivale a 57°17′44,806″ o sean 63,661977$_g$ centesimales.

(*) Para el detalle de las medidas aquí indicadas consúltese la *tabla* **XII**.

122. - Unidades circulares.—Son unidades de superficie correspondientes a círculos cuyo diámetro sea la unidad de longitud, y así se tiene la pulgada circular y la milla circular y del mismo modo pudieran tenerse las demás si bien sólo se emplean esas dos del sistema inglés.

Cualquiera que sea la clase de unidad circular es siempre equivalente a 0,7854 unidades cuadradas correspondientes.

123.—Unidades mecánicas.—De todas las que existen sólo consideramos las de presión y fuerza que respectivamente son:

Presión. La unidad principal es la *atmósfera* o peso del aire que gravita sobre un punto al nivel del mar, y para presiones menores se emplea el kilogramo por centímetro cuadrado o por metro cuadrado, y en el sistema inglés la libra por pulgada o por pié cuadrado.

Fuerza. La unidad fundamental métrica es el *Kilográmetro* (Kgm.) o esfuerzo necesario para levantar un kilogramo a la altura de un metro, cuyos múltiplos son el *caballo de vapor* (H. P.) equivalente a 75 kgm., y el *poncelet*, igual a 100 kgm. ambos por segundo de tiempo.

En el sistema cegesimal la unidad fundamental es la *dina* o capacidad de comunicar a una masa de gramo una aceleración de un centímetro por segundo, que tiene por correspondiente en trabajo el *ergio*, y por múltiplo el *vatio*.

En el sistema inglés es el Horsepower (caballo de vapor) que se divide en 550 foot pounds.

124.—Unidades lumínicas.—La importancia adquirida por los sistemas de alumbrado en la organización moderna hace preciso conocer a todo hombre de negocios las unidades de luz, y especialmente aquellas que se refieren a la intensidad con que es alumbrado un objeto, que es la verdadera unidad práctica y útil.

La intensidad se mide en *bujías* que es la luz producida por una bujía de parafina de 20 milímetros de diámetro con llama de 50 milímetros de longitud. En esta clase de medida están marcadas las lámparas.

La unidad que debe considerarse como principal en la aplicación del alumbrado es el *lumen*, que es la cantidad de luz que recibe cada uno de los puntos de una esfera cuyo radio sea la unidad de longitud y en cuyo centro se halla la luz de una bujía, y que se define por el flujo luminoso emitido por una fuente lumínica de una bujía decimal y correspondiente al ángulo sólido de una unidad. Como la superficie de una esfera de radio de la unidad es de 12,566366 unidades superfi-

ciales resulta que una fuente lumínica de una bujía emite 12,566366 lúmenes, y para facilitar los cálculos es lo más frecuente expresar que cada bujía de intensidad emite 12,5 lúmenes.

Cuando la distancia de la luz al punto iluminado varía, sería necesario reducir los lúmenes en virtud de la ley de variación de intensidad inversa al cuadrado de esa distancia, habiéndose adoptado dos medidas de la cantidad de luz recibida por un objeto que respectivamente son el *lux* o unidad métrica que representa la cantidad de luz que recibe un metro cuadrado de superficie de un foco de una bujía colocado a un metro de distancia, y el *pie-bujía* o unidad inglesa que es la cantidad de luz que se recibe en un pie inglés cuadrado de un objeto que tiene a un pie de distancia un foco luminoso de una bujía.

125.—Unidades colectivas.—Son las que expresan un número de objetos simples, muy empleadas en cierta clase de comercios, siendo las que conviene conocer el par, decena, docena y veintena entre las de nombre que expresa su contenido y las de *serie* o media docena, *gruesa* o docena doble equivalente a 144 objetos, y *gran gruesa*, de 12 gruesas (docena triple) formada por 1728 objetos.

126.—Unidades termométricas.—Las unidades de esta clase no tienen valor absoluto, tomando como unidad principal el grado que es cada una de las divisiones iguales de una escala cuyos puntos inicial y final corresponden al hielo fundente y al agua hirviendo, existiendo las tres escalas siguientes.

Centígrada o *de Celsius*, cuyo cero es el punto de fusión del hielo y el 100 el de ebullición del agua; *de Reaumur* que respectivamente son el cero y 80, y *de Farenheit* en la que el grado 32 es el del hielo fundente y el 212 el de ebullición del agua.

127. Unidades especiales.—Existen multitud de unidades metrológicas que sólo son empleadas con una clase de mercancías determinada, cuyo detalle completo se haría interminable por lo que sólo hacemos una indicación resumida de algunas de estas medidas, remitiendo al lector a los estudios especiales, ya profesionales ya monográficos, de la aplicación especial de que se trate.

1.° *Líquidos hidroalcohólicos.*—La medida de la mayoría de estos productos se refiere a la cantidad de alcohol que contienen, siendo vendidos en muchísimos casos los vinos comunes en relación a dicha cantidad de alcohol; de ahí la importancia de esta medida especial que se llama *grado* y que casi siempre consiste en el tanto por ciento de alcohol que contiene el líquido, si bien existen otras graduaciones diferentes.

Para determinar el grado de un alcohol se emplean unos aparatos especiales llamados *alcohómetros*, que por la sola inmersión en el líquido dan en la rasante el grado correspondiente, siendo aparato casi exclusivamente usado el de Gay Lussac que da la graduación centesimal, y algunas veces también el alcohómetro de Cartier, cuyos grados no guardan relación de unos a otros con la cantidad relativa de alcohol que tiene respectivamente el líquido, por cuya causa va desapareciendo su empleo, y siempre que otra cosa no se indica se entienden grados de Gay Lussac o centesimales, llamados así porque el cero corresponde a la carencia absoluta de alcohol y el 100 al alcohol puro llamado alcohol absoluto, mientras que en el alcohómetro de Cartier el primer punto es el grado 10, y el final de la escala es el 44, casi idéntico al 100 de Gay Lussac. En los dos casos la graduación se refiere a la temperatura de 15° centígrados porque siendo diferentes el aumento de volumen del alcohol y el agua por el aumento de temperatura, resulta diferente graduación según estas temperaturas, teniéndose así las llamadas *fuerza o graduación real*, que es la que corresponde al líquido si se le hace tomar la temperatura base de los 15°, y *fuerza o graduación aparente*, que es la que marca el alcohómetro, siendo necesario el empleo de tablas que den la fuerza real cuando se conoce la fuerza aparente, como la *tabla* **XIV** cuyo uso consiste en buscar el número de encuentro de la línea de la temperatura con la columna de la fuerza aparente.

2.° *Piedras preciosas.*—El peso de las piedras preciosas se expresa en la unidad llamada *quilate*, a la que se ha puesto en relación con el sistema métrico dándole la equivalencia de 205 miligramos, y únicamente en relación a esta medida se efectúa el comercio de las piedras preciosas.

3.° *Medidas para los hilos.*—La existencia de estas me-

didas especiales está determinada por la imposibilidad de conocer directamente por medio de las unidades hasta ahora enumeradas el grueso de los hilos.

En la práctica son dos las vías indirectas para obtener estos gruesos, señalándolos en ambos casos por medio de números o *título de los hilos*, que expresan relación entre la longitud y el peso de dichos hilos.

El número del título es de sentido inverso al grueso para todos los hilos excepto para la seda, en que a mayor número tiene más grueso, existiendo tres sistemas de numeración llamados francés, inglés y decimal según el detalle de la *tabla* **XII**.

La numeración oficial española es del sistema inglés según notas 77 y 80 para la aplicación del arancel de Aduanas.

4.° *Medidas del papel.*—Se utilizan unidades colectivas formadas por hojas o pliegos con independencia del tamaño que tenga cada hoja, si bien estos mismos tamaños están adaptados a dimensiones típicas siempre iguales para el mismo uso o clase de papel. La unidad colectiva principal es la *resma* que puede tener 500 o 480 pliegos según el sistema, hallándose el detalle en la repetida *tabla* **XII**.

5.° *Maderas.*—Aunque la cantidad de madera o leña que en total interviene en cualquier operación siempre se halla referida al volumen de la misma, resulta la expresión de este volumen en relación a cantidades superficiales para un grueso típico o a una cantidad de maderas de tamaño también típico, llamándose *Standard* la unidad principal, que tiene valores distintos según puede verse en la *tabla* **XII.**

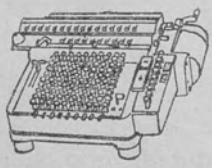
6.° *Agua corriente.*—Se indica la cantidad de volumen que fluye en una unidad de tiempo, siendo la fundamental métrica el litro por segundo.

7.° *Medidas marinas.*—Las especiales que tienen importancia son las de volumen con que se mide el espacio disponible de los buques, llamándose *tonelada* la unidad fundamental que puede ser de registro o de carga. Existen además las medidas longitudinales marinas que carecen de importancia mercantil.

8.° *Medidas tipográficas.* Son cada día más importantes

en los negocios por la necesidad de ellas en publicidad. La unidad fundamental es el *punto* que por sistema duodecimal forma el *cícero* para contar los espacios generales de impresión. El *cuerpo* es el tamaño de los renglones medidos en puntos y sirve a la vez para indicar el grandor de las letras, pero que no es absoluto porque en cada cuerpo hay varios tamaños a los que se llama ojos. Otra medida secundaria es la *cuadratina* o ancho de la *m*, que varía según el ojo de los tipos en un mismo cuerpo; se emplea para calcular aproximadamente las letras que formarán un renglón.

9.° *Otras medidas.* – Pudieran considerarse como medidas especiales de importancia mercantil los pesos que por unidad de capacidad tienen algunas mercancías como los áridos (granos), los de las balas de algodón y de lana, los envases de ciertos productos como cajas y botellas, dimensiones de rollos de papel, medidas eléctricas, para todas las cuales repetimos debe acudirse a los tratados monográficos porque el detalle completo sale de los límites de nuestra obra.



IX

METROLOGÍA MONETARIA

128. - Medida de los valores.—Siendo el valor de una riqueza la propiedad de ésta para satisfacer una necesidad, su determinación ha de hacerse por comparación con otra riqueza, y como además esta medición queda hecha siempre que se verifica un cambio, resulta de ello que cualquiera riqueza es apta para servir de unidad de medida de los valores y que al valor medido se le llame *valor en cambio*.

Pudiendo una riqueza cambiarse con cualquiera otra, todas las riquezas tendrán innumerables valores de cambio y sería preciso conocerlos casi todos para satisfacer las exigencias de la vida práctica; pero el inconveniente de esta multiplicidad ha sido subsanado desde tiempo inmemorial mediante el establecimiento de una riqueza que sirva de unidad en estas mediciones a la cual se denomina *moneda*.

129.—Condiciones de la moneda.—Todas las riquezas particulares podrían servir de moneda teóricamente, pero las necesidades prácticas hacen que no todas sean apropiadas al objeto, pues para ello debería reunir ciertas condiciones que vamos a indicar someramente.

Para que la moneda haya de poder estar en todos los lugares donde se efectúa algún cambio ha de ser cosa fácilmente movible y que requiera pocos gastos de transporte, lo cual se consigue con productos de *poco peso y volumen*. La moneda debe adaptarse lo mismo a los cambios pequeños que a los grandes y ésto sólo se conseguirá teniendo como moneda una riqueza *fácilmente divisible*; y como además tiene que servir para muchos cambios es preciso que la moneda sea de *fácil conservación* y de *valor lo menos variable posible*. Esta última condición adquiere una importancia extraordinaria al considerar la medida del valor en el tiempo, y tanto más, cuanto mayor sea ese tiempo, de donde se deduce la gran preocupación de la estabilidad monetaria de nuestros días en relación a la multitud de préstamos a largo plazo.

Elegida la mercancía que había de servir de moneda reuniendo las anteriores condiciones, se hace indispensable dar *seguridades respecto a la pureza* de la misma y *a la cantidad de riqueza* que cada moneda contuviere. Esto último se obtiene con la creación de monedas típicas con cantidad de riqueza previamente fijada, evitando así la medición de la moneda en cada cambio, y ambas condiciones reunidas nos las da la práctica universal de que la fabricación (acuñación) de monedas se haga por los Gobiernos, que marcan las monedas con alegorías e indican en ellas la cantidad y calidad de las riquezas adoptadas como tales.

130.—Diversidad de riquezas tipos para las monedas.—La necesidad de tener monedas de diversos valores explica la adopción de varias materias para la acuñación de monedas; pero si se adopta una materia de poco valor en relación al conjunto medio de las riquezas circulantes, no se podrían acuñar más que monedas de poco valor porque las demás resultarían demasiado voluminosas y para los pagos grandes sería necesario una cantidad excesiva de monedas; adoptando sólo una materia de gran valor relativo se caería en los inconvenientes opuestos, y una materia de un valor intermedio tendría a la vez los inconvenientes de los dos sentidos, aunque más atenuados, por lo que los Gobiernos adoptaron como materias amonedables dos metales (oro y plata) que reunían las condiciones generales indicadas en el párrafo anterior siendo respectivamente de valor grande y de término medio y con ello sólo quedó el inconveniente de los pequeños pagos o de los pequeños valores, para los cuales no se acuñan verdaderas monedas de valor correspondiente, sino que se ponen en circulación cantidades de metal que tenga un valor muy pequeño, pero que en sus dimensiones y aspecto sea semejante a las monedas verdaderas. Como el valor de estos metales es menor como mercancía que el atribuído como monedas, pueden considerarse estas monedas como fichas o marcas representativas de valor y por esta representación ser admitidas en los cambios, teniendo así submúltiplos de las verdaderas monedas para aquellos casos prácticos en que no fuese posible hacer la división material.

131. - Sistema y unidad monetaria.—Se llama *sistema monetario* de un Estado al conjunto de monedas que en el mismo se emplean.

En todo sistema regular de monedas se ha establecido una que contenga cierta cantidad prefijada de metal y a la que se da nombre especial sirviendo de base al sistema. Esta moneda base es la *unidad monetaria* del sistema, y todas las demás son múltiplos y submúltiplos de ella.

La unidad monetaria se llama también *moneda de cuenta*, porque sirve generalmente para indicar en ella el valor de todos los productos y servicios, se adopta en los escritos y transac-

ciones mercantiles y a ella se refiere siempre el valor de todas las monedas acuñadas.

Los sistemas monetarios son muy diversos en los diferentes países, teniendo aún mayor diversidad en las denominaciones de las unidades fundamentales, por lo cual es éste un estudio de gran importancia para el Comercio a causa de la necesidad de referir valores de un país a los de otro.

132.—Clases de monedas.—La moneda de cuenta puede ser efectiva o convencional. La *moneda de cuenta efectiva* es aquella que existe relativamente en metal con cantidad y clase previamente determinadas, como son la peseta española, la libra esterlina, la corona escandinava, etc.

La *moneda de cuenta convencional* es una moneda ideal que no existe realmente en metal, pero que representa un valor que tiene por base la cantidad de metal puro que existe en una unidad de peso, como es la peseta de oro española, el marco oro de Alemania, el franco oro.

Las monedas efectivas se distinguen en legales, divisionarias y de comercio.

Las monedas *legales* son aquellas que tienen curso libre y deben ser aceptadas sin restricción alguna en los pagos, de cualquier importe que éstos sean. Su valor es el que les corresponde atendiendo a la cantidad de metal puro que contienen, y ese poder de pago sin restricción se expresa diciendo que estas monedas tienen *poder liberatorio ilimitado.*

Las monedas *divisionarias* son aquellas acuñadas para las necesidades de la circulación, teniendo curso legal sólo por cierta cantidad, lo que se expresa diciendo que tienen poder *liberatorio limitado.* Su acuñación es también restringida y, porque su valor como monedas es mayor que el del metal que contienen, pueden denominarse «promesas estampadas en metal».

Las *monedas de comercio* son aquellas acuñadas por algunos Estados, bien para atender necesidades momentáneas y especiales de su comercio, bien para enviarlas a las colonias donde han de tener curso legal. Son monedas de la primera clase las de hierro que acuñó Alemania durante la gran guerra, y de la segunda el thaler eritreo acuñado en Italia para su colonia Eritrea del Africa.

133. Elementos de un sistema monetario.—Los ele-

mentos de todo sistema monetario son las circunstancias determinativas del mismo, de los que unos se refieren a la clase de riqueza que constituye las monedas y otros a las particularidades que marcan el valor de las monedas, cuales son el peso, dimensiones, exactitud de la medida de los metales amonedados y relación entre los diferentes metales empleados.

Resulta, pues, que serán elementos de un sistema, la materia de que se forman las monedas, el pie y la talla monetaria, el peso, permiso y valor de cada moneda.

134.—Materia de las monedas.—Para las monedas legales han sido adoptados en todos los pueblos civilizados el oro y la plata (*), ya cada uno de ellos separadamente o bien los dos conjuntamente, y siempre con una pequeña cantidad de otro metal de menos valor.

Para las monedas divisionarias han sido el cobre y níquel los metales adoptados, y lo mismo que los anteriores el cobre y el níquel se mezclan a otros de menos valor para darles consistencia y aminorar el costo de fabricación de las monedas.

Prescindimos de la indicación de las materias que han sido empleadas en la antigüedad para la fabricación de las monedas, que nada podrían aclarar ni para nada serían tampoco precisas, constituyendo únicamente una curiosidad, más propia de otra clase de obras.

135.—Monometalismo y bimetalismo.—Según la clase de metal adoptado para la fabricación de las monedas de poder liberatorio absoluto, resultan tres variaciones en los sistemas monetarios, a saber: 1.° De patrón plata; 2.° De patrón oro, y 3.° De doble patrón.

Cuando las monedas legales son sólo las de un metal el sistema es *monometálico* quedando las monedas de plata como divisionarias si el patrón adoptado es el oro, y siendo el oro considerado como mercancía si el patrón que se adopta es la plata. Cuando se admite simultáneamente los dos patrones monetarios el sistema es *bimetálico*, teniendo entonces el mismo poder liberatorio las monedas de plata y las de oro, si bien esta igualdad de poder liberatorio es sólo nominal porque aunque la ley así lo determina es muy otra la realidad práctica.

Al establecerse el doble patrón monetario pueden seguirse dos criterios: 1.° Las monedas de metales diferentes no tienen ninguna relación fija legal

(*) Por esta circunstancia se llaman *metales preciosos* al oro y a la plata, debiendo advertir que las frecuentes alteraciones de valor de la plata y la depreciación porque pasa en estos días, han hecho perder a este metal su cualidad histórica de verdadera moneda, pasando a la categoría de moneda representativa para los pagos fraccionarios.

en sus valores y cada una tiene sus monedas divisionarias propias, constituyendo así dos sistemas unimetálicos coexistentes e independientes, y 2.º La unidad monetaria es única, pero tanto ella como sus múltiplos y submúltiplos pueden ser acuñados en cualquiera de los dos metales según las conveniencias de la vida real, y en todos los casos ha de existir entre la cantidad de metal puro que contengan las monedas de oro o plata una relación fija para igualdad de valor, o relación de valor, también fija e igual a la anterior, para el mismo peso.

En la actualidad no existe ningún país que tenga su sistema monetario ordenado en la forma que indica el primero de los criterios; pero los países que han establecido su sistema con arreglo al segundo criterio tienen sus monedas con una relación muy diferente de aquella fija que impuso la ley, según antes decimos, por lo que en la realidad no existe el doble patrón quedando todos los países como monometalistas, situación confirmada por todas las nuevas organizaciones monetarias llevadas a cabo en estos últimos años, en las que todas han adoptado el monometalismo oro, y los que tienen en proyecto su nueva organización también es a base de ese monometalismo.

136.—Ley y liga de las monedas y metales preciosos.—Se llama *ley* o *título* de las monedas, y lingotes de los metales preciosos, a la cantidad de metal puro que contiene la unidad de peso, es decir, la relación entre el peso del metal puro y el peso total. Estas leyes se expresan unas veces por fracción decimal, y otras siguiendo la norma inglesa, en *quilates* para el oro, de los que el metal puro o la unidad son 24 quilates, y en *dineros* para la plata, siendo la unidad o metal puro 240 dineros.

En la mayor parte de los países se ha adoptado como título la unidad decimal 0,900 para tener así sistema semejante al de las pesas y medidas, pero hay todavía varios países en los que la ley se expresa en fracciones ordinarias cuyo denominador es diferente de las potencias de diez, cual es la ley de $\frac{22}{24}$ o de 22 quilates, empleada en la Gran Bretaña para el oro.

La ley adoptada para las monedas se llama simplemente ley, por ser la medida legal de los metales preciosos a la cual se refiere el precio de los mismos en el mercado.

Las leyes adoptadas universalmente se reducen a los tipos siguientes:

Para el oro: tres tipos, de 0'875; de 0'900 y de $0'91\overset{\frown}{6}$ (*)

(*) Recordamos al lector que el arco colocado sobre una o varias cifras señala las que forman la parte repetida de una fracción periódica.

Para la plata: nueve tipos, de 0'800; 0'830; 0'8$\widehat{3}$; 0'868; 0'900; 0'902$\widehat{6}$; 0'916; 0'925, y 0'945 además de los de 0'500 y 0'600 en monedas divisionarias.

El metal bajo que contienen las aleaciones de monedas recibe el nombre de *liga*, y su expresión es semejante a la de la ley, e igual a la diferencia entre ésta y la unidad; así por ejemplo, para la ley de 0,900 la liga habrá de ser 0,100 y para la ley de $\frac{22}{24}$ la liga sería $\frac{2}{24}$

137.—Notación y división de las leyes.—Los metales preciosos cuando se presentan en el mercado en monedas no precisan llevar marca de su ley, porque el sistema monetario a que pertenecen la tiene determinada; pero cuando no tienen esta presentación necesitan o bien hacer el análisis correspondiente (ensayo) o bien después de él llevar marcada su ley. Estas marcas suelen ser en milésimas y hasta diezmilésimas para el oro, si bien se conserva todavía algunas marcas antiguas inglesas referidas al exceso y defecto de la ley del lingote sobre la ley *Standard* o ley tipo, que es de $\frac{22}{24}$ para el oro y de $\frac{222}{240}$ para la plata.

Las marcas de los lingotes y las indicaciones del resultado de los análisis, cuando se expresan con relación a esta ley, lo hacen indicando el exceso sobre dicho tipo mediante la letra *B* (inicial de *better*=mejor, superior) o el defecto con la inicial *W* (de *worse*=peor) seguidas del número complejo que expresa dicha diferencia. Para comprender estas expresiones debe tenerse en cuenta que el quilate se subdivide en 4 granos, éstos en 4 cuartos y éstos en 2 octavos, con lo cual la ley Standard del oro será:

$$\frac{22}{24}\text{quilates} = \frac{88}{96}\text{granos} = \frac{352}{384}\text{cuartos} = \frac{704}{768}\text{octavos}$$

y el dinero se subdivide en 4 cuartos, siendo por tanto la ley Standard de la plata

$$\frac{222}{240}\text{dineros} = \frac{888}{960}\text{cuartos}$$

por cuyas circunstancias los lingotes tendrán marcado por ejemplo oro $B\ 0-2-3-1$, lo que es igual a 2 granos, 3 cuartos y 1 octavo sobre la ley Standard, pues que se suprimen las denominaciones.

Para los cálculos se consideran siempre expresadas las leyes Standard en *octavos* para el oro y en *cuartos* para la plata, a los cuales se referirán siempre las diferencias B y W, lo que da para cualquier ley la expresión

$$\frac{704 \pm \begin{matrix} B \\ W \end{matrix}}{768}$$

para el oro, y

$$\frac{888 \pm \begin{matrix} B \\ W \end{matrix}}{960}$$

para la plata, las cuales reducidas a fracción decimal sirven para todos los cálculos de transformación y comparación, y así el ejemplo anterior sería $\frac{704 + 23}{768} = 0'9466$, que comunmente se diría ley de 727 octavos.

138.—Pie monetario.—El pie monetario es la cantidad de unidades monetarias que pueden obtenerse de la unidad de peso en metal fino. Lo mismo que la ley, el pie se expresa siempre referido a la unidad de peso del país respectivo, así por ejemplo, en España y Suiza el pie monetario es de 3.444'44 pesetas o francos para el kilogramo de oro fino y de 222'22 para el mismo peso de plata, y en el Japón de 5.000 yens para el kwan de oro fino.

139.—Talla de las monedas.—La talla de una moneda es la cantidad de éstas que pueden obtenerse de una unidad de peso de metal aleado.

Suele confundirse la talla con el pie, aunque tienen sin embargo la diferencia de que, mientras el pie se refiere al metal fino y a la unidad monetaria, la talla tiene en cuenta el metal aleado y además hace referencia a las monedas efectivas. El pie es único para cada sistema y sirve para diferenciar esencialmente un sistema de otro, y la talla es diferente para

cada moneda dentro del mismo sistema, con lo que existirán tantas tallas como monedas haya.

La expresión de la talla es semejante a la del pie con sólo agregar la moneda a que se refiere, así diremos que para la moneda española de 5 pesetas de plata la talla es de 40 y para la de 25 pesetas de oro es de 124, y en las dos por kilogramo de metal aleado.

140. – Remedio, permiso o tolerancia. – De estas tres formas se designa el límite del error que la ley permite en el peso y ley de las monedas. La tolerancia puede ser tanto por exceso cuanto por defecto y sólo dentro de ese límite tienen curso legal las monedas, sirviendo además para que el Gobierno juzgue la rendición de cuentas de fabricación. Cuando la tolerancia es por exceso, se llama *tolerancia en fuerte*, y cuando es por defecto, se dice *tolerancia en feble.*

La tolerancia se concede a la ley, teniendo en cuenta la imposibilidad de obtenerla completamente exacta y mucho menos enteramente homogénea para que todas las monedas de un mismo lingote sean de la misma ley; y en cuanto al peso, por esa imposibilidad práctica y además en razón al desgaste a que están sujetas las monedas por el uso. Por este motivo, la tolerancia para el peso aumenta a medida que disminuye el valor de la moneda a que se refiere, por ser mayor la circulación de éstas cuanto más pequeñas sean.

La tolerancia se expresa por el número de milésimas que puede exceder o faltar la ley; así por ejemplo, la tolerancia de 1 milésima en las monedas de oro españolas quiere decir que la ley de ellas puede ser de 0'899 o bien de 0'901 o cualquier valor entre éstos comprendido. Para el peso, la expresión de la tolerancia es en fracción de la unidad de peso, que para España es el gramo, siendo por tanto la tolerancia los miligramos que puede perder por el uso, la cual es de 1 para las monedas grandes de oro y va creciendo hasta llegar a 7 en la moneda de plata de 0'50 pesetas.

141. – Valor de las monedas. – Las monedas tienen tres valores: real, legal y comercial.

El valor *real* o *intrínseco* es el que tiene la moneda conside-

rada como pasta, y es igual al que corresponde a la cantidad de metal fino que contiene.

El valor *legal*, que también se llama *numerario* y *representativo*, *nominal* y *de tarifa*, es el que la ley le asigna en relación al pie monetario. La diferencia entre este valor y el anterior debe ser igual a los gastos de acuñación. Es frecuente este valor de tarifa para las monedas extranjeras y se fija redondeando por defecto el valor intrínseco.

Valor *comercial* es el que le corresponde como mercancía y que, por consiguiente, oscilará con frecuencia en razón a la mayor o menor demanda de monedas de una clase que exista en el mercado. Cuando este valor exceda al valor legal, se dice que la moneda tiene *agio* y si este exceso es de consideración y duradero desaparece la moneda de la circulación, como sucedió con las monedas de cobre en Alemania durante la gran guerra.

142.—Complementos de un sistema monetario. Billetes de Banco. —La moneda como instrumento de los cambios es auxiliada, y, en muchos casos reemplazada, por el mal llamado papel moneda y los billetes de Banco.

Los *billetes de Banco* son títulos emitidos por un Instituto de Crédito con especial autorización gubernativa, los que por tanto representan deudas de ese Instituto a favor de los poseedores de los billetes, son reembolsables en moneda real al portador y en el acto de su presentación, por cuyo motivo se admiten como verdaderas monedas y, hasta a veces, se prefieren a ésta en épocas normales.

La organización actual de las economías mundiales hace indispensable la existencia de los billetes completando el sistema monetario del país de que se trate y haciendo que sea la misma ley monetaria la que fije las condiciones de circulación de los billetes; pero esta circulación de moneda que es sólo representativa, exige imprescindiblemente la garantía legal de que el billete pueda ser convertido en moneda metálica en cualquier momento y para ello se obliga al Instituto emisor a conservar en sus cajas una cierta cantidad de oro metálico o en barras, y una cierta cantidad de monedas extranjeras o billetes que tengan la convertibilidad en oro, cantidades que se denominan *reserva metálica*, y que en ningún caso son la

misma que la de billetes que hayan sido creados, sino que basta una fracción, expresada por lo común en forma percentual y que en la mayoría de los países es de un tercio del total de billetes. Esta misma ley, como elementos complementarios del sistema monetario metálico, señala las condiciones que debe reunir el metal que se haya de entregar a cambio de los billetes, si lo pidiesen los poseedores de éstos al Instituto emisor, y unas veces se determina que sean precisamente monedas de oro del mismo país (sistema del *gold standard);* otras veces pueden ser éstas o barras de oro y monedas extranjeras, fijando o no la ley de ellas (sistema del *gold bullion standard);* y otras basta entregar a cambio de los billetes del país billetes extranjeros o cheques pagaderos en el país en que se tenga la convertibilidad oro de los billetes (sistema del *gold exchange standard);* y en todos los casos se fija la cantidad mínima de billetes que será preciso presentar al reembolso para que sea entregado el oro a cambio de ellos.

La emisión de billetes se hace por múltiplos de la unidad monetaria, fijando la ley de autorización el mínimo y el máximo de unidades que representará cada uno.

En los billetes es necesario distinguir tres situaciones diferentes, cada una de las cuales juega un papel dentro del sistema monetario, a saber: curso fiduciario, curso legal y curso forzoso. El curso de los billetes es *fiduciario* cuando no hay obligación de aceptar los billetes en pago de deudas entre particulares, y sólo se admiten basados en la fe que se tiene en el Instituto emisor; el curso *legal* cuando hay obligación de admitir los billetes como medio legal de pago entre los particulares, pudiéndose obtener el reembolso en moneda metálica a su presentación en el Instituto que los emitió, como sucede en épocas normales en los estados civilizados; y es curso *forzoso* cuando la aceptación del billete es obligatoria sin que pueda exigirse el reembolso en moneda metálica. Se tiene este caso cuando el Estado atraviesa una crisis económica o política y necesita de grandes anticipos por parte del Instituto privilegiado, en cuyo momento, en compensación de estos anticipos se da curso forzoso a los billetes, para que dicho Instituto pueda hacer el anticipo que se necesita, con sólo emitir billetes, y sin precisar el aumento de la reserva; pero entonces, co-

mo el valor de los billetes se apoya únicamente en la fe que se tiene de que han de ser reembolsados sin limitación ninguna, y las garantías del Instituto emisor disminuyen, todos los poseedores de billetes acudirían inmediatamente al reembolso, causando así trastornos, no sólo en la vida del Instituto, sino en toda la economía nacional, y para que ésto no suceda, el Gobierno que autorizó la emisión de los billetes decreta el curso obligado de los mismos, convirtiéndose en sustitutivos de la moneda metálica.

143.—Sistema monetario español.—El sistema monetario de España se estableció por Decreto de 19 de octubre de 1868 adaptándole a las bases del convenio celebrado tres años antes por Francia, Bélgica, Italia y Suíza, pero sin entrar en el convenio, y por disposiciones posteriores se añadió la moneda de oro de 25 pesetas (centén), reduciéndose el permiso en la ley a una milésima y creando la moneda de bronce de níquel.

El sistema es bimetalista de oro y plata en una relación de 15½ a 1, con pies monetarios de 3444'$\widehat{4}$ pesetas para el oro y 222'$\widehat{2}$ para la plata, acuñados a la ley de 0'900 ~~milésimas~~; unidad monetaria de cuenta, la *peseta* que vale 4,5 gramos de plata pura y al mismo tiempo 0'290322 gramos de oro puro, y se divide en 100 centésimas.

La emisión de billetes está monopolizada por el Banco de España por ley de 29 de diciembre de 1921, con límite máximo de circulación de billetes de 5.000 millones de pesetas garantizados por una reserva mínima de 40 °/₀ de oro y 5 °/₀ de plata hasta 4000 millones de pesetas en billetes y de 50 °/₀ en oro y 10 °/₀ en plata por el exceso de billetes sobre 4.000 millones.

El detalle del sistema es el de la *tabla* **XV**, entendiendo que el límite del curso forzoso se refiere a los particulares, pues el Estado debería no tener restricción en este sentido, si bien las disposiciones de nuestras leyes sólo obligan a admitir las monedas de bronce por valor de 75 pesetas para cantidades totales mayores de 2.500 pesetas; por valor de 50 pesetas desde 1.250 hasta 2.500; por 25 pesetas desde 250 hasta 1.250 y la décima parte del valor total desde 5 hasta 250 pesetas, siempre que se trate de cobros y pagos del Estado.

144.—Monedas antiguas españolas.—Existiendo todavía en el comercio algunas monedas españolas de los antiguos sistemas reproducimos en la *tabla* **XVI** el cuadro de las mismas según el Decreto de 25 de marzo de 1869, aunque solamente para las monedas de oro.

145. - Sistemas monetarios extranjeros.—Como el estudio de conjunto es el que hemos hecho en los párrafos anteriores, hemos recopilado los datos de cada sistema en la *tabla* **XVII**.

146. - Principales monedas extranjeras. - Como complemento de los datos fundamentales sobre los sistemas monetarios extranjeros, presentamos en la *tabla* **XVIII** las más importantes monedas de esos países, tanto para que puedan servir de base a los cálculos sobre elementos de los sistemas monetarios, como para el comercio internacional y el especial de metales preciosos; pero sólo hemos hecho figurar las monedas que tienen curso legal según las respectivas leyes monetarias, y añadido los billetes circulantes.

Libras parte entera - la mitad de los chelines serán las décimas y el duplo de los peniques formarán las centésimas y milésimas - Si estos peniques pasan de 4 se le añade una milésima y si los chelines no son pares se le añaden cinco milésimas a las centésimas.
Regla inversa - La parte entera son las libras el doble de las décimas los chelines y la cuarta parte de las centésimas y milésimas los peniques

£ 514-17-9 = 514,86
51
514,897 = £ 514-17-9

X

CÁLCULOS METROLÓGICOS

147.—Objeto de los cálculos sobre medidas.—Las operaciones comerciales propiamente dichas se efectúan siempre con intervención de las unidades de medida que hemos detallado en los capítulos anteriores por lo que se hace indispensable en la mayoría de los casos efectuar la *reducción*, como por ejemplo tendríamos si compradas varias toneladas inglesas de carbón hubiera éste de ser vendido por pesos métricos, o si en ese mismo caso la venta se hiciere por quarters. De aquí que el objeto de estos cálculos haya de ser de *reducción de medidas a distintas unidades del mismo sistema*, o bien *reducción de unidades de un sistema en otro diferente*, además de considerar operaciones matemáticas que presenten alguna particularidad por la estructura especial de la división de unidades de cada orden en el inmediato inferior.

148.—Reducciones de unidades en el mismo sistema.—Los objetos son: convertir en incomplejo un complejo dado, operación llamada *decimalización de complejos*; transformar en complejo un número decimal dado; reducir un incomplejo a otro de diferente orden.

1.° *Cambio de orden de incomplejos.*—Basta multiplicar el número propuesto por la relación entre ambas unidades si el orden pedido es inferior, o emplear como divisor dicha relación cuando se pide un orden superior al propuesto.

Ejemplo.—Reducir 6496 yardas a pulgadas.
Como la yarda tiene 36 pulgadas el cálculo será

$$6496 \times 36 = 233856 \text{ pulgadas}$$

2.° *Decimalización de complejos.*—De un modo general diremos que basta convertir todo el número complejo en uni-

dades del orden inferior y después dividir el número así obtenido por las unidades del último orden que componen la deseada, o multiplicar si la unidad deseada fuere inferior a la más pequeña del número propuesto. Para la transformación del complejo en incomplejo del orden inferior debe multiplicarse cada cantidad de unidades dadas por las que contiene del orden inmediato inferior, sumar las que de este orden existan en el número propuesto y repetir la operación con la suma y resultados sucesivos hasta llegar al último orden, en que se terminará con la suma del último producto y las unidades que se tienen de este último orden.

Ejemplo: Convertir en libras castellanas el número 5 quintales, 2 arrobas, 15 libras 9 onzas y 12 adarmes.

Reduciendo el número al orden inferior, que son los adarmes, convertiremos los 5 quintales en arrobas y añadiendo las 2 del propuesto nos da

$$5 \times 4 = 12 + 2 = 14 \text{ arrobas}$$

y repitiendo la operación para libras, onzas y adarmes

$$14 \times 28 + 15 = 392 + 15 = 407 \text{ libras}$$
$$407 \times 16 + 9 = 6512 + 9 = 6521 \text{ onzas}$$
$$6521 \times 16 + 12 = 104336 + 12 = 104348 \text{ adarmes}$$

número que tendremos que dividir por 256 que son los adarmes que forman una libra, siendo necesaria la división porque el orden deseado es superior al que tenemos, y así el resultado pedido será:

$$104348:256 = 407'6094 \text{ libras}$$

aproximado por exceso en menos de media diezmilésima.

Esta decimalización es más frecuente efectuarla descomponiéndola en dos partes de forma que se obtenga la parte entera del orden pedido por reducción de los superiores, se reduzcan al inferior las de órdenes menores, y de ellos se halle la parte decimal buscada mediante una división igual a la del ejemplo.

3.° *Transformación de decimales en complejos.*—Se divide la parte entera del número propuesto sucesivamente por las unidades de cada orden que forman el inmediato superior hasta llegar al mayor de todos o a un dividendo menor que el nuevo divisor; el último cociente con los restos en orden inverso al de las divisiones es el número buscado, el cual deberá completarse con los órdenes inferiores al del complejo mediante la multiplicación de la parte decimal por las unidades que cada orden contiene del inmediato inferior, repitiendo la

operación cuantas veces sea preciso pero operando sólo con la parte decimal del producto anterior; el complemento del número buscado son las partes enteras de los sucesivos productos.

Ejemplo: Reducir a complejo el número 839,6554 días.

Como las unidades superiores del día son semana, año, lustro, etc., la división será

$$\begin{array}{r|l|l} 839 & 7 & \\ 15 & 119 & 52 \\ 69 & 15 & 2 \\ 6 & & \end{array}$$

y los productos de los decimales, sucesivamente serían

$$\begin{array}{l} 0{,}6554 \times 24 = 15{,}6816 \\ 0{,}6816 \times 60 = 40{,}896 \\ 0{,}896 \times 60 = 53{,}76 \end{array}$$

con lo cual todo el número propuesto nos dará

2 años, 15 semanas, 6 días, 15 horas, 40 minutos y 53,76 segundos.

Ejercicios números **53** al **55**, **68**, **213**, **214** y **XLI** al **LI**

149.—Suma y resta de complejos —Los números complejos no decimales presentan la particularidad en la suma y resta de que las unidades de cada columna que deben agregarse a la siguiente, o las que deben tomarse de las superiores para efectuar la resta, no son decenas sinó las que compongan el orden inmediato superior en cada caso.

Por esto en la *suma* de complejos se considera cada orden de unidades como una suma separada, y en cada suma se separan las unidades del orden inmediato superior que contenga para agregarlas a la suma de éste

Ejemplo: Sea la suma siguiente de moneda inglesa (tabla XVI)

$$\begin{array}{rrrr} £ & 51 & 17 & 11 \\ £ & 8 & 5 & 7 \\ £ & 129 & 19 & 5 \\ £ & 16 & 13 & 1 \\ £ & 27 & 2 & 9 \\ \hline £ & 233 & 18 & 9 \end{array}$$

En ella la suma de la última categoría de números que representa los peniques, nos habría dado 33, que forman 2 unidades superiores o chelines, y queda un resto de 9 peniques que es el escrito en la suma; los 2 chelines sumados con las unidades de segundo orden darían 58 chelines, los cuales también forman 2 unidades superiores o libras, y queda un resto de 18 chelines que es el escrito, y ya las 2 libras con las unidades superiores nos da las 233 escritas.

Para efectuar la *resta* de los complejos se sigue la regla ordinaria, y en el caso en que el sustraendo, en cualquier orden de unidades, fuere mayor que el minuendo se toma una unidad de orden inmediato superior en el minuendo, que agregada a la existencia de ese orden inferior hace posible la resta, siendo preciso luego que en el orden de que se tomó la unidad se agregue ésta al sustraendo o se reste del minuendo.

Ejemplo: Sea determinar el tiempo transcurrido desde 16 de septiembre de 1894 a 12 de mayo de 1931.

La cantidad menor es la primera fecha, que será el sustraendo

$$\begin{array}{r} 1931 - 5 - 12 \\ 1894 - 9 - 16 \\ \hline 36 - 7 - 26 \end{array}$$

Aquí era imposible restar los 16 días de los 12 por lo que se añaden a éstos los 30 días que componen un mes, y así de los 42 se ha restado los 16 y escrito la diferencia 26; añadiendo al sustraendo 9 el día que antes tomamos, se debería restar 10 de 5, por lo que hemos tomado un año que reducido a meses hace con los 5 que tiene el minuendo los 17 meses de que se restan los 10 y se escribe la diferencia 7, y añadido este año a los 1894 del sustraendo, nos dá por resto de años los 36 escritos y por resultado de la operación los 36 años, 7 meses y 26 días.

Ejercicios números **LII** al **LXV** y **216**.

150. —Multiplicación y división de complejos.—La forma más rápida de hacer las multiplicaciones a la vez que la más fácil es la decimalización **(148,** 2.°) de los factores y la conversión del resultado nuevamante en complejo como se hace con los decimales incomplejos **(148,** 3°). Pero conservando la forma compleja de los datos se distinguen dos casos según que los dos factores sean complejos o sólo lo sea el multiplicando.

Si sólo es complejo el multiplicando se opera en forma semejante a la suma, reduciendo al orden inmediato superior cada producto parcial para añadirle al producto de ese otro orden. Esta operación es muy frecuente en el comercio por ser la moneda inglesa muy empleada como precio.

Cuando sean los dos datos complejos, aconsejamos que siempre se reduzcan a incomplejos los dos o al menos el multiplicador, para evitar el procedimiento engorroso que sería necesario, y que por ser tan largo va contra los fundamentos de la organización comercial.

Ejemplo: Determinar el valor de 27 tons., 14 cwt. y 2 quarters de una mercancía a razón de 24 £ 2sh y 8d. el quarter

Reduciendo a incomplejo las unidades de peso, porque el resultado ha de expresarse en complejo monetario, la operación sería

24 £	2sh	8d
		2216
295	1477	17728 : 12 = 1477
8864	4432	
4432	5909 : 20 = 295	4, resto.
53479	9, resto.	

en cuya línea inferior aparece por valor 53479 £, 9 sh y 4 d.

La división se empieza por el orden superior, obteniendo sólo el cociente entero, que serán las unidades de orden superior del cociente, el resto de esta primera división se reduce al orden de unidades inmediato inferior por medio de la multiplicación (**148**, 1°) se añaden las unidades de ese segundo orden que tenga el complejo, se repite la división para tener otro cociente entero y otro resto que de nuevo se reduce al orden inmediato inferior y se añaden las unidades de este último, repitiendo división, reducción de resto y suma y nueva división hasta llegar al último orden de unidades del complejo.

Ejemplo: Determinar la cantidad de mercancías producidas por 7 fábricas si el peso total de la producción es de 549 toneladas inglesas, 17 quintales (cwt), 2 quarters, 26 libras y 9 onzas.

La disposición del cálculo y operación será

549 | 17 | 2 | 26 | 9 | 7

49 tons, 19 cwt, 2 qr., 19 lb, 12 oz, 11 dr, 11'57 gr.

69

6×20 = 120

157

67

4×4 = 16

18

4×28 = 112

158

68

5×16 = 80

89

19

5×16 = 80

10

5×27 = 81

11

40

50

1

Ejercicios números **63, 211, 212, 215, 217** al **231** y **LXVI** al **LXXII.**

151.—Máquinas de calcular por complejos.—La frecuencia con que intervienen los complejos en el comercio internacional debido a que éste es el sistema de las pesas, medidas, y monedas inglesas, hace que los modelos de máquinas de calcular que se hallan en el mercado tengan con gran frecuencia algún tipo especialmente dispuesto para la moneda inglesa, para obtener automáticamente datos y resultados en dicha moneda sin necesidad de las operaciones de cálculo especiales, sino mediante el transporte mecánico de sumas por docenas o veintenas en vez de serlo en decenas como es en los tipos ordinarios. Como el manejo de estos tipos de máquinas en nada difieren de los decimales, remitimos al lector a lo dicho en el capítulo especial del cálculo mecánico.

152.—Reducción entre sistemas diferentes.—Todas las operaciones consisten en aplicación de la relación entre medidas correspondientes de los sistemas que entran en los cálculos o de algunas intermedias, relaciones que se denominan *equivalencias*, y que por lo numerosas que son hacen indispensables las tablas de ellas, como lo son todas las de medidas que se hallan al final, en las cuales además de las medidas que forma cada sistema se ha indicado la equivalencia con el sistema métrico decimal a fin de facilitar las transformaciones que nos ocupan.

153.—Resolución por equivalencias directas.—Se denominan equivalencias directas las que relacionan las medidas que se desea transformar con las del sistema en que se quiere obtener el resultado, como lo son en las tablas antes citadas las de cada sistema antiguo con el métrico.

El cálculo es una multiplicación o división del número propuesto por la equivalencia de las tablas. Será hecha la multiplicación cuando la equivalencia está expresada en las unidades del sistema del resultado, y se empleará la división cuando el número propuesto y la equivalencia indican unidades del mismo sistema.

Además si la unidad hallada para el resultado o la propuesta no fuera la que se desea ni la de la equivalencia deberemos hacer la transformación de dicho propuesto o del resultado dentro de su sistema metrológico **(148)**.

Ejemplos: 1)—Determinar los decálitros a que equivalen 24 pipas, 2 ohms, y 7 vedros del sistema ruso.

Reducido el número a incomplejo de vedros, debemos multiplicar porque la equivalencia de la tabla es de un vedro=12,2989 litros.

Las 24 pipas, 2 ohms y 7 vedros equivalen a

$$24 \times 36 + 2 \times 12 + 7 = 895 \text{ vedros,}$$

que nos dá una equivalencia en litros, de

$$12{,}2989 \times 895 = 11007{,}5155 \text{ litros}$$

la que reducida a los decálitros pedidos nos dá

1100'75 decálitros.

2). Hallar las canas de Barcelona que contendría una pieza de tejido de 234 metros.

Como la equivalencia de nuestra tabla VI está expresada en metros para una cana, deberemos emplear la división porque equivalencia y dato son unidades métricas y así el resultado pedido sería

$$234:1{,}555 = 150{,}4823 \text{ canas}$$

154.—Transformaciones indirectas.—Se emplea este procedimiento para los casos de sistemas de medidas cuya relación mútua es desconocida pero que se sabe cuál es la de todos esos sistemas con otro común para todas las relaciones. Para tener la relación directa de cada sistema con todos los demás sería necesario disponer de un gran volumen y aún hacer el manejo de éste bastante difícil, y por tal causa se han puesto en nuestras tablas las equivalencias de todos los sistemas con el métrico, teniendo así en éste la relación común antes indicada.

Para las transformaciones en tales casos basta tener presente el carácter doble de la operación, es decir reducir primero los datos a unidades métricas multiplicando por las equivalencias de las tablas, y después esas unidades métricas por medio de la división por la equivalencia del sistema pedido se reducen al resultado.

Ejemplo: Determinar los quintales argentinos a que es equivalente un cargamento que en pesas factorías indias pesa 241 maunds.

La primera operación de reducción del peso indio a métrico por multiplicación de la equivalencia de nuestra *tabla* **VIII** nos da

$$35{,}86825 \times 241 = 8162{,}24825 \text{ kg.}$$

que dividido por la equivalencia según nuestra *tabla* **VII** da

$$8162{,}24825:45{,}9567 = 155{,}915 \text{ quintales argentinos}$$

Ejercicios números **56** al **60, 64** al **66, 69** al **76, 110** y **LXXIII** al **LXXVII.**

155. Formación de baremos.—Los baremos son cuadros en que se indican los resultados de ciertas operaciones,

o sea, son lo mismo que tablas numéricas, si bien el nombre especial de baremos se reserva para equivalencias, distancias y precios.

La formación de baremos de equivalencias consiste en calcular la que corresponde sucesivamente de ciertas unidades en las de otro sistema para la serie de números dígitos de una de ellas o para la serie natural de números enteros. El cálculo que exigen estos cuadros de equivalencias se efectúa por simple suma de cada equivalencia con la de la unidad.

Pueden hacerse baremos que comprendan varias unidades de sistemas diferentes encabezando siempre una columna con el número de unidades y otra con el nombre de la unidad reducida o las equivalencias especiales. De estos últimos es la *tabla* **XIII** en que se halla calculada la equivalencia doble de una misma unidad inglesa en métricas.

Uno de los baremos que más frecuente uso tiene en toda clase de negocios es el de decimalización de la moneda inglesa, que por este frecuente empleo presentamos en la *tabla* **XIX**, aunque su cálculo es fácil por la regla general **(148,** 2.°) y además permite hacer esta operación con sólo saber que cada chelín equivale exactamente a 5 centésimas de libra y cada penique son 4 milésimas y $^1/_6$.

Los baremos son de gran utilidad en el comercio y cada casa hace los de las medidas que con frecuencia intervienen en las operaciones suyas, para evitarse el trabajo de muchos cálculos y adquirir mayor seguridad en la exactitud de los resultados.

156.—Gráficos de equivalencias metrológicas.—La representación gráfica de funciones **(67)** es aplicable a las reducciones de medidas considerando las cantidades de una de ellas como variable y los resultados equivalentes como funciones formando un diagrama **(68)** al que podemos hacer exprese las equivalencias múltiples de unidades de sistemas distintos en forma de nomograma de ejes concurrentes **(73);** pero además son de utilidad grande en los negocios los gráficos de una sola línea en los cuales la equivalencia ha de ser sólo entre dos unidades.

Los gráficos en forma de diagrama o nomograma se forman por medio de las coordenadas cartesianas ortogonales

(62) fijando en el eje horizontal el número de unidades de que se trata de hallar la equivalencia y en el eje vertical las equivalencias de estas mismas unidades, como sería el de la fig. 35 en el que para cada una de las clases de unidades reducidas a métricas aparece una línea representativa de los distintos puntos de la función de su relación con el litro. Para utilizar estos gráficos, una vez formados, se halla en la línea

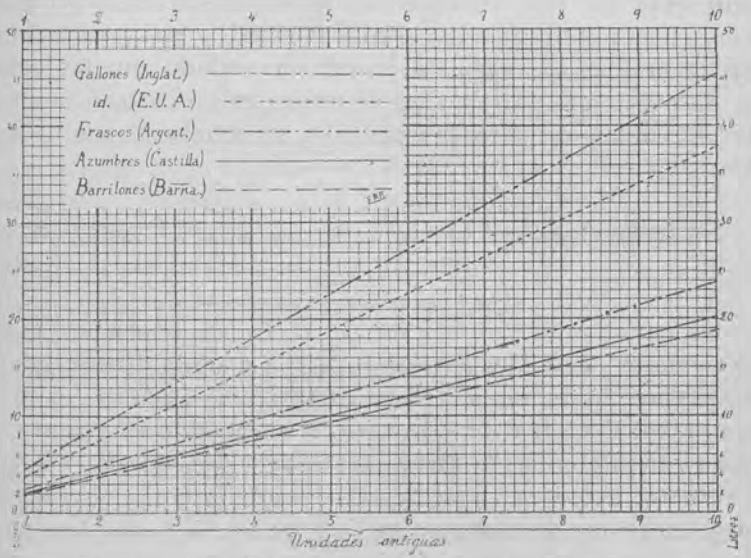


Fig. 35. Diagrama de equivalencias de medidas

horizontal la cantidad de unidades del problema y para facilitar ésto se divide la unidad lineal en forma igual a la unidad de medida, como está en el gráfico en el que cada cuadro menor representa ½ cuartillo o ½ cuartán, 1 octavo de frasco y 1 pinta; trazando luego una línea vertical en el punto correspondiente, hallaremos otro punto en la línea de la función o línea de equivalencia, por el que se trazará otra línea horizontal que en su encuentro con el eje vertical nos dá la equivalencia buscada, en la forma en que ya dijimos **(68** al **70)** para la lectura de toda clase de diagramas. En la práctica conviene que en los gráficos de más de una variable, como es el de la fig. 35, se distingan unas líneas funcionales de otras por me-

dio de colores que destaquen, porque es así más difícil la confusión de medidas, aunque también pueden distinguirse dichas líneas como en la figura por medio de trazos diferentes.

Los gráficos con un solo eje lineal se forman señalando en su parte superior las unidades decimales que entren en la cuestión, teniendo cuidado que no pasen a la parte inferior, como están en la fig. 36 cada una de cuyas partes se puede hacer represente cualquier cantidad, (en la fig. cada división representa un Kg.) dividiéndola y subdividiéndola decimalmente hasta el límite que permita el papel, y en la parte inferior de la línea eje, —teniendo también cuidado que las señales no pasen a la parte superior porque en tal caso se confundirían con las primero marcadas—, se señala el punto que



Fig. 36. Equivalencia de dos medidas.

en medidas decimales corresponde a la medida distinta considerada, (en la figúra es la libra inglesa, habiendo buscado el punto 0,4536 en la división primera) y obtenido este punto, se toma con el compás la distancia desde el origen del eje a él y sucesivamente se va señalando sobre la línea, dividiendo luego cada una de estas partes de línea en la forma en que se divida la unidad correspondiente, (en la figura es en 16 partes por las 16 onzas que componen la libra, y luego se habría dividido de nuevo estas divisiones de onzas en otras 16 partes para los dracmas continuando la división hasta donde lo permita el papel. La utilización de estos gráficos consiste en leer en la parte superior el número que corresponde al número del problema en la inferior, y así encontraremos que para 7 libras y 9 onzas corresponde una equivalencia de 3,43 Kg.

157.—Empleo de la regla de cálculo.—Las reglas de cálculo especiales mercantiles suelen tener señalado en una de sus escalas la equivalencia de ciertas unidades con otra tomada como unidad de referencia, como lo es el metro y Kg. y el marco en la de la fig. 37 en la que puede verse una escala central en la reglilla cuyo punto 1 está marcado *M*

(marcos), *m* (metros) y *kg.* (kilogramos) que quiere decir que esta escala es para referir directamente a estas tres unidades las que luego se señalen en la misma como lo están monedas de diversos estados, y las de peso y longitud inglesas (*yd, Fr, cwt,* y *lb* en la parte de regla que se ve). Para obtener la equivalencia de medidas basta que el trazo de la medida en la escala de la reglilla se coloque bajo el número de unidades conocidas en la escala fija (la *Z* de la fig.) y el número 1 de la escala móvil (la *T* de la fig.) indica en la escala fija la equivalencia buscada. La regla de la fig., tiene además en el reverso de la reglilla otra escala que en forma semejante permite la decimalización de la moneda inglesa.



Fig. 37.

En forma idéntica se hallan escalas de equivalencias en cilindros de cálculo si bien éstos permiten que sea mayor las unidades a transformar y hasta tener equivalencias de sistemas no decimales entre sí.

158. - Reducciones termométricas. La relación de las dos escalas que coinciden en el cero **(126)** es de 4 grados Reaumur por 5 centígrados lo que da una equivalencia de 1,25 grados centígrados para el de Reaumur y de 0,80 grados de Reaumur por uno centígrado, y con esto se aplica la regla general de reducción **(154)**; pero al relacionar ambas escalas con la de Farenheit es necesario tener en cuenta que el 32 de ésta es el cero de las otras dos, con lo que la escala completa o número de grados de Farenheit desde el hielo al agua hirviente es de $212-32=180$ y por consecuencia la relación es de $^5/_9$ para el valor centígrado de un grado Farenheit y de $^4/_9$ para el mismo valor en grados Reaumur, teniendo que cada grado Reaumur equivale a 2,25 grados Farenheit y cada grado centígrado a 1,80 grados Farenheit, con cuyas relaciones ya podemos aplicar la regla general de reducción **(154)**, cuidando de añadir 32 a los resultados en grados Farenheit, y restando 32 de los datos en esta escala.

Ejercicios números **LXXVIII** al **LXXX**.

XI

CÁLCULOS MONETARIOS

159.–Problemas que originan los sistemas monetarios.–Hemos visto en el capítulo IX que la medida de los valores se hace por la combinación de cantidades, cada una de las cuales puede dar origen a tantos sistemas monetarios como valores sea capaz de tener, y sólo adoptando un ínfimo número de las innumerables combinaciones que se harían con los distintos valores de cada cantidad, es como se ha hecho posible la sistematización de las monedas. Conocidas estas combinaciones, puede ser prácticamente necesario referir elementos de una combinación a elementos de otra, o bien hallar un elemento desconocido por medio de los demás elementos del mismo sistema; de aquí se deduce que hay dos categorías de problemas monetarios a saber:

1.° Relaciones entre elementos de los sistemas.

2.° Equivalencias entre sistemas diferentes.

160.–Relación entre los elementos monetarios.–La formación de los sistemas monetarios se hace estableciendo que el valor de cada moneda sea función de la cantidad de riqueza (metal) que contiene; por consiguiente, cuando hayan sido establecidos algunos elementos podremos calcular todos los demás mediante esa función fundamental, a cuyo objeto estableceremos las siguientes relaciones matemáticas.

1.° Combinación del peso y la ley como determinativa de la cantidad de metal de cada moneda (fundamental).

2.° Razón de valor entre los dos metales tipos.

3.° Cálculo de un elemento monetario en función de todos los demás y de las dos relaciones anteriores.

161.—Metal fino de una moneda.—De la definición de ley **(136)** resulta la siguiente relación:

$$L = \frac{F}{A}$$

en la que F representa el peso de metal fino, A el de la aleación monetaria y L la ley de la moneda o pasta.

De ahí deduciremos para la cantidad de metal fino que contenga una moneda la expresión

$$F = A \times L$$

y según ella *el metal fino contenido en una moneda es igual al producto del peso por la ley.*

Ejemplos: 1.°—Determinar el metal fino que contiene la moneda de plata de 2 pesetas.

Según el cuadro de la *tabla* **XV** esta moneda pesa 10 gramos y se acuña a la ley de 0,835, luego contendrá

$$10 \times 0{'}835 = 8{'}350 \text{ gramos de plata pura.}$$

2.° Hallar el oro que contiene el doblón de Chile anterior a 1926, cuyo peso es de 5'991 gramos y su ley $^{22}/_{24}$.

El oro de esta moneda será:

$$5{'}991 \times \frac{22}{24} = 5{'}4917 \text{ gramos.}$$

162.—Relación entre el oro y la plata.—Considerando que las monedas propiamente dichas son las de oro y plata, toda vez que la moneda divisionaria constituye únicamente un auxiliar para hacer prácticamente posibles los cobros y pagos, cuando el valor de un producto cualquiera se determina por referencia al oro, el valor así hallado deberá ser forzosamente igual al que se obtendría refiriéndole a la plata, es decir, que si suponemos que este valor único del producto esté representado por O unidades de peso en oro puro o bien por A unidades de la misma clase en plata pura, esos dos números O y A tendrán entre sí una relación que nos indicará cuántas veces el oro vale más que la plata.

Representando por $\frac{O}{A}$ esa relación, y considerando otro producto cuyo valor respecto del primero fuese n veces mayor, resultaría que las unidades de peso en oro que vale

éste serán nO y las que vale en plata nA, de donde la relación entre el oro y la plata también sería

$$\frac{nO}{nA}$$

la que simplificada nos da la primera; es decir, que las dos son iguales, y que por tanto *existe una relación constante entre los valores de los dos metales preciosos.*

La existencia de esta relación constante es el criterio básico en el establecimiento de los sistemas monetarios bimetalistas **(135)** y hasta en los monometalistas queda tácitamente establecido este principio en cuanto sirve para dar normas en la fabricación de monedas.

Aun cuando sólo hemos de ocuparnos en este lugar de la relación entre el oro y la plata en cuanto son elementos monetarios, no estará de más advertir que también se determina dicha relación considerando a los metales como mercancías. La primera de estas relaciones es la llamada *relación legal*, y la segunda *relación comercial* y de la que nos ocuparemos cuando tratemos de la compraventa de metales preciosos en los respectivos mercados.

Para calcular la relación legal entre el oro y la plata en un sistema monetario cualquiera se dividen dos elementos homólogos que correspondan cada uno a un metal distinto (*) por lo que resultarán relaciones de los pies monetarios P y P' (**), de la cantidad de metal fino de la unidad y de la misma cantidad de dos monedas cualesquiera previa la combinación con los valores de estas monedas. Así tendremos los casos siguientes:

1.° Los pies monetarios respectivos de oro y plata nos dan el valor monetario de una unidad de peso de metal puro **(138)** por lo cual la relación de estos números

$$R = \frac{P}{P'}$$

(*) En este problema es indiferente emplear como dividendo uno u otro de los dos elementos que sirven para determinar la relación, pues basta considerar, que si el cociente obtenido es mayor que la unidad representa relación de oro a plata, y si dicho cociente es menor que la unidad la relación que representa es la de plata a oro.

(**) Todas las cantidades referentes a la plata se representan por las mismas letras que las del oro, pero seguidas de un acento.

es la relación buscada, que se expresa diciendo que *la relación entre el oro y la plata en un sistema monetario, es la misma que existe entre los pies de los dos metales.*

2.° Considerando la cantidad de metal fino de la unidad fundamental es indudable que a mayor cantidad de un metal, menor valor del mismo con relación al otro, es decir que si a la notación de los pesos **(161)** la damos la indicación especial de unidad fundamental, esta relación habría de ser

$$R = \frac{F'_u}{F_u} = \frac{A'_u L'}{A_u L}$$

que en forma de regla diríamos que *la relación bimetálica en un sistema es la inversa de la que exista entre los pesos de metal fino de la unidad fundamental,* concepto éste que en nada varía la nota de la página anterior respecto al valor numérico de dicha relación.

3.° *La relación entre el oro y la plata en cualquier sistema monetario, con una sola ley para los dos metales, es la inversa de los pesos que en cada metal corresponden a la unidad fundamental del sistema,* valor deducido al simplificar el último miembro de las igualdades anteriores por tener iguales las dos leyes.

4.° *La relación entre el oro y la plata es igual a la que existe entre los metales finos de dos monedas cualesquiera multiplicada por la relación inversa de los valores de dichas monedas,* ya que llamando F_m y F'_m los respectivos metales finos, los que en virtud de ellos habrían de corresponder a la unidad fundamental serían respectivamente

$$F_m : V \qquad \text{y} \qquad F'_m : V'$$

y según el caso 2.° la relación bimetálica tendría que ser

$$R = \frac{F_m : V}{F'_m : V'}$$

y de aquí efectuando las divisiones indicadas por cambio en los términos del quebrado, y separando luego los productos de dichos términos en productos de quebrados, resulta la fórmula enunciada

$$R = \frac{F_m : V}{F'_m : V'} = \frac{F_m \times V'}{F'_m \times V} = \frac{F_m}{F'_m} \times \frac{V'}{V}$$

5.º Considerando que se puede sustituir el metal fino por su valor **(161)** la expresión anterior se transforma en

$$R = \frac{A_m\, L}{A'_m\, L'} \times \frac{V'}{V} = \frac{A_m}{A'_m} \times \frac{L}{L'} \times \frac{V}{V'}$$

que nos dice que *la relación entre dos metales monetarios es igual al producto de las razones directas de los pesos y leyes de dos monedas cualesquiera por la inversa de los valores de las mismas monedas*, y de cuya expresión pueden deducirse todas las cuatro anteriores como casos particulares.

Ejemplos: 1.º) Hallar la relación bimetálica en los Países que formaban la Unión latina, conociendo los pies monetarios respectivos.

$$R = \frac{5444'44}{222'22} = 15'50$$

2.º) Siendo el metal fino contenido en la moneda suiza de 5 francos de 1'45161 gramos de oro o bien 22'50 gramos de plata con igual ley, encontrar la relación entre ambos metales.

$$R = \frac{22'50}{1'46161} = 15'50$$

3.º) Calcular la relación entre el oro y la plata en los Estados Unidos, donde el dollar de oro pesa 1'672 gramos y el de plata 26'729 teniendo igual ley las dos monedas.

Aplicando la relación del apartado 3.º tendremos:

$$R = \frac{26'729}{1'672} = 15{,}988$$

4.º) Hallar la relación que existe entre el oro y la plata en España para las monedas divisionarias de plata tomando por base el centén y la pieza de 2 pesetas.

Calculando el metal fino de cada moneda para aplicar la expresión del apartado 4.º, tenemos:

Metal fino del centén $8'06451 \times 0'900 = 7'258059$ gramos.

Metal fino de las 2 pesetas $10 \times 0'835 = 8'350$ gramos.

y aplicando ahora la expresión a que nos referíamos

$$R = \frac{8'350 \times 25}{7'258059 \times 2} = 14'38$$

5.º) Hallar la relación entre el oro y la plata según la ley monetaria inglesa sabiendo que el soberano de este país pesa 7'98805 gramos vale 20 chelines y tiene por título $0'91\widehat{6}$, y que el florín de plata que pesa 11'310 gramos vale 2 chelines y tiene la ley de 0'925.

Aplicando la última expresión la relación buscada será:

$$R = \frac{7'98805 \times 0'91\widehat{6} \times 2}{11'310 \times 0'925 \times 20} = 0'0699$$

y teniendo presente que por ser el cociente menor que la unidad esta relación es la de la plata al oro su inversa sería 14 y $^{2}/_{7}$; que es la forma en que generalmente se expresa la relación bimetálica inglesa.

163.—Cálculo de la talla de las monedas. - De todas las tallas es indudable que ha de ser la más importante la que se refiera a la unidad monetaria, pues aunque no se acuñe moneda efectiva de igual valor que la unidad monetaria siempre será un elemento fundamental del sistema la talla que ahora nos proponemos determinar; pero teniendo presente que esta determinación ha de hacerse en función de todos los demás elementos monetarios dividiremos este párrafo para facilitar el estudio, haciendo después idéntica división en los demás cálculos de los otros elementos.

1.° *Talla de la unidad fundamental.*—Una vez fijado el pie monetario y la ley de las monedas, podremos determinar el peso de metal aleado que corresponde a la unidad de peso en metal fino mediante la siguiente relación, que sirve para cualquier peso de metal.

$$A = \frac{1}{L}$$

Como ya sabemos que la talla es el número de monedas de cierto valor que pueden obtenerse de la unidad de peso, y el peso aleado que nos da la relación anterior produce un número de monedas igual al pie monetario, tendremos para cálculo de la talla la expresión

$$T = \frac{P}{A} = \frac{P}{1 : L} = P \times L$$

por descomposición del denominador y cambio del inverso, o sea que *la talla de la unidad monetaria es igual al pie monetario multiplicado por la ley.*

Ejemplo: Calcular la talla de la peseta en oro.

$$T = 3444\widehat{4} \times 0{\cdot}9 = 3099\widehat{9} = 3100$$

2.° *Talla de una moneda cualquiera.* – Si para distinguir la talla que ahora vamos a calcular la representamos por t podemos obtenerla, una vez conocida la talla fundamental que acabamos de hallar, mediante la siguiente relación:

$$t = T : V$$

es decir, que *la talla de una moneda cualquiera es igual al cociente de la talla unitaria por el valor de la moneda.*

Si quisiéramos obtener directamente la talla de una moneda bastaría aplicar la definición de talla y tendremos, llamando p al peso de la moneda y K a la unidad de peso a que se refiere la talla:

$$t = \frac{K}{p}$$

o sea que *la talla de una moneda cualquiera es igual al cociente de dividir por su peso la unidad a que deba referirse*, haciendo, si es preciso, la transformación de unidades para que los dos pesos se expresen en la misma.

Ejemplo: Hallar la talla de la moneda española de 100 pesetas.

Según encontramos en el ejemplo anterior la talla para el oro en España es de 3100 pesetas, por tanto la de la moneda que deseamos será:

$$t = 3100 \div 100 = 31$$

Si aplicamos la segunda regla, como el peso de la moneda que nos ocupa es de 32'25806 gramos, su talla deberá ser:

$$1000 \div 32'25806 = 31$$

que es la misma anteriormente encontrada con un error muy pequeño que hemos despreciado.

164.—Cálculo de la ley monetaria.—De la definición de la ley y de las relaciones halladas antes se deduce para valores de la ley los siguientes, que no traducimos en reglas por su sencillez.

$$L = \frac{F}{A} \qquad \text{y} \qquad L = \frac{T}{P}$$

y si en la expresión que da la talla de una moneda cualquiera despejamos el valor de T y le sustituímos en la segunda de las igualdades anteriores, encontraremos para valor de la ley:

$$L = \frac{tV}{P}$$

y si, todavía, en esta última igualdad sustituímos el valor de t hallaremos otro valor para la ley que será:

$$L = \frac{K \times V}{p \times P}$$

Aunque no sea de gran necesidad práctica, deduciremos una última expresión para la ley monetaria haciendo intervenir la relación bimetalista según las fórmulas del 2.° y 5.° casos de esta relación. Estas expresiones de la ley serán:

$$L = \frac{A_u \times R}{A'_u \times L'}; \quad L' = \frac{L \times A_u \times R}{A'_u}, \qquad \| \qquad L = \frac{A'_m \times L' \times V}{R \times A_m \times V'}; \quad L' = \frac{L \times A_m \times RV'}{A'_m \times V}$$

Ejemplos: 1.° La moneda alemana de 5 marcos tiene un peso de plata aleada de 25 gramos y su metal fino es de 12'5 gramos. ¿Cuál es la ley de estas monedas?

$$L' = 12'5 \div 25 = 0'500 \text{ que es la ley buscada}$$

2.° Siendo 5444'44 pesetas el pie del oro en España y 5100 la talla del mismo, ¿Cuál es la ley de nuestras monedas?

$$L = 5100 \div 5444'44 = 0'900$$

3.° El pie para el kilo de oro fino en las monedas de la Unión escandinava es de 2480'15 coronas y el peso de la moneda de 5 coronas es 2'240 gramos. Averiguar la ley en los países de la Unión.

$$L = \frac{1000 \times 5}{2'240 \times 2480'15} = 0'900 \text{ despreciando el error.}$$

4.° La relación entre el oro y la plata en Inglaterra es de $14\,^2/_7$ y la ley para las monedas de plata es de 0'925. ¿A qué ley se acuña el oro si el soberano que vale 20 chelines pesa 7'988 gramos de oro aleado y el chelín 5'655 gramos de plata también aleada?

Mediante la aplicación de la última de las fórmulas obtendremos:

$$L = \frac{5'655 \times 0'925 \times 20}{14'2857 \times 7'988 \times 1} = 0'91685$$

que con respecto a la de $0'91\widehat{6}$, que es la verdadera, hay un error proviniente de la inexactitud de los términos que intervienen en el problema.

165.—Transformación de leyes.—Al estudiar los elementos monetarios vimos que la ley era además la base de la medida de los metales preciosos por lo que entonces estudiamos este elemento como tal medida y ahora hemos de completar el cálculo de la ley con su transformación como tal elemento de medida, transformación que consiste en referir a decimal la que no lo fuese o en expresar en complejo la ley decimal, que es sólo un caso particular del general de medidas estudiado **(148)**; pero que detallamos ahora por la relación con el cálculo monetario.

Ya vimos **(137)** que la ley no decimal se expresa por que-

brados cuyo denominador es 768 para el oro y 960 para la plata, por lo que bastará conocer el numerador no decimal y luego transformarle en complejo según la división de la medida de la ley (**137**). Efectivamente, el valor L de la ley decimal da para numerador de la ley compleja o inglesa

$$960L \text{ para la plata} \quad \text{y} \quad 768L \text{ para el oro}$$

Después de conocido el numerador de la ley inglesa se referirá a la ley standard hallando el exceso o defecto de este numerador sobre el numerador tipo (**137**).

Ejemplos: 1) Representar en milésimas la ley de un lingote de oro de $W0-0-3-1$.

Se trata de una ley inferior a la standard y reduciendo a octavos el complejo que la expresa tenemos que el número de octavos es

$$(3 \times 4 + 1)\,2 = 26 \text{ octavos}$$

y la ley inglesa será

$$\frac{704 - 26}{768} = \frac{678}{768}$$

que da para ley decimal 0'8828.

2) Expresar en milésimas la ley $B2-3$ de un objeto de plata.

También ahora hemos de reducir esta expresión al quebrado equivalente mediante la suma del numerador standard con los 11 cuartos que equivalen a la marca anterior, teniendo por consiguiente, como resolución que se pide en el ejemplo

$$\frac{888 + 11}{960} = \frac{899}{960} = 0'9364$$

3) Determinar la expresión de ley inglesa equivalente a la de 0'940 para oro y para plata.

El numerador para ley de oro hemos visto que ha de ser

$$0'940 \times 768 = 721'92 = 722 \text{ octavos}$$

y por consiguiente la ley inglesa será

$$\frac{722}{768}$$

que excede a la ley standard en $722 - 704 = 18$ octavos, los que reducidos a complejo dan 2 granos y 1 cuarto, siendo, pues, la expresión de esta ley $B0-0-2-1$.

Cuando se tratase de plata el numerador de la ley inglesa sería

$$0'940 \times 960 = 902{,}4 \text{ cuartos}$$

la cual excede a la ley standard en $902'4 - 888 = 14'4$ cuartos y la expresión de la ley sería $B3-2'4$.

166.—Determinación del pie monetario.—De las relaciones anteriormente establecidas se deduce para valor del pie monetario las siguientes expresiones:

$$P = \frac{T}{L} = \frac{tV}{L} = \frac{KV}{pL}$$

que por su gran sencillez juzgamos innecesario traducir en reglas.

Ejemplos: 1.° ¿Cuál será el pie de las monedas españolas de plata si la talla para la unidad fundamental es de 200 piezas en kg?

Efectuando la división indicada por la primera fórmula tendremos:

$$P = 200 : 0{\cdot}900 = 222{\cdot}\widehat{2}$$

2.° Hallar el pie del oro en la Unión latina sabiendo que con un kilogramo de metal aleado se fabricaban 155 monedas de 20 francos.

Por medio de la segunda relación obtendremos:

$$P = \frac{155 \times 20}{0{\cdot}900} = 3444{\cdot}\widehat{4}$$

3.° Calcular el pie adoptado para el oro en la Unión escandinava si la moneda de 10 coronas a la ley de 0'900 pesa 4'48 gramos.

Mediante la aplicación de la última relación se tiene:

$$P = \frac{1000 \times 10}{4{\cdot}48 \times 0{\cdot}900} = 2480 \text{ coronas.}$$

167.—Determinación del peso de las monedas.—De la definición de talla se deduce que el peso de una moneda cualquiera se obtiene multiplicando por su valor el cociente de la unidad de peso por la talla de la unidad fundamental, y en general por transformación de las expresiones anteriormente halladas, al despejar el elemento p_u se obtiene para la unidad fundamental

$$p_u = \frac{K}{P \times L}$$

y para otra cualquiera moneda

$$p_m = \frac{K}{t} = \frac{KV}{T} = \frac{KV}{LP};$$

Ejemplos: 1.° ¿Qué peso tendría la unidad fundamental de nuestro sistema monetario si se acuñase, sabiendo que el kilogramo de oro fino que se acuña a la ley de 0'900 produce 3444'$\widehat{4}$ pesetas?

$$p = \frac{1000}{3444{\cdot}\widehat{4} \times 0{\cdot}900} = 0{\cdot}32258 \text{ gramos.}$$

2.° Hallar el peso que correspondería a una moneda de nuestro sistema que tuviese un valor de 62 pesetas.

Por medio de la relación tercera de las encontradas hallaremos:

$$p = \frac{1000 \times 62}{3100} = 20 \text{ gramos.}$$

3.° En el antiguo sistema austriaco el pie para la plata era de 90 florines por kilogramo y la ley de 0'900. Hallar según esos datos el peso de la moneda de 2 florines.

$$p = \frac{1000 \times 2}{0'900 \times 90} = 24'198 \text{ gramos.}$$

4.° La talla de la moneda española de 25 pesetas en oro es de 124. Averiguar el peso de esta moneda.

De la segunda relación se obtiene:

$$p = 1000 : 124 = 8'06451 \text{ gramos.}$$

168.—Cálculo del valor de una moneda.—De todos los cálculos que se originan dentro de un mismo sistema monetario por la relación entre sus diferentes elementos es este que ahora vamos a determinar el menos necesario en la práctica, si bien sea quizás el de más utilidad cuando los cálculos se hacen para relacionar unos sistemas con otros.

Del mismo modo que en los casos anteriores, despejando V en todas las fórmulas en que interviene se tendrá:

$$V = \frac{T}{t} = \frac{PL}{t} = \frac{PLp}{K} = \frac{Tp}{K}$$

y si queremos que intervengan los elementos de los dos metales en el cálculo, el valor de las respectivas monedas de oro o plata sería:

$$V = \frac{V'RAL}{A'L'} \quad \text{y} \quad V' = \frac{VA'L'}{RAL}$$

Ejemplos: 1.° Hallar el valor de una moneda española que se acuña a la ley de 0'900 en plata y tiene por talla 40.

Siendo el pie de la plata en nuestro país $222'\widehat{2}$ mediante la aplicación de la segunda fórmula tenemos:

$$V = \frac{222'\widehat{2} \times 0'900}{40} = 5 \text{ pesetas.}$$

2.° ¿Qué valor tendría en el sistema monetario inglés una moneda de 15 gramos?

El pie monetario inglés es de 136'568 £ expresado en unidades decima-

les y la ley de oro 0'916, por lo que el elemento buscado se encontrará aplicando la penúltima de las fórmulas anteriores y tendremos:

$$V = \frac{136'568 \times 0{,}916 \times 15}{1000} = 1'8778 \text{ £}$$

3.º Siendo el peso de una moneda de oro 16'145 gramos y la talla de la unidad monetaria en el mismo sistema 250, calcular el valor de dicha moneda si la unidad de peso es el kilogramo.

La última fórmula nos da para este valor

$$V = \frac{16'145 \times 250}{1000} = 4'036 \text{ unidades fundamentales.}$$

169.—Número de monedas de un lingote.—Puede ser muy necesario en la práctica el conocimiento del número de monedas de cierta clase que pueden obtenerse de un lingote cuyo peso y ley sean conocidos, siendo requisito indispensable saber la medida de estos dos elementos en el lingote porque sin ellos no tendríamos la verdadera medida del objeto que constituye.

El cálculo que puede originar el problema que estamos examinando se reduce a *dividir el metal fino del lingote por el mismo de la moneda que deseamos obtener.*

Ejemplo: ¿Cuántas libras esterlinas se podrán acuñar con un lingote cuyo peso es de 2 libras troy y 5 onzas y la ley $^{20}/_{21}$?

El peso del metal fino en onzas troy es para el lingote

$$27 \times {}^{20}/_{24} = 22'50 \text{ onzas}$$

y para la libra esterlina ese metal fino será, según el pie monetario de Inglaterra *(tabla* **XVII***)*

$$12 : 50'978 = 0'2354 \text{ onzas}$$

y aplicando la regla anterior se tiene:

$$22'50 : 0'2354 = 95'582 \text{ £}$$

que es el número buscado.

170.—Relación entre sistemas diferentes.—Las expresiones matemáticas que dan a conocer las relaciones que ligan los diferentes sistemas monetarios pueden establecerse por comparación de cualesquiera elementos de un sistema con sus elementos homólogos en todos los demás; pero como de todas estas relaciones, las de interés práctico y utilidad en el Comercio son las que se refieren a las unidades fundamentales de cada sistema sólo a estos casos particulares hemos de

atenernos en nuestro estudio, no sin que antes hagamos constar que, tratándose de relación entre elementos homólogos de dos sistemas, el resultado estaría siempre dado por el cociente de los números que respectivamente expresen dichos elementos homólogos.

171.– Paridad monetaria. – La paridad de las monedas es el valor de una moneda cualquiera expresado por medio de monedas de especie diferente, y teniendo en cuenta que esta moneda que sirve para expresar el valor de la primera es en la práctica la unidad monetaria, podemos decir que la *paridad de una moneda es el número de unidades de otro sistema que tienen igual valor*.

La paridad que acabamos de definir es la paridad intrínseca o monetaria llamada así por que el valor que ella expresa es el que tiene la moneda en sí, y dependiente sólo de las relaciones establecidas por la ley monetaria, debiendo distinguirse esta paridad de la paridad comercial o práctica que es el valor de la moneda como medio de pago en países de diferente sistema monetario, siendo sólo propia de este lugar la primera, toda vez que la segunda hemos de estudiarla cuando tratemos de las diferentes formas de efectuar pagos.

La paridad intrínseca puede establecerse de las tres formas siguientes: refiriendo a unidades extranjeras el valor de las monedas nacionales; refiriendo a unidades nacionales el valor de las monedas extranjeras, y refiriendo el valor de las monedas extranjeras a unidades de otros sistemas también extranjeros. Sin embargo, como procedimiento general de paridad referida a cualquier moneda, podemos calcular el número de monedas de una clase a que equivale otra cualquiera con sólo considerar la moneda cuya paridad tratamos de hallar como un lingote de peso y ley conocido y aplicar la regla dada en el párrafo **169**, o si se quiere, ya que el valor del metal fino se halla en función del peso y ley de las monedas, la regla a que acabamos de referirnos da origen a la siguiente expresión:

$$M = \frac{LA}{L'A'} = \frac{L}{L'} \times \frac{A}{A'}$$

en la que M representa la paridad buscada y las demás letras

las leyes y pesos aleados respectivos de las dos monedas que entran en el cálculo; y traduciendo en regla la expresión anterior tenemos *que para calcular la par intrínseca de una moneda con respecto a otra del mismo metal, bastará multiplicar la relación de sus leyes por la de sus pesos referidos a igual unidad.*

La regla que antecede hace completamente inútil la indicación de un autor español que dice ha de verificarse este cálculo por medio del análisis, empezando por hallar el metal fino de las dos monedas para luego proceder en la forma que acabamos de indicar, puesto que en toda cuestión matemática que haya de resolverse aplicando alguna fórmula, es indispensable calcular por cualquier otro procedimiento los datos de la fórmula que no se den en el problema, sin que sea forzoso que ese cálculo auxiliar se haga por análisis o por cualquier otro medio.

Si en la relación anteriormente hallada suponemos que sean iguales las leyes, quedará simplificada, teniéndose:

$$M = A : A'$$

es decir que *la paridad de una moneda respecto de otra de igual ley es igual a la relación de sus pesos respectivos.*

Ejemplos: 1.° Calcular la paridad de la libra esterlina en centenes españoles.

Siendo la ley de la libra esterlina de $0{\cdot}91\widehat{6}$ y su peso de 7'988 gramos, y la ley del centén de 0'900 y su peso 8'0645 gramos tendremos para la paridad buscada:

$$M = \frac{0{\cdot}91\widehat{6}}{0{\cdot}900} \times \frac{7{\cdot}988}{8{\cdot}0645} = 1{\cdot}0088 \text{ centenes}$$

2.° Hallar la paridad del guillermo de Holanda en dólares.

Teniendo en cuenta que la ley de las dos monedas es igual y que respectivamente pesan 6'72 y 1'672 gramos tenemos:

$$1 \text{ guillermo} = 6{\cdot}72 : 1{\cdot}672 = 4{\cdot}019 \text{ dólares.}$$

172.—Paridades unitarias.—De las tres formas en que hemos dicho que podía establecerse la paridad monetaria, vamos a empezar por la segunda, que a la vez es la más importante en cuanto respecta a nuestra patria, como veremos cuando estudiemos las cuestiones de cambio, en las que será casi la única de que hemos de servirnos, aunque sin abandonar las otras dos formas que así mismo hemos de utilizar en los cambios de plazas extranjeras.

La paridad unitaria es la misma que hemos examinado en el párrafo anterior, si bien referida en las dos monedas a la unidad fundamental de cada sistema monetario, esté o no esté acuñada dicha unidad.

Dividiremos este cálculo en las tres partes a que dan origen las repetidas formas a que antes aludíamos.

1.º *Paridad extranjera con relación a España.* Desde luego es posible emplear en este caso el procedimiento seguido cuando se trataba de referir la paridad de dos monedas cualesquiera, pero si deseamos que dicha paridad quede expresada en unidades de cuenta españolas podemos y aún debemos servirnos de la siguiente proporción: *metal fino de la moneda nacional : a metal fino de la extranjera :: el valor de la nacional : a la par buscada*, proporción que expresaremos

$$Fn : Fe :: Vn : M$$

y traduciendo en regla el valor que da esta proporción vemos que *la par intrínseca de una moneda extranjera en pesetas se obtiene multiplicando el metal fino de la moneda extranjera por el valor de la moneda nacional y dividiendo este producto por el metal fino de la moneda nacional.*

Suele indicarse para resolver esta cuestión la formación de una conjunta, en la que es preciso que intervengan dos veces en el primer miembro de las igualdades y otras dos veces en el segundo, las unidades de peso referidas a metal puro y a metal aleado y aunque cada una de esas dos veces que interviene dicha unidad de peso hace referencia a una moneda, la formación de la conjunta por ese motivo es sumamente difícil de comprender para los no iniciados en estas cuestiones, muy expuesta a errores por cambio de lugar de términos, que todos se expresan en gramos, y por tanto incomparablemente más engorrosa que los procedimientos de fórmulas y analíticos, por cuya causa dejamos de estudiar la conjunta que para este caso se propone, y asimismo dejaremos de indicar este procedimiento de resolución para todas aquellas cuestiones en que no sea por lo menos igual de fácil que los procedimientos de fórmulas.

Si para facilitar los cálculos a que da origen la proporción anterior calculásemos de antemano el metal fino que corresponde a una peseta, tendremos un divisor constante y además reduciremos a la unidad el tercer término de la misma y con ello al factor del producto que refiere la regla anterior. Hecho el cálculo del metal fino de una peseta encontraremos que es

de 0'290322 gramos de oro y de 4'5 gramos de plata, y por tanto, la regla se transforma en la siguiente:

Para hallar la par intrínseca de una moneda extranjera en pesetas se dividirá por 0'290322 o por 4'5, según que dicha moneda sea de oro o de plata, el producto del peso y ley de la misma.

Ejemplos: 1.° Hallar la paridad en pesetas del escudo antiguo de Chile que pesaba 2'995 gramos a la ley de 0'916 sabiendo que la moneda española de oro de 5 pesetas tiene la ley de 0'900 y su peso es de 1'61290 gramos.

Formando la proporción establecida para este caso tenemos, después de haber calculado los metales finos de las dos monedas que son respectivamente 2'74541 y 1'45161 gramos.

$$1'45161 : 2'74541 :: 5 : x$$

$$x = \frac{2'74541 \times 5}{1'45161} = 9'456 \text{ pesetas.}$$

2.° La moneda portuguesa de oro llamada corona tiene una cantidad de oro puro equivalente a 16 257 gramos. Averiguar su paridad en pesetas.

Aplicando la última regla tendremos para esa paridad.

$$16'257 : 0'290322 = 55\,996 \text{ pesetas} = 56'00$$

3.° Hallar la paridad del dollar de los Estados Unidos que pesa 1'672 gramos a la ley de 0'900.

Calculando el metal fino de esta moneda hallamos 1'5048 gramos y haciendo la misma división del ejemplo anterior

$$1'5048 : 0'290322 = 5'18 \text{ pesetas}$$

que es la paridad de este país

4.° ¿Cuál será la paridad de la piastra mejicana de 27'073 gramos acuñada a la ley de 0'9026?

El peso del metal fino de esta moneda es de 24'43874 y por consiguiente su paridad habrá de ser

$$24'43874 : 4'5 = 5'4308 \text{ pesetas.}$$

2.° *Paridad española con relación al extranjero* – Esta paridad es el valor que en monedas extranjeras tienen las monedas españolas y se halla de modo análogo al precedente, si bien, para que la proporción fundamental pueda ser aplicada a este caso hemos de cambiar los términos que allí hacen referencia a monedas extranjeras por los correspondientes de monedas nacionales y viceversa.

Ejemplo.—Hallar en chelines austriacos el valor de la peseta si la primera de estas monedas tiene un pie de 4725'5 por kilogramo.

El peso del metal fino que corresponde al chelín austriaco es de 0'211716 luego, la peseta valdrá

0 290522 : 0'211716 = 1'371 chelines por cada peseta.

3.° *Paridad extranjera mútua.* —Para este caso de paridad se utiliza la fórmula que encontramos en el párrafo **171** cuando las dos monedas que se relacionan por la paridad son del mismo metal; pero cuando fuesen de metales diferentes sería indispensable hallar la paridad de la moneda de plata, o, mejor dicho, de la unidad del sistema monometalista plata, con relación a otra moneda de este metal en el sistema monometalista oro (no debe olvidarse que los países bimetalistas por la ley son monometalistas oro en la realidad y que como tales se considerarán en este caso).

Hallada la paridad monetaria de las monedas de plata será preciso aumentarla del exceso de valor que el oro tenga sobre la plata según las cotizaciones de estos metales en los mercados, si se desea obtener el verdadero valor en oro de la moneda de plata; pero para nuestro objeto basta con admitir como paridad en oro la que resulta en plata, siendo ésto suficiente tanto porque ya por ella aparece la relación de los dos sistemas monetarios, cuanto porque la rectificación de esa paridad por el precio del mercado sale fuera de los cálculos sobre sistemas monetarios, entrando de lleno en el del comercio de metales preciosos, que estudiaremos en otro lugar de nuestra obra y al que remitimos al lector.

Como ejemplos de este caso de paridades sirven los del referido párrafo **171**, además que en la *tabla* **XX** presentamos la paridad relativa de todas las unidades fundamentales de los sistemas monetarios, a fin de que evite este cálculo y que sirva de comprobación al mismo.

Ejercicios números **156** al **162; 171** al **173; 175; 178** al **184; 186; 191** al **210; 1273** y **1274**.

Problemas sobre elementos monetarios los ejercicios números **167, 168, 170, 174, 176, 185, 187**.

Problemas sobre monedas y mediciones los ejercicios números **163** al **166; 177; 188** al **190**.

XII

MEDICIONES

173.—Objeto y norma general de los cálculos de mensura. – Las unidades metrológicas no siempre dan directamente la cantidad del objeto a que se refieren las operaciones prácticas, por lo que han de seguirse medios indirectos de determinación de ellas, o bien calcular las unidades de medida a que corresponde un objeto en virtud de propiedades físicas o geométricas del mismo. En unos u otros casos han de tenerse presente fórmulas que por intervención de unidades directas de medida nos den las que corresponden al objeto o caso considerado.

En la seguridad de que el lector tiene los conocimientos de Geometría elemental necesarios a comprender el estudio del Cálculo mercantil nos limitaremos a presentar las fórmulas aplicables, debiendo advertir solamente como norma general de todos los cálculos de mediciones, que si los datos estuvieran dados en más de una unidad metrológica deben transformarse todos en una sola unidad para operar siempre con números homogéneos, con lo cual tendremos el resultado expresado en la misma unidad con que se opere sin necesidad de nuevas transformaciones engorrosas, y sin más limitación que lo relativo a las superficies y volúmenes, en cuyos casos el resultado será en unidades cuadradas o cúbicas correspondientes a la unidad lineal empleada, o sea que si se opera con metros el resultado serán metros cuadrados o cúbicos y si se opera con pulgadas serán pulgadas cuadradas o cúbicas los resultados. Esto hace que en casos de necesitarse el resultado en unidades métricas de capacidad deba operarse con decímetros lineales para que el resultado sean litros.

174.—Medidas de líneas y ángulos.—Nos referiremos siempre que sea posible al gráfico de la pág. 190 citando sólo el número romano de la figura correspondiente.

Angulo del triángulo equilátero (I)..... $60°$

Suma de los ángulos de un polígono..... $180°(n-2)$

Angulo de un polígono regular... ..... $\frac{180°(n-2)}{n}$

Angulo en el centro de un polígono regular $\frac{360°}{n}$

Longitud de la circunferencia.. ..... $2\pi r$

» de un arco (XIII y XV).... ..... $\frac{\pi r \alpha}{180}$

Lado del triángulo equilátero inscrito (I).. $l = r\sqrt{3}$

Altura del triángulo equilatero (I)..... $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Lado del triángulo equilátero..... $l = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Hipotenusa del triángulo rectángulo (III)... $H = \sqrt{a^2 + b^2}$

Perímetro del triángulo rectángulo (III).... $P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$

Diagonal del cuadrado (IV) ..... $d = l\sqrt{2}$

Lado del cuadrado inscrito (IV)..... $l = r\sqrt{2}$

Lado del rombo (VII).... ..... $l = \frac{\sqrt{d^2 + d'^2}}{4}$

175.—Cálculos de superficies.—Las más frecuentes en el Comercio son las siguientes, referidas por el número de orden de la fig. 38.

Triángulo cualquiera (I, II, III)..... $A = \frac{ab}{2}$

» » inscrito (II)..... $A = pr = \sqrt{p(p-x)(p-z)(p-b)}$ (*)

Triángulo equilátero inscrito (I)..... $A = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

Triángulo equilátero (I) ..... $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$

Triángulo rectángulo (III)..... $A = \frac{a\sqrt{H^2-a^2}}{2} = \frac{b\sqrt{H^2-b^2}}{2}$

Cuadrado (IV). .... $A = l^2 = \frac{d^2}{2}$

Cuadrado inscrito (IV)..... $A = 2r^2$

Rectángulo y paralelógramo (V y VI) ..... $A = ab$

Rombo (VII)..... ..... $A = ab = \frac{dd'}{2}$

(*) Representamos por *p* el semiperímetro del polígono.

Trapecio (VIII)..... $A = \frac{a(B+b)}{2} = aXMN$

Cuadrilátero inscrito (IX)..... $A = \sqrt{(p-x)(p-z)(p-v)(p-u)}$ (*)

Cuadrilátero circunscrito (X)..... $A = \frac{(u+v+x+z)r}{2} = pr$ (*)

Polígono regular (XI)..... $A = ap = \frac{aln}{2}$ (*)

Exágono regular (XI)..... $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = 2r^2\sqrt{3}$

Octógono regular inscrito (IV)..... $A = 2r^2\sqrt{2} = 2l^2\sqrt{2+1}$

Dodecágono regular inscrito (XVIII)..... $A = 3R^2 = 3l^2(2+\sqrt{3})$

Polígono cualquiera circunscrito (XIV).... $A = pr$ (*)

Círculo (II)..... $A = \pi R^2$

Sector circular (XIII)..... $A = \frac{\pi r\alpha}{360} = \frac{r \times \text{arco FED}}{2}$

Segmento circular (XIII)..... $A = \frac{\pi r\alpha'}{360} - \frac{b(r-f)}{2}$

Corona circular (XV)..... $A = \pi(R+r)(R-r)$

Trapecio circular (XV)..... $A = \frac{(B+b)(R-r)}{2} = \frac{\pi(R^2-r^2)}{360}$

Elipse (XXV)..... $A = \pi Ee$

Lateral del prisma (XVI y XIX)..... $A = aln =$ Perimetro x a

Lateral de la pirámide regular (XX)..... $A = pa = \frac{aln}{2}$ (*)

Lateral del cono recto (XXI)..... $A = \pi ar$

Lateral del cilindro recto (XXII)..... $A = 2\pi ar$

Lateral del tronco de pirámide (XI)..... $A = a(p+p')$ (*)

Lateral del tronco de cono recto (XXIII)... $A = a\pi(R+r)$

Lateral del tronco de cilindro recto (XXIV). $A = \pi rE$

Cubo (XVII)..... $A = 6a^2$

Tetraedro (XXVI)..... $A = a^2\sqrt{3}$

Octaedro (XXVII)..... $A = 2a^2\sqrt{3}$

Icosaedro (XXVIII)..... $A = 5a^2\sqrt{3}$

Dodecaedro (XXIX)..... $A = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

Esfera (XII)..... $A = 4\pi R^2 = \pi d^2$

Casquete y zona esféricas (XII)..... $A = 2\pi Ra$

176. -Determinación de volúmenes.—Salvo el caso en que puedan utilizarse medidas de capacidad y algunos especiales, como piedras, maderas etc. que disponen de medidas efectivas especiales, los volúmenes se determinan por fórmula de las que ahora relacionamos las principales de cuerpos geométricos.

(*) Representamos por p el semiperímetro del polígono.

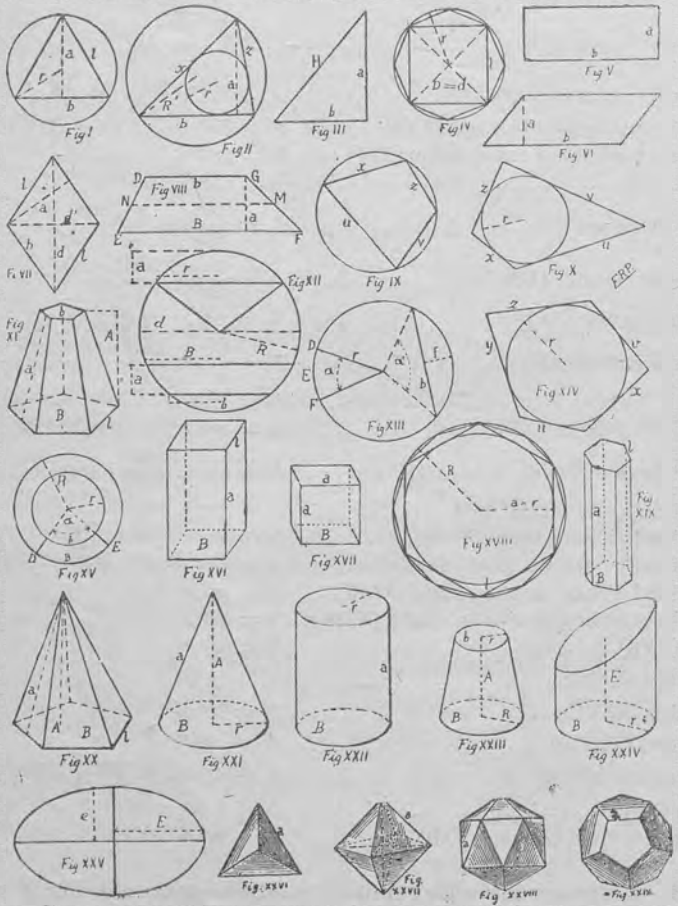


Fig. 38. Elememtos de medición de figuras geométricas.

Cubo (XVII)..... $V = a^3$

Paralelepípedo y prisma recto (XVI y XIX). $V = Ba$

Cilindro circular recto (XXII).. ..... $V = Ba = \pi r^2 a = \pi a\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2$

Pirámide (XX)..... $V = \frac{BA}{3}$

Cono (XXI)..... $V = \frac{BA}{3} = \frac{a\pi r^2}{3}$

Tronco de cilindro regular (XXIV)..... $V = \frac{BE}{2} = \frac{\pi r^2 E}{2}$

Tronco de pirámide regular (XI)..... $V = \frac{A(B + b + \sqrt{Bb})}{3}$

Tronco de cono regular (XXIII) ..... $V = \frac{A(R^2 + r^2 + Rr)}{3}$

Esfera (XII)..... $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6}$

Sector esférico (XII)..... $V = \frac{2\pi r^2 a}{3}$

Segmento esférico de una base (XII)..... $V = \frac{\pi a(a^2 + 3r^2)}{6} = \frac{\pi a^2(3R - a)}{3}$

Segmento esférico de dos bases (XII)... .. $V = \frac{a\pi(3B^2 + 3b^2 + a^2)}{6}$

Elipsoide..... $V = \pi abc$

Cuerpo irregular. Si su tamaño lo permite se introduce en una vasija de capacidad conocida y llenándola después de agua, la diferencia entre el agua echada y la capacidad de la vasija será el volumen del cuerpo, teniendo presente que el litro equivale al decímetro cúbico.

Ejercicios números **62; 77** al **103; 1422; XCI** al **XCIV**.

177.—Aforos.—El aforo consiste en determinar la cantidad de unidades de medida que corresponden a una mercancía, y en especial el volumen de un cuerpo o capacidad de un recipiente valiéndose de medidas tomadas sobre el mismo, por lo que serán aplicación de las mediciones directas o de las fórmulas antes relacionadas; pero como existen algunos casos en que esa determinación exige fórmulas especiales, estudiamos a continuación dichos casos.

178.—Aforo de toneles.—La fórmula irregular de estos envases han determinado diferentes procedimientos para su aforo, todos los cuales dan sólo una aproximación de la capacidad, variando hasta el fundamento geométrico de su determinación por semejanza relativa a ciertos cuerpos geomé-

tricos, teniéndose así fórmulas derivadas del cono, de la elipse, de la parábola, de arcos de círculo y de la elipse, y siempre en los cálculos de una u otra forma se representan por H la distancia entre las dos bases o fondos del tonel, por d y D los diámetros de las bases y de la panza, por r y R los respectivos radios.

179.—Fórmulas derivadas del cono. 1.° Si las duelas formasen un ángulo, resultaría el tonel formado por dos troncos de cono iguales unidos por su base mayor y la capacidad sería (**176**)

$$V = \frac{\pi H(R^2 + r^2 + Rr)}{3} \qquad [1]$$

2.° *Fórmula de Oughtred.* Como las duelas no son rectas, se corrige el error por defecto en la fórmula poniendo R en vez de Rr, con lo cual tenemos

$$V = \frac{\pi H(2R^2 + r^2)}{3} \qquad [2]$$

y si ponemos el diámetro en vez del radio, deberemos dividir por el cuadrado de 2 y resultará

$$V = \frac{\pi H(2D^2 + d^2)}{3 \times 4} = \frac{\pi}{12} H(2D^2 + d^2) = 0{,}2618H(2D^2 + d^2) \quad [3]$$

3.° *Fórmulas de Maitre y Guilmin.* Observando que es

$$R^2 + r^2 = (R - r)^2 + 2Rr$$

sustituyendo el segundo miembro en la fórmula del tronco de cono convierte el numerador de ella en

$$\pi H[3Rr + (R - r)^2]$$

y como la diferencia de los dos radios del tonel es una cantidad pequeña y por tanto menor aún su cuadrado, se suprime éste en la fórmula y así la capacidad del tonel será

$$V = \frac{\pi H}{3} 3Rr = \pi HRr$$

que al sustituir el radio por el diámetro, dividiendo por 4 el resultado, se convierte en

$$V = \frac{\pi}{4} HDd = 0{,}7854HDd \qquad [4]$$

y para corregir el error de suprimir el cuadrado de la diferencia de los radios propuso Maitre aumentar el coeficiente y hacer como fórmula bastante exacta

$$V = 0{,}8HDd \qquad [5]$$

Para que el error de esta última fórmula quede aun más disminuído se propuso la *fórmula de Guilmin*

$$V = 0{,}82dDH \qquad [6]$$

180.—Fórmulas derivadas del cilindro.—Si se sustituye cada medio tonel por un cilindro de la mitad de altura cuyas bases sean un fondo y la sección de la panza respectivamente, el volumen será

$$V = \tfrac{1}{2}\pi H(R^2 + r^2) \qquad [7]$$

Suponiendo con más exactitud que el tonel fuera un cilindro con diámetro intermedio entre los de la panza y los fondos, y poniendo la media aritmética de esos diámetros en la fórmula del cilindro nos daría para el volumen del tonel

$$V = \pi H\left(\frac{D + d}{2 \times 2}\right)^2 = \frac{\pi}{16} H(D + d)^2 = 0{,}19635H(D + d)^2 \qquad [8]$$

que es la *fórmula de Beziers*, pero que por ser también defectuosa se redondeó produciendo la *fórmula de Bernard*

$$V = 0{,}2H(D + d)^2 \qquad [9]$$

Considerando el tonel equivalente a un cilindro cuyo diámetro sería el de la panza disminuído en un tercio de diferencia con el diámetro de los fondos, se obtiene

$$V = 0{,}087266H(2D + d)^2 \qquad [10]$$

que es la *fórmula de la Convención francesa*, propia para toneles muy curvos, en la cual se emplea muchas veces el radio en vez del diámetro poniendo como radio del cilindro el

radio del fondo más los dos tercios de la diferencia con el de la panza, que es lo mismo que antes dijimos, o sea que con tal notación el volumen del tonel sería

$$V = \pi H[r + {}^{2}/_{3}(R - r)]^{2} = \frac{\pi}{4} H[d + {}^{2}/_{3}(D-d)]^{2} \qquad [10']$$

y sustituyendo el quebrado $^{2}/_{3}$ del segundo miembro por 0'66 tenemos la *fórmula de París*

$$V = \frac{1}{4}\pi H[d + 0{,}66(D - d)]^{2} \qquad [11]$$

Cuando la longitud del tonel es relativamente grande respecto a sus diámetros haciéndole casi cilíndrico debe ser mayor el segundo sumando del cuadrado de estas fórmulas hasta hacer el diámetro empleado casi idéntico al de la panza, y para estos casos ha sido propuesta la fórmula

$$V = \frac{\pi}{4} H \left[d + \frac{11}{10}(D - d) \right]^{2} \qquad [12]$$

Para corregir los errores de las suposiciones anteriores en primer lugar se halla la *fórmula de Dez.*

$$V = \pi H \left[R - \frac{3}{8}(R - r) \right]^{2} \qquad [13]$$

y en segundo la *derivada del centro de gravedad de la parábola* según la cual el tonel está formado por un cilindro y por un sólido que al rededor del cilindro engendra la curva de las duelas tomada como parábola y hallándose el centro de gravedad de la parábola a una distancia de la curva equivalente a los $^{2}/_{5}$ de la diferencia de los diámetros, deberá añadirse el complemento de esta diferencia al diámetro, menor y así tendremos

$$V = \frac{\pi}{4} H \left[d + \frac{3}{5}(D - d) \right]^{2} \qquad [14] \quad (*)$$

que es bastante exacta para curvaturas moderadas.

(*) Las fórmulas 10 a 14 son todas derivadas del arco de parábola combinado con cilindro, no detallando su deducción completa por salirse del carácter elemental de nuestra obra.

Combinando la fórmula del cilindro con la del cono podemos considerar que la corrección en la fórmula [1] para hallar la [2] es excesiva y que equivale ese exceso al cilindro cuyo diámetro sea la diferencia antes considerada entre los dos del tonel y así se tiene la *fórmula combinada*

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right] \qquad [15]$$

que al expresarla por los diámetros será

$$V = \frac{\pi}{12}H\left[2D^2 + d^2 - \frac{1}{3}(D^2 - d^2)\right] = 0{,}087266H(5D^2 + 4d^2) \qquad [15]$$

181.—Procedimientos prácticos.—Consiste en el empleo de los *aforadores* que dan el volumen del tonel con una simple lectura o bien con una sola variable de la fórmula. De todos los aforadores es el más empleado el de diagonal, derivado de la fórmula

$$V = 0'625A^3 \qquad [16]$$

hallada por Beval, en la que A es la distancia desde la boca del tonel hasta el punto más bajo de uno de los fondos, medido interiormente. Si la curvatura del tonel es muy pronunciada se añade el $1^0/_0$, y si fuere muy poco curvo se resta la misma cantidad del resultado de la fórmula.

Otros aforadores son los que miden el diámetro mayor y presentan ya calculado el producto del cuadrado de este diámetro por el factor que hemos visto interviene en las fórmulas.

Un procedimiento rápido es el de tomar por capacidad en litros el peso en Kg. del agua que puede contener.

Ejemplo: Determinar la capacidad de un tonel cuyas dimensiones sean de metros 1'65 de altura, 1'10 de diámetro en la panza y de 0,84 de diámetro en los fondos.

Aplicando las diferentes formulas encontradas tendremos los siguientes resultados expresados en litros

[1] = 1226'62	[2] = 1350,16
[5] = 1219,68	[6] = 1250,17
[7] = 1241,22	[9] = 1241,99
[10] = 1350,69	[11] = 1262,46
[12] = 1642,80	[13] = 1302,39
[14] = 1290,72	[15] = 1277,53

[16] = 1624,75

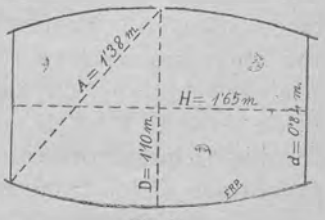


Fig. 39

lo que nos prueba al examinar la figuraque tomando como promedio mejor la última fórmula porque se adapta a todas las curvaturas, resulta la más cercana de ella la fórmula 12 que hemos dicho correspondía a los toneles casi cilíndricos que es el género a que pertenece el de la figura, pudiendo observar que las fórmulas 6, 7, 9, 11 y 15 son las de un promedio mejor para curvaturas moderadas, que la 2 o de Oughtred es excesiva aunque se aproxima en curvaturas grandes, y que las de esta curvatura son las mejores las de Dez, Convención y parábola.

182.—Pipas no llenas.—La determinación del líquido que contienen solo se determina por procedimientos empíricos experimentales que han considerado toneles tipos y han señalado el volumen que corresponde a distintos niveles del líquido utilizando estas señales en los aforadores, lo mismo diagonales que verticales, siendo en los toneles tipo o sea en los de curvatura media, los coeficientes que corresponden a las décimas de diámetro de la panza los siguientes:

Décimas.....	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Coeficientes.....	0,95	0,86	0,75	0,63	0,50	0,37	0,25	0,14	0,05

que permiten calcular ese volumen fraccionario sin los aforadores.

183.—Toneles de sección elíptica.—Son los que tienen los fondos elípticos en vez de circulares por lo que en las fórmulas halladas para éstos bastará hacer las mismas modificaciones que tenga la fórmula del área del círculo con relación a la de la elipse, o sea que en vez de los productos de los radios y diámetros se pondrá el producto de los ejes o semiejes de la elipse, teniéndose también en estos ejes y semiejes el del fondo y el de la panza del tonel

EJERCICIOS núms. **112** al **126; 1431** y **LXXXI** al **LXXXIII.**

184. - Cubicación de maderas.—Entre las medidas efectivas métricas y entre las antiguas especiales figuran algunas que constituyen la cubicación de las maderas, unas veces en leñas cortadas, otras en trozos de tronco de arbol y las más en tablas y tablones cuya cubicación no ofrece particularidad alguna respecto a las de cualquiera otras materias, por lo que el problema que ahora estudiamos es el cálculo aproximado del volumen de los troncos de árbol y la parte aprovechable para tablones o vigas, ya en forma de sección cuadrada.

El volumen del tronco de árbol en bruto se calcula unas veces como si el tronco fuese un cilindro y otras como un tronco de cono, empleando en ambos casos la fórmula del cilindro (**176**) mediante la circunferencia media del tronco, con lo cual el volumen del tronco con corteza, resultará ser

$$V = \pi a\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi C^2 a}{4\pi^2} = \frac{C^2 a}{4\pi} = C^2 a\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{\pi}\right)$$

y como el valor bastante aproximado del inverso de π es 0,3183, la fórmula ordinariamente empleada es

$$V = C^2 a \times \frac{0{,}3183}{4} = 0'07957 C^2 a$$

que también se aproxima dando al quebrado un valor de 0,08 para que así se facilite el cálculo y se tenga

$$V = 0{,}08 C^2 a$$

que es de aplicación más exacta cuando los árboles disminuyen lentamente de diámetro.

Cuando el árbol está en pie se calcula la altura por cualquier medio y se puede tomar como circunferencia media la circunferencia de la base disminuída de $^1/_{15}$, $^1/_{12}$, $^1/_{10}$, $^1/_8$ o $^1/_6$, según que el alto del tronco sea de 6, 8, 10, 12, o 15 metros

185. –Escuadría y volumen útil.—La *escuadría* es el cuadrado inscrito en un tronco de árbol cuando se ha preparado para su utilización en construciones o para el aserrado, preparación que consiste en reducirle a paralelepípedo rectángulo, con lo cual resultará siempre que el *volumen útil* es igual al producto de la superficie de la escuadría por la altura del tronco. Los sistemas de cálculo de una y otro se basan en que el tronco además de la pérdida por los segmentos de cilindro que se pierden al encuadrar, también deberá rebajarse el volumen y superficie de la corteza, siendo los más empleados los siguientes.

1.º *Cubicación al cuarto sin deducción.*—Se toma como lado del cuadrado de la escuadría la cuarta parte de la longitud de la circunferencia media y en tal caso sería la escuadría

$$E = \left(\frac{C}{4}\right)^2 = \left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{16} = \frac{\pi^2 r^2}{4}$$

y el volumen útil

$$V = \frac{\pi^2 r^2 a}{4} = \frac{\pi^2}{4} r^2 a$$

2.° *Cubicación al quinto deducido.*—El cuadrado de la escuadría se considera ser el cuarto de los cuatro quintos de la circunferencia, o sea que será conforme al nombre del método

$$L = \left(C - \frac{C}{5}\right)\frac{1}{4} = \frac{4C}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{C}{5} = \frac{2\pi r}{5}$$

de donde resulta para la escuadría

$$E = \left(\frac{2\pi r}{5}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{25}$$

y para el volumen útil

$$V = \frac{4\pi^2 r^2 a}{25} = \pi^2 r^2 a \times \frac{4}{100}$$

que nos dice que el volumen al quinto deducido es sensiblemente igual a la mitad del volumen total del tronco con corteza, siendo exactamente el volumen útil el 0,502 del volumen total.

3.° *Cubicación al sexto deducido.*—Por las mismas razones del caso anterior tendremos sucesivamente

$$L = \left(C - \frac{C}{6}\right)\frac{1}{4} = \frac{5C}{24}$$

$$E = \left(\frac{5C}{24}\right)^2$$

$$V = \left(\frac{5C}{24}\right)^2 a = \left(\frac{5\pi d}{24}\right)^2 a = \frac{25\pi^2}{576} d^2 a = 0{,}4284 d^2 a = 1{,}71347 r^2 a$$

que da exactamente para valor del volumen útil el 0,545 del volumen total del tronco en bruto.

Ejemplo: Determinar el volumen útil de un tronco que mide 6'40 metros de alto y 2,50 metros de circunferencia.

Por la aplicación de las fórmulas anteriores en el primer miembro tendremos para un cuarto sin deducción

$$V = \frac{2{,}5 \times 2{,}5 \times 6{,}4}{16} = 2'50 \text{ m}^3;$$

para el quinto deducido

$$V = \frac{2{,}5 \times 2{,}5 \times 6{,}4}{25} = 1'60\ m^3$$

y para el sexto deducido

$$V = \frac{25 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 6{,}4}{576} = 1'7361\ m^3$$

186.—Cubicación por medio de la regla de cálculo.—Por la gran importancia de estas operaciones se ha dispuesto una regla de cálculo especial como la de fig. 40, en la que la reglilla tiene una escala *L* para las longitudes o altura de los troncos, y dos señales que corresponden a la circunferencia (señal *U)* y al diámetro (señal de círculo atravesado por una línea), correspondiendo la escala inferior *D* a los diámetros o circunferencias de los troncos y la superior *C* a los volúmenes. Para el cálculo basta colocar el trazo circunferencia o diámetro antes indicado en la escala *D* en el punto de este dato y leer en la escala *C* el número que coincida con el de la altura del tronco en la escala *L*.



Fig. 40. Regla de cálculo para las maderas

EJERCICIOS números **LXXXIV** al **XC; 61** y **79.**

187 —Densidades, su empleo en el comercio.—Densidad o peso específico es la relación entre el peso de un cuerpo y el de un volumen igual de agua destilada a la temperatura de 4° centígrados, o. expresado matemáticamente, la relación entre el peso y el volumen de un cuerpo.

La anterior definición se refiere solamente a los sólidos y líquidos, ya que para los gases se refiere al aire; pero nosotros no tendremos presente más que la densidad de sólidos y líquidos por no ser precisa para los cálculos mercantiles la densidad de los gases.

El conocimiento y empleo de las densidades se hace necesario en el Comercio porque cuando se trata de objetos o bultos de grandes dimensiones no es fácil determinar su peso por el procedimiento directo, y entonces se recurre a la relación que da el peso específico para encontrar el peso real de la mercancía. Además puede servir la densidad para identificar la sustancia que contiene un bulto (fardo, basija, etc.) sin necesidad de deshacerle, lo cual puede ser de mucha utilidad particularmente en los aforos aduaneros.

La aplicación de las densidades comprende dos cuestiones:

1.° Hallar el peso de un cuerpo cuando se conocen su

peso específico y su volumen, lo que se resuelve multiplicando los datos conocidos, y

2.° Hallar el volumen de un bulto conocidos los dos pesos del cuerpo que contiene (real y específico), para lo que bastará dividir el peso del bulto por la densidad del cuerpo.

Las dos reglas que anteceden se deducen de la fórmula

$$D = \frac{P}{V}$$

que señala la definición de densidad.

Las unidades en que resultan expresados los volúmenes o pesos hallados por medio de las densidades son las relativas del sistema métrico decimal teniendo en cuenta que el decímetro cúbico es equivalente como volumen al peso de un kilógramo, y así relativamente, lo que hace pueda calcularse la capacidad de un tonel pesándole vacío y lleno y la diferencia de estos pesos en Kg. será la capacidad en litros.

El empleo de este procedimiento indirecto de medir exije unas *tablas* como la **XXI.**

Ejemplos: 1.° Determinar el volumen que ocuparán 28700 kilos de madera de haya cuya densidad es de 0,75.

Como según la fórmula fundamental el volumen es igual al cociente del peso por la densidad tendremos

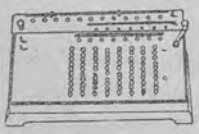
$$V = 28700 : 0{,}75 = 38266{,}66 \text{ dm}^3 = 38{,}266 \text{ m}^3$$

2.° Calcular el peso que corresponderá a unas mercancías líquidas si el contenido de las vasijas es de 174,15 Hl. y la densidad de ellas es de 1'35.

Como el peso es el producto del volumen y la densidad, para ser expresado en kilos deberemos tomar el volumen en litros, con lo que el resultado pedido habría de ser

$$P = 17415 \times 1{,}35 = 23510{,}25 \text{ kilos.}$$

EJERCICIOS números **104** al **109; 111; 163** al **166; 1422; 1431,** y **XCV.**.



XIII

PILAS DE OBJETOS

188.—Pilas y tongas.—En algunas operaciones de Comercio se hace necesario determinar el número de fardos, cajas o bultos que están colocados o pueden colocarse en determinado espacio o bien en un montón hecho con orden, al que se denomina *pila*.

Toda pila está formada por capas de objetos a las que se denomina *tongas*, y recibe el nombre que corresponde a la figura de su base, teniéndose así pilas triangulares, cuadrangulares, etc. La colocación de las tongas en cada pila se hace de modo que el conjunto constituya una pirámide o tronco de la misma o bien un prisma triangular apoyado por una cara lateral, pudiendo a su vez ser completo o truncado con respecto a la arista que se opone a la cara que sirve de base, y según la forma que adopte así será el cálculo del número de objetos que forman la pila, pero siempre como un caso particular de los *números figurados piramidales*.

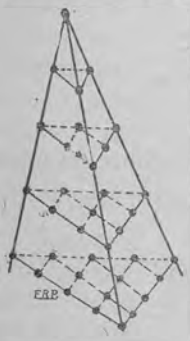


Fig. 41. Pila triangular

189.—Pila triangular.—Llamando n al número de objetos que forman el lado de la base, ésta se halla constituída por filas de objetos cada una de las cuales tiene un objeto menos que la anterior hasta que la última fila sólo tiene uno, siendo también n el número de estas filas, como se aprecia en la fig. 41.

Los objetos que constituyen la base estarán dados por la suma de los términos de una progresión aritmética que empieza por

1, es 1 la razón y contiene n términos, o sea, representada por B

$$B = \frac{(1 + n)n}{2} = \frac{n + n^2}{2}$$

Para que la pila afecte la forma piramidal es preciso que el lado de cada una de las capas de objetos que la forman tenga un objeto menos hasta llegar a la última capa que sólo contendrá uno, y haciendo en la expresión anterior n=1, 2, 3... se tendrán los objetos que contiene cada capa, a partir del vértice, a saber:

$$\frac{1^2 + 1}{2}; \frac{2^2 + 2}{2}; \frac{3^2 + 3}{2}; \frac{4^2 + 4}{2} \ldots$$

como puede comprobarse en la figura, y reuniendo ahora todas estas fracciones en una sola, sumando por un lado los cuadrados y por otro los números que en ellas entran, los objetos de la pila serán:

$$T = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2}{2} + \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n}{2}$$

Si nos fijamos que el primer numerador de la igualdad anterior es la suma de las potencias semejantes de los términos de una progresión aritmética y el segundo la suma de los mismos términos, podemos sustituir ambos numeradores por las fórmulas conocidas por el Algebra (1) y tendremos

$$T = \frac{[n(n + 1)(2n + 1)] : 6}{2} + \frac{[n(n + 1)] : 2}{2} =$$

$$= \frac{n(n + 1)(2n + 1) + 3n(n + 1)}{12}$$

en cuyo último miembro sacamos el factor común del numerador y tenemos sucesivamente

$$T = \frac{(n + 1)[n(2n + 1) + 3n]}{12} = \frac{(n + 1)(2n^2 + n + 3n)}{12} =$$

$$= \frac{(n + 1)(2n^2 + 4n)}{12} = \frac{(n^2 + 2n)(1 + n)}{6}$$

(1) La suma de los n primeros cuadrados (de n números primeros) es igual a $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; y la suma de los números de una progresión es igual a $S = \frac{a+u}{2} n = \frac{n(n+1)}{2}$;

en cuyo último miembro ponemos en factor común n en el primer paréntesis y tenemos para la fórmula buscada

$$T = \frac{n(n+2)(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

que es como suele escribirse.

Ejemplo: Una pila triangular tiene 8 objetos en el lado de su base. Calcular los objetos que la forman.

$$T = \frac{8\,(8+1)(8+2)}{6} = 120 \text{ objetos.}$$

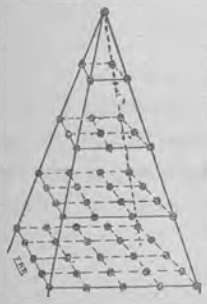


Fig. 42. Pila cuadrangular

190.—Pila cuadrangular. - Las pilas cuadrangulares tienen por base una tonga cuadrada, forma que tienen todas las demás y en ellas cada lado tiene un objeto menos que en la inmediata inferior, hasta la última tonga que solamente tiene uno, según aparece en la figura 42.

Llamando n al lado de la base, el número de objetos de toda la pila será una suma de cuadrados, o sea

$$C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplo: Calcular el número de objetos de una pila cuadrangular cuyo lado en la base contiene 7 objetos.

$$C = \frac{7.8.15}{6} = 140 \text{ objetos.}$$

191. Pila rectangular.--En estas pilas la base es un rectángulo; la tonga, colocada encima de ellas, es también un rectángulo que tiene un objeto menos en cada uno de sus lados, y así hasta la última tonga que sólo contiene una fila de objetos, como puede observarse en la fig. 43.

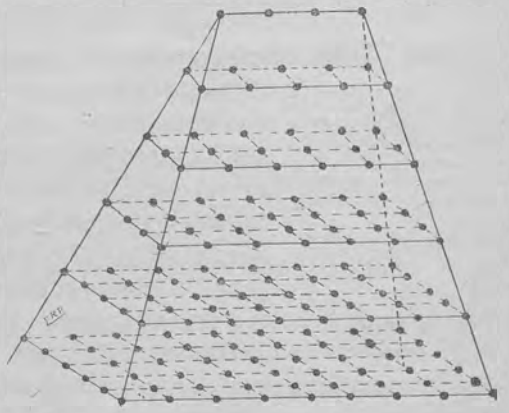


Fig. 43. Pila rectangular.

Para hallar la fórmula para esta clasede pilas representamos por $(p+1)$ el número de objetos de la fila superior con lo que la tonga inmediata inferior contendrá $2(p+2)$ objetos: el de la siguiente $3(p+3)$, y en la base los objetos serán $n(p+n)$ si es que llamamos n al número de objetos del lado menor de la base. Con estas hipótesis la fórmula para estas pilas será:

$$R=p(1+2+3+\ldots.+n)+(1^2+2^2+3^2+4^2\ldots.+n^2)=$$
$$\frac{pn(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}$$

Como en la fórmula que antecede, p representa el número de objetos menos uno de la fila superior, si hacemos que el lado mayor de la base sea $N=p+n$, con lo que $p=N-n$ sustituyendo este valor de p en la expresión anterior obtendremos esta otra

$$R=\frac{n(n+1)(3N+1-n)}{6}$$

que es la más generalmente empleada para las pilas de que nos ocupamos.

Ejemplo: Hallar el número de objetos que forman una pila de forma rectangular cuyos lados en la base tienen respectivamente 8 y 13 objetos.

$$\frac{8.9.(3.13+1-8)}{6}=\frac{8.9.32}{6}=2304 \text{ objetos.}$$

192.—Pila rectangular de objetos cilíndricos.—En estas pilas se colocan los objetos de forma que constituyan una serie de pilas con un sólo objeto de fondo y adosadas unas a otras correspondiéndose las filas de cada capa y las capas respectivamente. Cada pila parcial tiene en su base una sola fila y en cada capa un objeto menos hasta llegar a la última capa que contiene uno sólo según se indica en la figura 44.

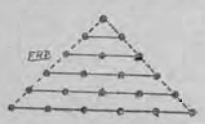


Fig. 44.

El número de objetos de cada pila parcial es la suma de una progresión aritmética que empieza por 1 y tiene n términos, por lo que si llamamos M al número de pilas parciales, o lo que es lo mismo, al número de objetos que en fondo contiene la pila, la fórmula total será

$$p = \frac{n(n+1)M}{2}$$

Ejemplo: Calcular el número de objetos de una pila rectangular que tiene 6 en la base mirada de frente y en el fondo los objetos son 4.

$$\frac{6.7.4}{2} = 84 \text{ objetos.}$$

193. – Pilas truncadas. – Como cualquier figura truncada, las pilas de tal clase son equivalentes a la diferencia entre las totales y las que formaría el respectivo truncamiento Así al llamar m a los objetos del lado en la tonga superior la falta producida por el truncamiento sería la pila cuya base tuviera por lado $(m-1)$ objetos, y expresando esa diferencia en las fórmulas halladas, poniendo para cada clase de pila la misma letra que antes pero minúsculas, tendremos

$$t = \frac{n(n+1)(n+2) - (m-1)m(m+1)}{6}$$

$$c = \frac{n(n+1)(2n+1) - (m-1)m[2(m-1)+1]}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - (m-1)m(2m-1)}{6}$$

$$r = \frac{n(n+1)(3N+1-n) - (m-1)m[3(M-1)+1-(m-1)]}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(3N+1-n) - (m-1)m(3M-3+2-m)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(3N+1-n) - (m-1)m(3M-1-m)}{6}$$

$$p = \frac{M[n(n+1) - (m-1)m]}{2}$$

Ejemplos: 1.º Si suponemos que la pila triangular calculada antes solo contenga tres capas siendo en ellas $n = 8$ y $m = 6$ el total de objetos en la pila truncada serán

$$t = \frac{8.9.10 - 5.6.7}{6} = 85 \text{ objetos.}$$

2.º Una pila cuadrangular con 11 objetos en el lado de la base, está formada por 5 tongas; determinar los objetos que contiene

$$c = \frac{11.12.15 - 6.7.15}{6} = 195 \text{ objetos.}$$

3.° Si la pila rectangular fuese truncada y la tonga superior tuviese en sus lados respectivamente 4 y 9 objetos: ¿Cuántos objetos contendría?

$$r = \frac{8.9.32 - 3.4(3.9 - 1 - 4)}{6} = \frac{[8.9.32 - 3.4.22}{6} = 2040 \text{ objetos.}$$

4.° Calcular los objetos de una pila de objetos cilíndricos truncada con 3 en la fila superior, 8 en la base y 5 de fondo.

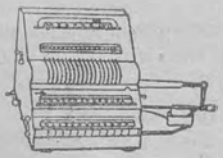
$$p = \frac{5(8.9 - 2.3)}{2} = 165 \text{ objetos.}$$

194.—Problemas inversos.—En todas las fórmulas anteriores cabe determinar, valiéndose de ellas, el número de objetos que deberá tener el lado o los lados de la base, cosa que es en muchos casos quizás de mayor empleo que el problema directo que hemos determinado en las consideraciones anteriores. Cuando ésto suceda bastará resolver la ecuación que resulte de considerar como incógnita el número n o el m u otro cualquiera que se trate de averiguar.

195.—Pilas múltiples.—Son las que se forman por varias tongas iguales superpuestas de modo que la disminución de una fila de objetos y de un objeto en cada fila, que dijimos se producía en las pilas (**189** a **191**), tenga lugar solamente cada 2, 3, ... x tongas, con lo cual para hallar la fórmula bastará considerar estas x tongas como una sola y multiplicar por x los objetos que dan las fórmulas encontradas (**189** a **191** y **193**).

Esta clase de pilas es muy conveniente para colocar objetos de forma de paralelepípedo, como cajas pequeñas, tablas, ladrillos, etc.

EJERCICIOS números **127** al **155**, y **1431**.



XIV

TEORÍA GENERAL DEL INTERÉS

196.—Valores con distinta disponibilidad.—Se dice que una determinada riqueza es disponible, en el momento en que puede ser utilizada por su poseedor, y si para esta disponibilidad fuese preciso el transcurso de cierto tiempo, su valor en presente será menor y dependerá de la duración de ese tiempo que debe transcurrir. Según ésto, dos riquezas disponibles en momentos diferentes no pueden ser comparadas entre sí sin oportunas rectificaciones, porque aquella disponible más tarde vale relativamente menos que la otra.

Las razones de esta diferencia de valor son diversas; si la riqueza en cuestión es solamente útil de un modo indirecto, ésto es, si se trata de un capital, se pierden los frutos que habían de obtenerse en el entretiempo; si la riqueza es útil directamente, o sea si es un bien de consumo, hay que sacrificarse y demorar la satisfacción de la necesidad que dicha riqueza podría apagar inmediatamente (*).

De ahí que si se cede una riqueza presente en cambio de una futura, de la que se recibe promesa, se pretenderá que ésta sea ahora de tal magnitud que hoy valga tanto como la cedida, y se pretenderá que sea tanto mayor cuanto más largo sea el tiempo que haya de aguardarse, ya que también será mayor la pérdida de valor. Esta depreciación no se podrá hacer igual al valor total de la riqueza sino cuando la disponibilidad se verifique en un momento infinitamente alejado.

(*) Además interviene el riesgo de pérdida de toda o parte de la riqueza antes que llegue su disponibilidad, elemento impropio de las obras elementales.

197. - Relación de valores con diferente disponibilidad. — Observando lo anteriormente dicho podemos apreciar que existe una relación entre el valor presente y futuro de una riqueza, y entre estos mismos y el tiempo que deba transcurrir, si bien todavía no podemos decir cuál sea esta relación que procuramos determinar.

Para ello es indispensable establecer la medida de la depreciación en un tiempo determinado, toda vez que las riquezas no son siempre igualmente buscadas y apreciadas. De hecho, para un plazo de espera fijo, la pérdida de valor de las riquezas futuras será más o menos grande según que los frutos obtenidos de otra manera sean también más o menos grandes; y si las riquezas no dan directamente fruto, esa pérdida será grande si las de disponibilidad actual son escasas, las necesidades muy sentidas y su satisfacción perentoria; y será pequeña la pérdida si las riquezas son abundantes y poco sentida su necesidad.

198. — Precio del interés. — La depreciación de las riquezas no disponibles se mide por un coeficiente que ha de ser determinado con referencia a cierto período de tiempo y sin que nunca pueda ser enunciado independiente del mismo período. Este coeficiente constituye el *precio del interés* que se tiene por convertir en disponible una riqueza que no lo es actualmente, y su determinación se hace en la forma siguiente: Sea C_k el importe de una riqueza en un momento cualquiera y sea C_{k+1} el importe de otra equivalente a la primera pero disponible en un momento posterior $k + 1$. Por todas las consideraciones anteriores ha de verificarse:

$$C_{k+1} > C_k$$

El coeficiente que antes hemos descrito se halla determinado por la relación

$$\frac{C_{k+1} - C_k}{C_k} = r \qquad [1]$$

de la cual se deduce

$$C_{k+1} - C_k = C_k r \qquad \text{y} \qquad C_{k+1} = (1 + r)C_k \qquad [2]$$

Pero si consideramos que los dos valores antes indicados

sean los que corresponden actualmente a una misma riqueza según que se la suponga disponible después del tiempo k o del tiempo $k + 1$, entonces tendremos que ha de ser mayor el valor de la disponible más pronto, o sea

$$C_{k+1} < C_k ;$$

y en consecuencia, la expresión que determina el coeficiente del precio del interés será:

$$\frac{C_k - C_{k+1}}{C_k} = r \qquad [3]$$

de lo cual tendremos

$$C_k - C_{k+1} = C_k r \qquad \text{y} \qquad C_k(1-r) = C_{k+1} \qquad [4]$$

Comparando ahora las dos expresiones halladas para C_{k+1} podemos apreciar que en el primer caso corresponde al valor que va adquiriendo un capital en un tiempo posterior en una unidad, al paso que el segundo es el valor de ese mismo capital en un tiempo anterior en la misma unidad, pero guardando en uno y otro caso la misma relación, es decir, dando idéntico fruto o teniendo igual precio.

199.—Variación de los valores. Postulado del interés.—Hemos visto en el párrafo anterior la relación existente entre dos valores consecutivos de una misma riqueza cuya disponibilidad varía en una unidad de tiempo, pero no podemos asegurar ni que esa relación sea constante ni tampoco que varíe con arreglo a ley determinada o determinable, por cuyo motivo, no puede ser utilizable como elemento matemático si no conseguimos fijar la existencia de uno por lo menos de los tres extremos anteriores.

Antes de entrar en la determinación de ese principio que ha de servir de base para el conocimiento de la ley de variación de las riquezas por causa de su diferente disponibilidad, hemos de fijar la denominación técnica de los mismos, diciendo que se llama *capital* a la riqueza cuyo valor depende de la disponibilidad, y que se conoce con el nombre de *interés* al incremento que por virtud de esa disponibilidad sufre la riqueza.

Como principio fundamental de todas las cuestiones mate-

máticas de los valores que nos ocupan, y teniendo en cuenta los resultados de la experiencia en las relaciones sociales, operaciones bancarias y práctica comercial, se admite el siguiente POSTULADO DEL INTERÉS: *Todo capital que puede ser negociado es fructífero, y varía en función del tiempo con cierta ley.*

Tratemos ahora de representar las variaciones de esos capitales fructíferos y para ello advertiremos que el postulado anterior deja en completa libertad al matemático para señalar la ley de variación del capital, pero que cualquiera que sea esa ley puede darse una representación general de la función que señala el postulado.

Para unir las variaciones del capital a la variable tiempo, es necesario fijar un *origen* para empezar a contar ese tiempo y la *unidad* por que haya de medirse. Fijados el origen y la unidad, el tiempo podrá ser positivo o negativo (en cualquiera de los casos ha de ser siempre real); y será *positivo* cuando deba transcurrir, esto es, cuando se considera posterior al origen (del presente al futuro), y será *negativo* si ya resulta transcurrido, o sea, cuando viene considerado con anterioridad al origen (de la actualidad al pasado).

Representando los tiempos por una recta (**60** y **61**) se obtendrán puntos en correspondencia a los diversos valores del tiempo **k** (Fig. 45).

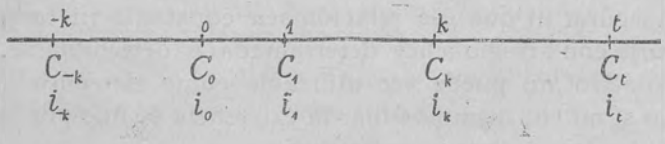


Fig. 45. Variación de valores e interés.

y correspondiendo a esos valores positivos o negativos del tiempo se tienen otros tantos valores para el capital que varía en función de dichos tiempos, valores del capital que en la figura son C_{-k} C_0 C_1 C_k C_t y que siempre serán positivos. Cada uno de estos valores del capital debe ser hallado, como función del valor en el origen del tiempo y de ese mismo tiempo, o sea, que si representamos por i_{-k} i_0 i_1 i_k e i_t los incrementos que experimenta el capital en cada valor correspon-

diente del tiempo, deberá tenerse:

$$C_1 = C_0\, i_1 \qquad C_k = C_0\, i_k$$
$$C_t = C_0\, i_t \qquad C_{-k} = C_0\, i_{-k} \qquad [5]$$

fórmulas que nos indican que *la variación de los capitales depende únicamente de la variación de sus respectivos incrementos.*

200.—Interés y sus elementos de cálculo. — Hemos llamado *interés* al *incremento que sufre un capital por la variación del tiempo de su disponibilidad,* como también hemos visto que los valores que adquiere un capital son función del tiempo, y que las variaciones de esta función están en dependencia de las variaciones del interés, (variaciones de los incrementos), luego no sería posible traducir en fórmulas matemáticas estas funciones sino mediante la relación de esos incrementos con el tiempo.

El coeficiente de depreciación de los valores hallado en la fórmula [1] del párrafo **198** si le aplicamos a los valores i_0 e i_1 de la fig. 45 nos dará:

$$\frac{i_1 - i_0}{i_0} = r \qquad [6]$$

con lo cual tenemos referida la relación entre dos incrementos sucesivos a la unidad de tiempo, y precisamente a la primera unidad. Esta relación se denomina *tanto* o *precio del interés,* como ya antes dijimos (**198**).

Expresando en lenguaje corriente el concepto del *tanto de interés* que acabamos de definir por fórmula, diremos que es *el incremento que sufre un capital en la primera unidad de tiempo por cada una de las unidades de dicho capital,* o por otra definición, *el incremento relativo de un capital en la primera unidad de tiempo.*

Una vez que hemos fijado la variación del interés en la primera unidad de tiempo, por el mismo procedimiento la fijaríamos para todas las restantes unidades, cualesquiera que éstas fuesen y cualquiera que fuese el tanto con relación a cada una de ellas; pero, como en cada uno de estos cálculos haríamos uso de los mismos elementos, el valor del interés en una cualquiera de las unidades de tiempo sería:

$$i_k = C_k \Sigma r_k \qquad [7]$$

Son por consiguiente elementos del cálculo del interés los valores C, k y r y vamos a ir viendo cómo cada uno puede ser referido a expresión matemática que simplifique la fórmula anterior.

1.° *Capital.* — El valor que en el origen del tiempo pueda tener este elemento de cálculo es completamente arbitrario, pero siempre determinado y real en cualesquiera de los cálculos que ocurran, y sus valores para los diferentes valores del tiempo sólo dependerán de la ley que haya de marcar cómo varía, y siempre sujeto a esta ley, de la que todavía no hablamos porque ella determina las diferentes clases de interés, y cuando de ésto nos ocupemos daremos a conocer las distintas leyes.

El capital puede estar determinado por cualquier clase de riqueza, si bien en la práctica, y cuando no se determina otra cosa, siempre se refiere a bienes representados por dinero, o representativos del mismo.

2.° *Tiempo.* — Aunque la unidad de tiempo puede ser completamente arbitraria y hasta de distinta duración en cada una de sus unidades, en la práctica es siempre constante, y en casi todos los casos es el año, si bien puede expresarse en cualesquiera clase de unidades de tiempo y efectuar la reducción correspondiente antes de hacerle intervenir en los cálculos.

En cuanto al origen del tiempo ordinariamente cada cuestión que se examina fija el suyo propio, siendo éste un dato de la menor importancia porque siempre ha de ser origen una fecha, y el cálculo relativo a la determinación del tiempo ha de ser hallar la fecha en que termina cuando se conoce su duración, o encontrar su duración si se conocen las dos fechas de origen y término.

La relación del origen con el capital tampoco tiene importancia ya que al tratar de estudiar las variaciones de un capital nunca será necesario buscar el modo como éste haya venido formándose hasta aquel instante.

3.° *Tanto.* — Por la definición que hemos dado del tanto éste sólo significa determinación del interés para la unidad de capital en la primera unidad de tiempo, sin que en esa definición vaya incluída la constancia del tanto en los tiempos su-

cesivos; sino, que dicho tanto es por su propia naturaleza variable, como son variables todos los precios Ahora bien: la fórmula con que hemos expresado el valor del interés exigirá tantos cálculos parciales cuantos fuesen los valores adquiridos por el tanto, y en consecuencia, la simplificación de dicha fórmula, para que sea expresión de un cálculo único, exige, y así es en la práctica, que *el tanto sea constante en toda la duración del tiempo para un mismo capital.*

201.—Descuento.—Elementos de su cálculo.—En el párrafo anterior hemos considerado, al hallar la relación fundamental de los intereses, que el tiempo era positivo y, por consiguiente, también positivos los incrementos del capital; pero es necesario considerar igualmente tiempos negativos e incrementos de esta cualidad.

Esta consideración la obtendremos mediante la aplicación de la fórmula [3] del párrafo **198** a la determinación del coeficiente de depreciación de los valores i_0 e i_{-k} de la fig. 45 lo que nos dará la relación:

$$\frac{i_0 - (i_{-k})}{i_0} = r$$

que por semejanza con la relación del párrafo anterior llamaremos *tanto de descuento*, toda vez que designamos con el nombre de *descuento al incremento negativo de un capital por efecto de su falta de disponibilidad.*

Dicho *tanto* lo definiremos como *el incremento negativo de un capital por cada una de sus unidades, en la primera unidad negativa del tiempo,* y ha de tener en todo propiedades homólogas iguales con las que tenga el tanto de interés.

De igual forma que al hablar del interés, estableceríamos aquí el valor del descuento de una cualquiera de las unidades de tiempo con una fórmula que sería la [7] sin más que considerar en ella k como negativo.

Los *elementos de cálculo del descuento* han de ser indiscutiblemente los mismos que hallamos para el interés y como entonces, el *capital* será arbitrario y diferente para cada operación, el *tiempo* expresado en cualquier clase de unidades pero transformable en años antes de aplicarle a los cálculos, y el *tanto* constante en el tiempo de cada operación.

202.- Clases de interés y descuento.—Hasta ahora no hemos considerado la ley de variación de los capitales a que se refería el postulado fundamental y por las consideraciones anteriores podemos apreciar que estas leyes de variación han de servirnos para determinar el modo y el momento en que los incrementos han de quedar unidos al respectivo capital.

La ley más sencilla para marcar esta unión entre los intereses y el capital es la que considera los dos valores como no fungibles mutuamente, es decir, que nunca pueden llegar a ser una sola cantidad y por consiguiente, al quedar expresados matemáticamente con entera y absoluta independencia, esos incrementos no harán variar al capital en toda la duración de la operación de que se trate; en este caso el capital es constante, y constante también el interés en cada unidad de tiempo; el interés (o el descuento) se llama *simple*.

Otra ley de variación es la llamada de capitalización porque mediante ella los incrementos o intereses se van uniendo al capital para quedar formando los dos un solo número, o nuevo capital, que incrementará con arreglo al mismo tanto y en igual forma que el primitivo. En este caso el capital es variable y variables son también los incrementos absolutos del mismo, pero permanecen constantes los incrementos relativos; el interés (o descuento) se denomina *compuesto*.

Por la ley que acabamos de indicar queda determinado el modo en que los incrementos se unen al capital faltando solo fijar el momento en que ha de hacerse esta unión. Si la unión se hace al final de cada una de las unidades de tiempo a que se refiere el tanto (en la práctica al final de cada año) entonces el interés se llama *compuesto discreto;* si la capitalización se efectúa por partes alícuotas de la unidad de tiempo (meses, semanas, trimestres, etc., en la práctica) entonces se dice que el interés es *compuesto fraccionado*, (*) y si estas partes alícuotas al final de las cuales se efectúa la capitalización fuesen variables e infinitamente pequeñas (infinitésimos que en la práctica se consideran como instantes) en este caso el interés se llama *continuo*. Estas mismas tres subclases que acabamos de indicar para el interés deben ser consideradas para el des-

(*) Este fraccionamiento se llama frecuencia de acumulación.

cuento, ya que éste es solo el mismo interés con incrementos negativos.

Si tenemos en cuenta las dos comparaciones hechas en el párrafo **198** para hallar la relación entre dos valores de diferente disponibilidad, y con ella la consideración de tiempos positivos y negativos, podemos también apreciar, que, para una sola unidad del tiempo, ese aspecto positivo o negativo nos indica que los intereses se consideran ya producidos antes de que empiece a correr el tiempo si la unidad de éste es negativa, y si fuese positiva, esos intereses solo se consideran producidos cuando termina de transcurrir el tiempo. De esta forma nos hallamos con dos aspectos o clases de interés; la primera de ellas es nombrada *intereses anticipados* y la segunda *intereses vencidos*, y corresponden respectivamente a lo que antes hemos denominado descuento e interés. La razón de existencia de estas dos clases de interés está en la realidad práctica de ser las cuestiones de interés cuestiones de préstamos de capitales y por consiguiente contratos en los que las partes tienen libertad absoluta de fijar las condiciones en que han de cumplirse, entre las que se encuentra la relativa al momento en que se consideran devengados los intereses.

203. Representación de los elementos de cálculo. — Para facilitar el examen y comparación de las fórmulas del interés, damos a continuación la representación literal que hemos de utilizar en las mismas para todos los elementos que en ellas han de intervenir, habiendo elegido aquellas letras que son empleadas por la inmensa mayoría de los autores que tratan la materia y adoptadas también como signos internacionales en las matemáticas financieras.

La representación es la siguiente:

C para el *capital*

n para el *número de períodos de tiempo* a que los cálculos se refieren, que lo mismo puede ser una cantidad entera que fraccionaria, positiva o negativa.

r el *tanto de interés* en la forma que hasta ahora le hemos definido, es decir, tanto por unidad de capital o *tanto por uno*.

t para el tanto, cuando se refiere a cien unidades de capital, o sea, para el *tanto por ciento*.

I para el *interés* o incremento positivo absoluto cuando este interés es *vencido*, que en la práctica se designa con solo la palabra interés y al que también nos referiremos nosotros siempre que no hagamos indicación especial de que sea otro del que se trate.

I' para los *intereses anticipados*.

d para el *descuento* o incremento negativo.

M para el *valor acumulado*. (Designaremos así a la suma del capital y de los intereses, que se llama comunmente capital final, pero que nosotros sustituimos por la denominación anterior por creerla más apropiada y mucho menos expuesta a confusiones, además de ser la más empleada por los actuarios).

k para la *relación* que exista *entre* la unidad de *tiempo* a que se refiere el *tanto (período del tanto)* y aquella en que se expresa el tiempo de la operación.



XV

INTERÉS SIMPLE

204.—Definición y fórmula fundamental.—Se dice que un capital produce interés simple cuando sus *incrementos absolutos* por períodos de tiempos iguales son iguales; es decir, cuando se verifica

$$C_1 - C_0 = C_2 - C_1 = C_3 - C_2 = \ldots\ldots\ldots = C_n - C_{n-1}$$

Por esa expresión es constante la diferencia entre un valor de C y el precedente, por consiguiente los valores $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_n$ *constituyen una progresión aritmética de diferencia* $C_1 - C_0$. Hallando ahora el valor del último término de la progresión se tiene:

$$C_n = C_0 + (C_1 - C_0)n = C_0 + \left(\frac{C_1 - C_0}{C_0}\right)C_0 n$$

Pero como el quebrado del último paréntesis es el tanto de interés durante el primer período de tiempo, sustituyéndole por su representación r, el valor del incremento total $C_n - C_0$ que es el interés será

$$I = C_n - C_0 = C_0 + rC_0 n - C_0 = C_0 rn \qquad [1]$$

en cuyo cálculo intervienen los tres elementos que determinan cualquier clase de interés (**200**).

205.—Cálculo práctico del tiempo.—De los elementos de cálculo del interés, el capital es completamente arbitrario y el tanto es un precio de mercado del que sólo puede conocerse a priori qué causas influyen en su medida, pero no la importancia de las mismas, por cuyo motivo sólo queda para

examinar la determinación del tiempo (*).

Cuando se desea obtener el tiempo expresado en meses, vayan o no añadidos de algunos días, se cuentan desde una fecha de un mes hasta igual día de otro, como tres meses a partir del 26 de marzo serán indicadores de la fecha del 26 de junio. Si se desea expresar un tiempo sólo en días se pueden considerar los meses por su número efectivo de días teniendo entonces el año 365 días, o bien considerar que los meses son todos de igual duración con 30 días cada uno y por consiguiente el año con 360 días; el año con 365 días se denomina *año civil* (**) y el de 360 días *año comercial* porque ordinariamente éste es el que se emplea en el comercio El tiempo comprendido entre las dos fechas anteriores de 26 de marzo y 26 de junio estará expresado por 92 días usando el año civil y solamente 90 si se utilizase el año comercial.

De estos dos métodos de cálculo del tiempo es preferido el primero, porque es el único que dará resultados exactos ya que expresando el tiempo por medio del año comercial se admiten dos errores; el de suponer iguales todos los meses y el de admitir un número falso de días entre dos fechas. Además, el valor de un día en fraccióu de año es de $^1/_{365}$ en el año civil y $^1/_{360}$ en el año comercial, dando esta suposición una diferencia de $^1/_{26280}$ que es la medida del error cometido al falsear la duración del año, por cada uno de los días y en cada unidad de capital, error que se complica con algunos cambios de signo según existan más o menos meses de 31 días.

Para justificar la adopción del año comercial se aduce la mayor facilidad de los cálculos por consecuencia del mayor número de divisores que tiene 360 con respecto a 365, pero ésto no debe considerarse razón lo bastante poderosa para consentir en obtener resultados erróneos de cierta consideración, con tal de abreviar muy poco el trabajo, cosa ésta que no siempre se obtiene y que hasta en algunos procedimientos sucede lo contrario, según hemos de apreciar al estudiarlos, por tanto, creemos que siempre debería emplearse el año civil

(*) En todas las cuestiones en que intervengan fechas se entenderá siempre que son del calendario gregoriano (112).

(**) En los años bisiestos no se tiene en cuenta la modificación sino para tiempos menores de un año.

como único procedimiento lógico y matemático. Es doblemente erróneo y por tanto doblemente censurable la costumbre de algunos países y calculistas mercantiles de contar el tiempo considerando los meses según el calendario y el año de 360 días porque con ello puede darse el caso de que el interés durante 362 días, por ejemplo, sea mayor que el de un año cuando el tiempo es menor y también en períodos menores se da este mismo error aunque no resalte en forma tan evidente el absurdo que esto encierra.

Para facilitar el cálculo del tiempo se dispone de *tablas* como las **XXII** a **XXV**.

206. - Usos de plaza.—Si bien en líneas generales, y según acabamos de manifestar, el cómputo de los días entre dos fechas puede hacerse indistintamente por el año comercial o el año civil, en la práctica se halla adoptado en casi todos los países un procedimiento con preferencia al otro, el que es seguido por la mayoría de los establecimientos bancarios que son los que en estas cuestiones tienen importancia para ser considerados.

Adoptan el año civil en cuanto a días totales y de cada mes Inglaterra, Portugal y los Estados Unidos de América; el año comercial con meses de 30 días es el seguido por Alemania, Rusia, Suecia, Noruega, Dinamarca, Suiza y Turquía; y emplean el año comercial para los días totales y los meses como en el calendario Italia, Austria, Bélgica, Francia, Grecia y Holanda, entre los más importantes países. En España se sigue este último procedimiento en la mayoría de los establecimientos si bien no son pocos los que emplean uno u otro de los otros dos.

BIBLIOTECA DF

EJERCICIOS *números* **232** al **241**.

207. Regla de cálculo para los días.—Es muy cómodo para el cálculo de los días comprendidos entre dos fechas el uso de un instrumento semejante a la regla de cálculo (**88**). Se compone de una regla en cuya parte central se desliza otra menor que tiene marcados de una y otra parte a partir del 0 tantas señales equidistantes como días tiene el año, en un lado para el año civil y en otro para el comercial. Correspondiendo a estas divisiones de la regla pequeña, tiene otras iguales la regla mayor, y unas y otras tienen la indicación del día y mes a que corresponden.

Se comprende fácilmente que para manejarla se hace correr la reglilla en el encaje de la mayor de modo que el punto 0 de la pequeña coincida con la división de la primera fecha, y buscando la división de la segunda fecha tendremos coincidiendo con ella en la reglilla el número buscado.

208.—Generalización de la fórmula fundamental.—Cuando definimos el tanto (**200**) vimos que éste se refiere siempre a un tiempo que se toma como unidad en la medida de la duración de los incrementos del capital, esto es: tanto

anual, mensual, decenal, semanal, etc., según que dicha unidad sea el año, el mes, la década, la semana, etc. y hasta ahora hemos tenido por invariable esa relación existente entre el tanto y el tiempo; pero siendo arbitraria la división del tiempo en períodos, si después de hallar un tanto r correspondiente a la unidad de tiempo n, elegimos otra unidad $n' \neq n$ obtendremos también otro tanto $r' \neq r$.

Cuando el tiempo se exprese en unidades de distinto orden de aquella a que se refiere el tanto, deberá reducirse dicho tiempo a la nueva unidad dividiéndole o multiplicándole por el número de veces que esta nueva unidad contenga o esté contenida en una de aquellas en que está expresado el tiempo. Con ésto el elemento n de la fórmula fundamental se convertirá en el $n \div k$, y al sustituirlo en la fórmula fundamental se transforma en la siguiente:

$$I = C_0 r\left(n \div k\right) \qquad [2]$$

En la práctica el tanto se refiere generalmente al período de un año para el tiempo y éste se expresa en muchas ocasiones en meses o días según ya hemos hecho constar, por consiguiente, cuando el tiempo se exprese en meses y el tanto sea anual la fórmula se transforma en la que sigue:

$$I = C_0 r\,(n : 12) = C_0\, r\, \frac{n}{12} \qquad [3]$$

Cuando el tanto sea anual y el tiempo esté expresado en días será preciso distinguir los dos casos que ya conocemos de año comercial y año civil para emplear como divisor del tiempo 360 o 365 respectivamente, teniendo así estas fórmulas:

Año comercial: $$I = C_0\, r\,(n : 360) = C_0\, r\, \frac{n}{360} \qquad [4]$$

Año civil: $$I = C_0\, r\,(n : 365) = C_0\, r\, \frac{n}{365} \qquad [5]$$

y si el tiempo se expresase en semanas entonces sería

$$I = C_0\, r\,(n : 52) = C_0\, r\, \frac{n}{52} \qquad [6]$$

Resumiendo ahora todos los casos del tanto anual para cualquiera unidad en que se exprese el tiempo se tiene como *fórmula general.*

$$I = C_0\, r\, (n : k) = C_0\, r\, \frac{n}{k} \qquad [7]$$

Ejemplo.—¿Cuál será el interés que producen 5000 pesetas durante 6 meses al 0'02 % diario?

Para hacer posible el cálculo en este caso es necesario establecer la relación entre la unidad de tiempo en que el mismo se expresa y aquella otra a que se refiere el tanto, y como no todos los meses tienen igual número de días y no sabemos cuáles sean esos meses por falta de fechas a que correspondan, admitiremos que todos los meses sean de igual duración y que todos tengan 30 días. Así corresponderán a los elementos de cálculo los siguientes valores:

$$C = 5000, \qquad r = \frac{0'02}{100} \qquad n = 6, \qquad k = 30$$

debiendo tomar para este último elemento el signo de multiplicación por ser la unidad en que se expresa el tiempo mayor de la que corresponde al tanto.

Aplicando ahora la fórmula [2]

$$I = \frac{5000 \times 0'02}{100}\,(6 \times 30) = 180 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **258; 259** y **274.**

209.—Rectificación de la fórmula fundamental.—La definición del tanto de interés **(198)** parece indicar que este incremento deba ser considerado cantidad independiente del capital sólo al término del período del tanto, mientras que en la fórmula general que acabamos de obtener para tiempos distintos de este período se admite que el incremento sea cantidad distinta del capital al terminar el tiempo de la operación, sea igual o diferente al período del tanto; pero si se admite el primer supuesto de que sólo al final del período del tanto sea cuando deba pagarse o cobrarse el interés, debiéramos encontrar la fórmula que así nos diera el error cometido o el verdadero interés directamente.

Este supuesto no es admitido nunca en la práctica, por lo cual su importancia es casi nula, pero sí la tiene para el estudio teórico, por lo que M. Moser dedujo para el caso de tanto anual, que el interés verdadero debiera ser el que resulta de restar al de la fórmula general [7] antes encontrada el interés de dicho interés durante la diferencia entre el tiempo y el período del tanto.

Llamando z al quebrado de la fórmula general, la diferencia entre el tiempo y el período del tanto se hace $1 - z$ y así la fórmula de Moser para el interés será

$$I = Crz - Crz \times r(1 - z) = Crz\,[1 - r(1 - z)]$$

fórmula que puede servir para cualquier período del tanto, aunque éste fuere menor que el tiempo porque entonces resultaría que la fórmula de Moser daría un sumando en vez de un sustraendo, por causa de que cambiaría de signo la última diferencia de la fórmula.

210.—Valor acumulado.—Ya sabemos **(203)** que éste es la reunión del capital y de sus intereses durante el período de que se trate, por lo que será *fórmula fundamental*

$$M = C + I = C + Crn = C\,(1 + rn) \qquad [1]$$

Si hubiéramos querido tener la fórmula del valor acumulado para cualquier tiempo cuando éste y el tanto se refieren a distintas unidades, la expresión que habríamos hallado sería:

$$M = C + Cr\,(n \div k) = C\,(1 + rn \div k) \qquad [2]$$

fórmula que podemos descomponer en las dos a que da origen, según el sentido de la relación y hallaremos

$$M = C\,(1 + rnk) \qquad [3]$$

$$M = C\left(1 + \frac{rn}{k}\right) = C\left(\frac{k + rn}{k}\right) \qquad [4]$$

de la cual obtenemos para el caso de tanto anual, con el tiempo expresado en meses

$$M = C + Cr\,\frac{n}{12} = C\left(1 + \frac{rn}{12}\right) = C\left(\frac{12 + rn}{12}\right) \qquad [5]$$

para tiempo de días y año comercial

$$M = C + Cr\,\frac{n}{360} = C\left(1 + \frac{rn}{360}\right) = C\left(\frac{360 + rn}{360}\right) \qquad [6]$$

para año civil con tiempo de días

$$M = C + Cr\,\frac{n}{365} = C\left(1 + \frac{rn}{365}\right) = C\left(\frac{365 + rn}{365}\right) \qquad [7]$$

y para el tiempo expresado en semanas

$$M = C + Cr\,\frac{n}{52} = C\left(1 + \frac{rn}{52}\right) = C\left(\frac{52 + rn}{52}\right) \qquad [8]$$

211.—Tantos equivalentes.—Se denominan tantos equivalentes *los que referidos a distintas unidades de tiempo dan*

el mismo interés para iguales capitales y transcursos de tiempos iguales.

Si tenemos un tanto r referido a la unidad de tiempo x el interés que para dicho tanto corresponde al capital C, durante el tiempo n veces la unidad x, será:

$$I = Crn$$

y si elegimos otro tanto r' que se refiera a otra unidad z siendo en este caso $n \div\!\times k$ el número de unidades con que se expresa el tiempo referido a la nueva unidad, el interés del capital C al nuevo tanto y en ese tiempo habrá de ser:

$$I = Cr'n \div\!\times k$$

y para que los tantos r y r' sean equivalentes

$$Crn = Cr'n \div\!\times k$$

Ahora bien, cuando esto sucede, de la propiedad de las proporciones se deduce

$$\frac{r}{r'} = \frac{Cn \div\!\times k}{Cn}$$

y simplificando el segundo miembro de la anterior igualdad

$$\frac{r}{r'} = \frac{n \div\!\times k}{n}$$

lo cual nos dice que los tantos equivalentes son inversamente proporcionales a los números que en su respectiva unidad expresan el tiempo, y como esos números son a su vez inversamente proporcionales a las respectivas unidades, también ha de suceder que *los tantos equivalentes son proporcionales a la duración de la unidad de tiempo a que se refieren,* de ahí que se llamen también *tantos proporcionales.*

EJERCICIOS *números* **242** al **250.**

XVI

INTERÉS VENCIDO PRÁCTICO

212. – Fórmulas prácticas fundamentales.—Las cuestiones de interés simple en la práctica se refieren siempre a tanto por ciento, anual si no se indica otra cosa y distinto de éste en los pocos casos en que así pueda convenirse.

Cuando en las fórmulas hasta ahora encontradas hagamos intervenir el tanto por ciento, será en sustitución del tanto por uno hasta aquí empleado, por consiguiente, para que el valor que expresen las fórmulas mediante el tanto por ciento sea el mismo que mediante el tanto por uno bastará que, en las hasta ahora conocidas, sustituyamos r por el cociente $\frac{t}{100}$

Según lo que acabamos de decir tendremos para *fórmula fundamental* del interés **(204)**.

[1] $$I = \frac{Ctn}{100}$$

si es que el tiempo se expresa en las mismas unidades a que se refiere el tanto, pues en caso de no ser iguales dichas dos unidades las fórmulas serían **(208)**

[2] $$I = \frac{Ct}{100}(n \overset{:}{\times} k)$$

cualquiera que sea la relación entre las repetidas unidades;

[3] $$I = \frac{Ctn}{100 \times 12}$$

para tanto $^0/_0$ anual y tiempo expresado en meses;

[4] $$I = \frac{Ctn}{100 \times 360}$$

para tanto °/₀ anual y tiempo expresado en días, siendo el año comercial;

[5] $$I = \frac{Ctn}{100 \times 365}$$

para tanto anual, tiempo en días y año civil (*);

[6] $$I = \frac{Ctn}{100 \times 52}$$

en tanto anual y tiempo en semanas; y por fin siempre que sea el tanto anual la *fórmula general* práctica, sería

[7] $$I = \frac{Ctn}{100k}$$

Ejemplos: 1)—Hallar el interés de 2000 pesetas al 7 $\frac{1}{2}$ °/₀ anual, en un año.

Constituye este ejemplo una aplicación de la fórmula [1] siendo en él

$$C = 2000, \qquad t = 7'50, \qquad n = 1,$$

luego el resultado será:

$$I = \frac{2000 \times 7'50 \times 1}{100} = 150 \text{ pesetas.}$$

2)—Calcular el interés que producen 3500 pesetas durante 8 meses al $\frac{1}{2}$ °/₀ mensual.

También ahora ha de aplicarse la fórmula [1] haciendo

$$C = 3500, \qquad t = 0'50, \qquad n = 8,$$

y aplicando se tiene:

$$I = \frac{3500 \times 0'50 \times 8}{100} = 140 \text{ pesetas.}$$

3)—¿Qué producen 9000 pesetas en 7 meses al 5 °/₀ anual?

$$C = 9000, \qquad t = 5, \qquad n = 7$$

Aplicando la fórmula [3]

$$I = \frac{9000 \times 5 \times 7}{1200} = 262'50 \text{ pesetas.}$$

4)—¿Cuánto producen 3600 pesetas al 4 °/₀ anual durante 219 días?

$$C = 3600, \qquad t = 4, \qquad n = 219,$$

(*) Puede también considerarse al año bisiesto, en cuyo caso esta fórmula tendrá por denominador 100 × 366; pero su empleo casi nulo nos releva de considerarla en detalle.

Haciendo ahora aplicación de la fórmula [4] para el año comercial

$$I = \frac{3600 \times 4 \times 219}{36000} = 87'60 \text{ pesetas.}$$

Si empleamos la fórmula [5] para año civil,

$$I = \frac{3600 \times 4 \times 219}{36500} = 86'40 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS: Todos son indistintamente para año legal y comercial, habiéndose hallado las soluciones para los dos casos.

EJERCICIOS ESPECIALES; *números* **251** al **257; 274; 281; 368; 370; 373** y **XCVI.**

EJERCICIOS QUE TAMBIÉN PUEDEN UTILIZARSE; *números* **375** al **377; 387** al **390; 393** al **402**, y en caso necesario los que se indican en el interés anticipado.

PROBLEMAS, los ejercicios *números* **262; 298** y **300.**

213.—Valor de la rectificación de Moser.—Siendo el interés simple en la práctica por tiempo menor de un año y a tanto anual la fórmula de Moser (**209**) daría un interés menor que el que antes hemos encontrado valor que representado por I_z será

$$I_z = Crz - Crz[1 - r(1 - z)] = Crzr(1 - z)$$

valor que calcularemos por unidad de capital, teniendo para tal caso

$$I = zr^2(1 - z)$$

y siendo constante el valor de r, las variaciones de la rectificación de Moser dependen de las que pueda tener el producto $z\,(1 - z)$, producto que según una propiedad matemática llega a tener su valor máximo cuando sea

$$z = 1 - z$$

lo que da para valor de z

$$z = \frac{1}{2}$$

y la diferencia máxima del interés práctico y el real será

$$I_z = \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Ejemplo: Determinar el interés real según la fórmula rectificativa y el valor máximo de la rectificación en el último ejemplo resuelto.

Siendo el valor de la unidad 365 para operar con año legal, el valor de la rectificación sería

$$3600 \times \left(\frac{4}{100}\right)^2 \times \frac{219}{365} \times \frac{365 - 219}{365} = 1'3824 \text{ ptas.}$$

y el valor máximo que pudiera tener

$$3600 \times \left(\frac{0'04}{2}\right)^2 = 1'44 \text{ pesetas.}$$

214.—Fórmulas para el valor acumulado.—Completan las fórmulas fundamentales para el interés simple práctico las relativas al valor acumulado, de las que ya conocemos aquellas que se refieren al tanto por uno **(210)**. Estas fórmulas para cuando el tiempo se expresa en años, meses, días comerciales, días civiles y semanas respectivamente serán:

$$M = C + \frac{Ctn}{100} = C\left(\frac{100 + tn}{100}\right) \qquad [1]$$

$$M = C + \frac{Ctn}{100 \times 12} = C\left(1 + \frac{tn}{1200}\right) = C\left(\frac{1200 + tn}{1200}\right) \qquad [2]$$

$$M = C + \frac{Ctn}{100 \times 360} = C\left(1 + \frac{tn}{36000}\right) =$$

$$= C\left(\frac{36000 + tn}{36000}\right) \qquad [3]$$

$$M = C + \frac{Ctn}{100 \times 365} = C\left(1 + \frac{tn}{36500}\right) =$$

$$= C\left(\frac{36500 + tn}{36500}\right) \qquad [4]$$

$$M = C + \frac{Ctn}{100 \times 52} = C\left(1 + \frac{tn}{5200}\right) = C\left(\frac{5200 + tn}{5200}\right) \qquad [5]$$

y como *fórmula general* para cualquiera unidad de tiempo

$$M = C\left(\frac{100k + tn}{100k}\right) \qquad [6]$$

Ejemplos: Resolveremos ahora los mismos que para el interés para que pueda el lector comprobar los resultados que aquí encontraremos, haciendo la suma de capital e intereses.

1) - Calcular en cuánto se convierten 2000 pesetas al fin de un año produciendo el $7\frac{1}{2}$ °/₀ anual.

Es aplicación de la fórmula [1] y se tiene:

$$M = 2000\left(\frac{100 + 7'50}{100}\right) = 2150 \text{ pesetas.}$$

2)—Hallar el valor acumulado que adquieren 3500 pesetas que producen interés de $\frac{1}{2}$ °/₀ mensual durante 8 meses.

Aplicando la fórmula [1]

$$M = 3500\left(\frac{100 + 0'50 \times 8}{100}\right) = 3640 \text{ pesetas.}$$

3)—¿En cuánto se convertirán 9000 pesetas que durante 7 meses producen el 5 °/₀ anual?

Deberemos aplicar la fórmula [2]

$$M = 9000\left(\frac{1200 + 5 \times 7}{1200}\right) = 9262'60 \text{ pesetas.}$$

4)—¿Qué valor adquirirán 3600 pesetas que producen interés al 4 °/₀ anual urante 129 días?

Cuando se trate del año comercial con la fórmula [3] hallaremos:

$$M = 3600\left(\frac{36000 + 4 \times 129}{36000}\right) = 3687'60 \text{ pesetas.}$$

pero si se tratase del año civil, entonces deberíamos hacer uso de la fórmula [4], con lo que el resultado sería:

$$M = 3600\left(\frac{36500 + 4 \times 129}{36500}\right) = 3686'40 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **255; 281; 374; XCVII** al **C** pudiendo servir además los especiales del interés.

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **285; 290** y **278.**

215.—Fórmulas derivadas de las fundamentales.—Al mismo tiempo que el cálculo del interés, se presentan los problemas de determinar el valor de una de las cantidades C, n, o t (capital, tiempo o tanto) cuando sean conocidos los otros elementos; determinación que puede hacerse partiendo de las fórmulas que dan el interés o bien de aquellas que dan el valor acumulado.

216.—Cálculo del capital.—Encontraremos las fórmulas para este caso resolviendo con relación a C las ecuaciones del número (**212**) y tendremos los siguientes resultados:

$$C = \frac{100 \times I}{tn} \qquad [1]$$

para tanto por ciento anual y tiempo expresado en años;

$$C = \frac{1200 \times I}{tn} \qquad [2]$$

si el tiempo se expresa en meses siendo el tanto anual;

$$C = \frac{36000 \times I}{tn} \qquad [3]$$

cuando el tanto sea anual y el tiempo se exprese en días, siendo además considerado el año comercial;

$$C = \frac{36500 \times I}{tn} \qquad [4]$$

si se considera el año legal o civil.

Reuniendo ahora todas las expresiones se obtiene la *fórmula general*

$$C = \frac{I \times 100k}{tn} \qquad [5]$$

Prescindiremos de ahora en adelante de las fórmulas con tiempo en semanas por el empleo tan limitado que tiene esta forma de expresión del tiempo.

Ejemplos: 1)—¿Cuál es el capital que colocado al 4 °/₀ anual ha producido en 5 años 240 pesetas de interés?

En este problema se tiene:

$$I = 240, \qquad t = 4, \qquad n = 5,$$

Aplicando la fórmula [1] obtendremos:

$$C = \frac{100 \times 240}{4 \times 5} = 2000 \text{ pesetas.}$$

2) ¿Qué capital es preciso imponer al 5 °/₀ anual para que durante 9 meses produzca 328 pesetas de interés?

Los elementos de este problema tienen los siguientes valores:

$$I = 328, \qquad t = 5, \qquad n = 9$$

mediante la aplicación de la fórmula [2] encontraremos por resultado

$$C = \frac{1200 \times 328}{5 \times 9} = 8746'66 \text{ pesetas.}$$

3)—¿Cuánto hemos de imponer al 6 °/₀ de interés anual para que en 174 días produzca 300 pesetas de interés?

Los valores correspondientes a los elementos de este ejercicio son:

$$I = 300, \qquad t = 6, \qquad n = 174$$

pudiendo hallar su solución bien por el año comercial o bien por el año natural. Procediendo por orden aplicaremos ahora la fórmula [3]

$$C = \frac{36000 \times 300}{6 \times 174} = 10344'82 \text{ pesetas.}$$

y haciendo ahora uso de la fórmula [4] resultará:

$$C = \frac{36500 \times 300}{6 \times 174} = 10488'50 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **267; 273; 275; 277; 279; 280.**

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **262; 286; 296; 302** y **303.**

217.—Cálculo del tiempo. —Del mismo modo que hicimos para el capital, despejaremos en la fórmula fundamental el valor del elemento que tratamos de buscar y encontraremos los siguientes valores prácticos:

$$n = \frac{100 \times I}{Ct} \qquad [1]$$

dando un resultado en años para la incógnita:

$$n = \frac{1200 \times I}{Ct} \qquad [2]$$

si el resultado ha de obtenerse en meses;

$$n = \frac{36000 \times I}{Ct} \qquad [3]$$

cuando haya de hallarse el resultado en días referidos al año comercial;

$$n = \frac{36500 \times I}{Ct} \qquad [4]$$

si se quiere que ese resultado sea de días referidos al año civil, y si se expresa por la *fórmula general*

$$n = \frac{I \times 100k}{Ct} \qquad [5]$$

Observación.—En la mayor parte de los casos n resultará expresado por un número no entero, y entonces será indispensable reducir el resultado a número complejo de años, meses y días (**148**, 3.º) pero teniendo presente lo que decíamos en el ejemplo del párrafo **208** respecto a la duración de los meses que no correspondan a fechas determinadas, y además será preciso despreciar o forzar la fracción de día, aproximando el número de éstos en menos de media unidad.

Mediante la reducción de los resultados de tiempo a número complejo se consigue el que pueda utilizarse cualquiera de las fórmulas anteriores indiferentemente.

Ejemplos: 1)—¿Durante cuánto tiempo ha estado impuesto a interés anual del 4 % un capital de 2000 pesetas para que haya producido 240 pesetas de interés?

Son los elementos de este problema,

$C = 2000,$ $I = 240,$ $t = 4$

y mediante la aplicación de la fórmula [1] tenemos:

$$n = \frac{100 \times 240}{2000 \times 4} = 3 \text{ años.}$$

2) Calcular el tiempo en meses que estuvo colocado a interés simple al 3 °/₀ anual un capital de 3800 pesetas para que produjera 125 pesetas de interés.

Tenemos: $C = 3800, \qquad I = 125, \qquad t = 3$

luego, aplicando la fórmula [2] resultará

$$n = \frac{1200 \times 125}{3800 \times 3} = 7'8947 \text{ meses.}$$

Este resultado debe ser reducido a número complejo con lo que el tiempo serán 7 meses y 26'841 días que hemos de expresar de acuerdo con la realidad hallando el número de días más aproximado al resultado, y así el el tiempo del problema que nos ocupa sería de 7 meses y 27 días, cantidad aproximada con un error menor que media unidad de su último orden.

3)—¿Cuánto tiempo estuvo impuesto a interés simple el capital de 3600 pesetas al 4 °/₀ anual para que produjera 87'60 pesetas de interés operando con el año comercial?

Son los elementos de este problema:

$$C = 3600, \qquad I = 87'60, \qquad t = 4$$

por lo que al aplicar la fórmula [3] se tiene

$$n = \frac{36000 \times 87'60}{3600 \times 4} = 219 \text{ días.}$$

4)—¿En cuánto tiempo producen 200 pesetas de interés 3000 pesetas de capital a razón del 3 °/₀ anual, haciendo uso del año civil?

Los elementos que han de intervenir en el cálculo son:

$$C = 3000, \qquad I = 200, \qquad t = 3$$

y aplicando ahora la fórmula [4] obtendremos el resultado siguiente:

$$n = \frac{36500 \times 200}{3000 \times 3} = 292 \text{ días}$$

EJERCICIOS *números* **265; 269; 283; 308; 371** y los que se indican para el interés anticipado y el descuento.

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **287** y **292.**

218. Cálculo del tanto.—Por transformaciones de la fórmula fundamental, semejantes a las de los dos casos anteriores, se obtendrán los siguientes valores para el tanto.

$$t = \frac{100 \times I}{Cn} \qquad [1]$$

para el tanto anual y tiempo que se exprese en años;

$$t = \frac{12000 \times I}{Cn} \qquad [2]$$

si con el mismo carácter del tanto el tiempo se refiere a meses;

$$t = \frac{36000 \times I}{Cn} \qquad [3]$$

cuando hayan de hacerse los cálculos por el año comercial;

$$t = \frac{36500 \times I}{Cn} \qquad [4]$$

si se emplease en los cálculos el año natural; y reuniendo, como antes, todas en la *fórmula general*

$$t = \frac{I \times 100k}{Cn} \qquad [5]$$

Ejemplos: 1)—Hallar el tanto anual de interés a que se impuso un capital de 4600 pesetas que en 7 años produjeron 1288 pesetas de interés.

Teniendo presente que los elementos con que hemos de operar son:

$$C = 4600, \qquad I = 1288, \qquad n = 7$$

al aplicar la fórmula [1] hemos de obtener:

$$t = \frac{100 \times 1288}{4600 \times 7} = 4\ \%$$

2) - ¿Cuál es el tanto por ciento anual que renta un capital que durante 9 meses produjo 630 pesetas siendo dicho capital de 14000 pesetas?

Los elementos de cálculo en este problema serán:

$$C = 14000, \qquad I = 630, \qquad n = 9,$$

por lo que aplicando la fórmula [2] nos dará:

$$t = \frac{1200 \times 630}{14000 \times 9} = 6\ \%$$

3)—Calcular el tanto por ciento que corresponde en año comercial al capital de 9000 pesetas que en 78 días produjo 86 pesetas de interés:

Son los elementos:

$$C = 9000, \qquad I = 86, \qquad n = 78,$$

a los que corresponde aplicar la fórmula [3] que da

$$t = \frac{36000 \times 86}{9000 \times 78} = 4'41025\ \%$$

siendo solo un valor aproximado porque en esta operación, lo mismo que en todas las inversas de las matemáticas, si se desea obtener resultados exactos ha de partirse de resultados obtenidos en cuestiones directas.

4)—Hallar el tanto por ciento que produce el capital 4000 pesetas que en 80 días dió un interés de 45'84 pesetas, operando con el año civil.

En este caso se tiene:

$$C = 4000, \qquad I = 45'84, \qquad n = 80.$$

Aplicando la fórmula [4] nos dará:

$$r = \frac{36500 \times 43'84}{4000 \times 80} = 5'0005\ \%$$

EJERCICIOS *números* **263; 264; 268; 271; 284** y los que se indican para el interés anticipado y el descuento.

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **289; 297; 301** y **CIV**.

219.—Fórmulas derivadas de la del valor acumulado.—Siguiendo el método de que nos hemos servido para deducir las fórmulas correspondientes a capital, tanto y tiempo en función del interés, se deducen las que correspondan a esos mismos valores cuando intervenga en ellas el valor acumulado, dividiendo también la cuestión en las tres partes que comprende.

220.—Cálculo del capital inicial.—Despejando C en las fórmulas del párrafo **214** se obtiene

$$C = \frac{100M}{100 + tn} \qquad [1]$$

cuando el tiempo se refiera a la unidad años;

$$C = \frac{1200M}{1200 + tn} \qquad [2]$$

si es que el tiempo está expresado en meses;

$$C = \frac{36000M}{36000 + tn} \qquad [3]$$

en el caso de que el tiempo se exprese en días referidos a la duración del año comercial, y

$$C = \frac{36500M}{36500 + tn} \qquad [4]$$

para tiempo de días y que éstos se refieran al año civil; teniéndose como *fórmula general*

$$C = \frac{M100k}{100k + tn} \qquad [5]$$

Ejemplos: 1)—¿Cuál es el capital que habiendo sido colocado al 5 % anual durante cuatro años, se convirtió al cabo de este tiempo en 5000 pesetas?

Los elementos de cálculo que intervienen en este problema son:

$$M = 5000, \qquad t = 5, \qquad n = 4.$$

Apliquemos la fórmula [1]

$$C = \frac{100 \times 5000}{100 + 5 \times 4} = 2500 \text{ pesetas.}$$

2)—Hallar el capital que en 9 meses al 6 % de interés anual se convirtió en 14630 pesetas:

$$M = 14630, \qquad t = 6, \qquad n = 9.$$

Apliquemos ahora la fórmula [2]

$$C = \frac{1200 \times 14630}{1200 + 9 \times 6} = 14000 \text{ pesetas.}$$

3)—¿Qué capital se impuso al 4 % durante 125 días, si al final de los mismos se retiraron 12164 pesetas por capital e intereses?

Son los elementos del cálculo los siguientes:

$$M = 12164, \qquad t = 4, \qquad n = 125.$$

Para aplicar debidamente las fórmulas nos es indispensable conocer si para el cálculo directo se utilizó el año comercial o el legal, pues según se haya utilizado uno u otro así los resultados serán diferentes. Empleando la fórmula [5] se tiene:

$$C = \frac{36000 \times 12164}{36000 + 4 \times 125} = 11997'37 \text{ pesetas.}$$

Si hacemos uso de la fórmula [4] tendremos:

$$C = \frac{36500 \times 12164}{36500 + 4 \times 125} = 11999'62 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **255; 270; 276; 358;** y **CI** al **CIII**.

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **291; 354; 359; 362** al **364**

221.—Cálculo del tanto y tiempo - Para poder despejar estos elementos de cálculo empezaremos por hacer todas las transformaciones necesarias en la fórmula [6] del párrafo **214** y después las de los demás casos pueden hallarse por semejanza con la que se obtenga primeramente

Introduciendo en el numerador de dicha fórmula [6] el factor C y efectuando la multiplicación indicada, resulta

$$M = C\left(\frac{100k + tn}{100k}\right) = \frac{C(100k + tn)}{100k} = \frac{100kC + Ctn}{100k}$$

y si en el último miembro de esta serie de igualdades quitamos el denominador pesándole al primer miembro, lo mismo que el término independiente de t o de n llegamos a la expresión

$$100kM = 100kC + Ctn; \quad \text{y} \quad 100kM - 100kC = Ctn;$$

y sacando factor común $100k$ en el primer miembro

$$100k(M - C) = Ctn$$

De esta última igualdad ya podemos despejar directamente los valores t y n teniendo

$$t = \frac{100k(M-C)}{Cn} \qquad [1]$$

$$n = \frac{100k(M-C)}{Ct} \qquad [2]$$

Examinando estas fórmulas y comparándolas con las que obtuvimos en los párrafos **217** y **218** puede apreciarse que en las allí obtenidas interviene el interés en lugar de la diferencia $(M-C)$ que existe en las que ahora encontramos; pero esa diferencia es precisamente el valor del interés, luego las dos series de fórmulas son idénticas no precisando por consiguiente de nuevos estudios, deducciones ni ejemplos, sinó que calculada la diferencia de las fórmulas halladas ahora se aplicarán las de los citados párrafos.

222.—Relación entre el interés y el valor acumulado.—Si en la fórmula general práctica del interés (**212**, [7]) sustituímos el capital por su expresión según el valor acumulado (**220**, [5]) tenemos para valor del interés la nueva expresión

$$I = \frac{M100k}{100k + tn} \times \frac{tn}{100k} = \frac{Mtn}{100k + tn} \qquad [1]$$

que nos servirá para calcular el interés cuando se desconozca el capital de la operación y en cambio se nos dé el valor acumulado, cosa que en la práctica es más frecuente de lo que pudiera parecer a primera vista.

De la fórmula anterior deduciremos para el valor acumulado cuando sólo sea conocido el interés la expresión

$$M = \frac{I(100k + tn)}{tn} \qquad [1']$$

y de estas dos expresiones deduciremos las fórmulas para las diversas condiciones entre el tiempo y el tanto que respecti-

vamente serían para el tiempo expresado en años, meses, días comerciales y días legales

$$I = \frac{Mtn}{100 + tn} \quad [2] \qquad M = \frac{I(100 + tn)}{tn} \quad [2']$$

$$I = \frac{Mtn}{1200 + tn} \quad [3] \qquad M = \frac{I(1200 + tn)}{tn} \quad [3']$$

$$I = \frac{Mtn}{36000 + tn} \quad [4] \qquad M = \frac{I(36000 + tn)}{tn} \quad [4']$$

$$I = \frac{Mtn}{36500 + tn} \quad [5] \qquad M = \frac{I(36500 + tn)}{tn} \quad [5']$$

Ejemplos: 1). Determinar la parte que corresponde al interés en un pago de 64300 pesetas que se hizo en 7 de noviembre por un préstamo desde 2 de febrero al 6 °/₀ de interés anual.

Consideraremos que se emplea el año comercial con meses de 30 días y en tal forma el tiempo de la operación habría de ser 275 días, y aplicaríamos la fórmula [4] con los valores especiales siguientes

$$M = 64300 \qquad t = 6 \qquad n = 275$$

que nos da para valor buscado

$$I = \frac{64300 \times 6 \times 275}{36000 + 6 \times 275} = 2817{,}928 \text{ pesetas.}$$

2) Los intereses de un capital al 5 °/₀ en 7 meses se elevaron a 392 pesetas. Determinar el valor acumulado que adquirió dicho capital.

Utilizaremos la fórmula [3'] cuyos valores especiales serán

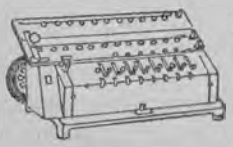
$$I = 392, \qquad t = 5 \qquad n = 7$$

con lo que el resultado será

$$M = \frac{392 \times (1200 + 5 \times 7)}{5 \times 7} = 13832 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **282;** y **CV** al **CXVIII.**

PROBLEMAS que convendrá resolver por *ecuaciones de interés números* **260; 261; 288; 289; 293** al **295; 299; 327; 328; 355; 365.**



XVII

INTERÉS PRÁCTICO ANTICIPADO

223.—Concepto del interés anticipado.—Ya hemos indicado **(202)** que el interés anticipado es aquél que se considera producido en el mismo instante en que empieza la unidad de tiempo, restándonos solamente ahora determinar los casos prácticos en que ésto sucede para completar el concepto de tal clase de interés.

Las riquezas capaces de producir intereses anticipados son las mismas que los producen vencidos, dependiendo únicamente la clase de interés de las convenciones de las partes. Así es generalmente admitido que el alquiler de los inmuebles urbanos se cobre por anticipado; que en algunos empréstitos se dé por anticipado a los acreedores el interés de cada plazo, y otros casos semejantes, cuales el cobrar por anticipado el interés de un préstamo simple dando el acreedor al deudor solamente la diferencia entre todo el valor del capital prestado y los intereses.

Es necesario dejar bien sentado que el interés anticipado es tan racional, legal y equitativo como el interés vencido, puesto que no existe ninguna ley natural, divina ni humana, que señale que el interés haya de estar sometido a condiciones invariables como pueda estarlo alguna ley geológica, por ejemplo, sinó que el interés es una concepción nacida de la comparación y determinada por un acuerdo entre dos partes.

Es necesario sin embargo, distinguir entre el interés como precio de una producción efectuada, como parte del producto obtenido que corresponde al elemento productivo capital, y el interés como facultad productiva, como cesión de un uso que

se hace a favor de otra persona del elemento que posee dicha facultad. Una vez hecha la distinción anterior sobre los dos aspectos económicos en que ha de considerarse el origen del interés es indudable que el primer aspecto dará nacimiento a intereses vencidos, ya que la repartición del producto para dar al capital su parte (el interés) no puede efectuarse hasta haber terminado la misma producción; y el segundo es en esencia un convenio entre dos partes con libertad omnímoda para fijar las condiciones y circunstancias de ese convenio, luego lo mismo pueden determinar que el cesionario entregue al cedente la referida parte al principio del período de tiempo que al final del mismo.

Téngase presente que hasta ahora consideramos el interés bajo el punto de vista económico, quedando por tanto la adaptación a los principios matemáticos para hacer posible el cálculo de los elementos que intervienen en sus cuestiones, sin que pueda decirse nunca que las fórmulas que encontremos para una y otra clase de interés sean más matemáticas o menos, sino simplemente matemáticas todas y exactas en los resultados que de ellas se obtengan.

Lo que sí ocurrirá es que las fórmulas que se obtengan podrán estar alguna vez en cierta contradición con realidades prácticas; pero cuando ésto suceda ha de ser porque falte algún elemento que introducir en las fórmulas para que la expresión matemática sea la que corresponde al fenómeno económico considerado. Cuando aparezca esta contradición ya indicaremos la causa de la misma y la variación en las fórmulas para que los resultados puedan ser reales.

224.—Fórmulas fundamentales del interés anticipado.—De la segunda fórmula que hallamos para la relación entre valores de diferente disponibilidad **(198,** [4]**)** puede obtenerse otra que se refiera a tanto por ciento y sea fundamental para las aplicaciones prácticas de esta clase de interés.

Entonces teníamos:

$$C_k - C_{k+1} = C_k r$$

y ésto nos indica que el *interés anticipado en una unidad de tiempo es igual al producto del capital por el tanto referido*

a igual unidad, ya que esa diferencia que acabamos de reproducir es la definición del interés.

Si ahora sustituímos el tanto por uno r por el tanto por ciento t, la expresión anterior se transforma en esta otra:

$$I = \frac{Ct}{100} \qquad [1]$$

fórmula fundamental para el interés anticipado.

Es de advertir que esta fórmula no interviene el elemento tiempo que intervenía en todas las de intereses vencidos porque ahora no es posible hacer intervenir al tiempo sin ciertas limitaciones que hagan imposible llegar a un absurdo como el de tener que pagarse por intereses anticipados, al tiempo de recibir un capital, tanto o más valor que el mismo que tiene ese capital, lo que equivale a pagar alquiler por lo que no se recibe, cuando los intereses fuesen mayores que el capital, o a no recibir tampoco nada en alquiler adquiriendo sin embargo el compromiso de pagar sucesivos intereses en otros períodos.

El elemento tiempo es el que hay que cambiar en las fórmulas del interés para que sus resultados estén en conformidad con las realidades prácticas no permitiéndole adquirir más que cierto valor, de acuerdo también con las condiciones prácticas que dieron nacimiento a esta clase de interés, y si se quiere que el tiempo tenga todos los valores imaginables será entonces preciso determinar la ley de variación de los demás elementos de la fórmula para que ésta no llegue a resultados absurdos; pero como resulta, que de esos elementos, el capital es en absoluto arbitrario con respecto a cualquier operación, y el tanto es un precio de mercado cuyas variaciones no son expresables matemáticamente, no queda más elemento susceptible de limitar que el tiempo, y a él nos vamos a referir circunscribiéndole a los mismos límites que la convención práctica le señala.

En todos los contratos que dan origen a los intereses anticipados se cobran éstos al principio de un período de tiempo de un año o de fracción de año, sin que *nunca haya necesidad de calcular intereses por más de un año para exigirlos inmediatamente de la entrega del capital*, luego para las ne-

cesidades prácticas y para las condiciones económicas que originan el interés anticipado, *el tiempo no tendrá nunca un valor superior a un año*, y como en la práctica es anual el tanto por ciento, es indudable que en la fórmula para tiempo expresado en años es de todo punto inútil hacer intervenir el factor 1, puesto que en nada alterará el resultado.

El valor acumulado para el interés anticipado resulta que ha de ser el mismo capital, pues habiéndose separado del mismo su interés quien adquiriese la riqueza cedida a interés anticipado no tendría más valor que el del mismo capital hasta tanto que empezase el nuevo período, y como inmediatamente de empezar éste también se separan los nuevos intereses, también queda el capital con un valor igual al de antes cuando termina el nuevo período, y así sucesivamente.

Tomando como valor acumulado el del capital objeto de la operación de interés, siempre resultará que el valor de la riqueza en el momento en que acaba de separarse el interés será el total que tenía menos los intereses separados, y llamándole valor anticipado—que por otra parte es su verdadero nombre—y representándole por M' se tendrá.

$$M' = C - \frac{Ct}{100} = \frac{100C - Ct}{100} = \frac{C\,(100 - t)}{100} \qquad [2]$$

segunda fórmula fundamental del interés anticipado.

225. Fórmulas prácticas para el interés.—En virtud de las relaciones de interés para cuando el tanto y el tiempo se refieren a distinta unidad (**208**), y haciendo intervenir el tiempo en la primera fórmula fundamental que hemos hallado para el interés anticipado, se obtienen las siguientes:

$$I' = \frac{Ctn}{100 \times 12} = \frac{Ctn}{1200} \qquad [1]$$

en el caso de tanto anual, tiempo expresado en meses, y con la limitación de no ser n mayor de 12.

$$I' = \frac{Ctn}{100 \times 360} = \frac{Ctn}{36000} \qquad [2]$$

si con igual condición para el tanto, estuviese expresado en días el tiempo, y fuese el número de éstos menor de 360.

$$I' = \frac{Ctn}{100 \times 365} = \frac{Ctn}{36500} \qquad [3]$$

para cuando los días se refieran al año civil y no excedan de 365, con tanto por ciento anual; y relacionando el tiempo y el período práctico del tanto tendremos como *fórmula general*

$$I' = \frac{Ctn}{100k} \qquad [4]$$

Comparando estas fórmulas con las halladas en el número **212** vemos que son idénticas a aquéllas, y como los ejemplos que para éstas habíamos de presentar tendrían que ser también idénticos a los entonces resueltos remitimos al lector a los del interés vencido si desea obtener alguna aclaración, que no encontrará si ya conoce lo que entonces decíamos.

EJERCICIOS: Todos los propuestos son indistintamente para año de 360 o de 365 días, habiéndose calculado las soluciones para ambos casos.

En la mayoría de ellos se habla de *descuento* por ser esta palabra la forma más general de nombrar el interés que nos ocupa.

EJERCICIOS ESPECIALES; los *números* **304** al **306; 313; 314; 316; 331; 369** y **373**.

EJERCICIOS QUE PUEDEN UTILIZARSE; los propuestos para el interés vencido.

226.—Fórmulas prácticas para el valor anticipado.—Partiendo de la segunda fórmula fundamental de esta clase de interés **(224)** y haciendo como anteriormente que intervenga el elemento tiempo en las fórmulas a la vez que se subdivide la unidad en que el mismo se expresa, por la transformación que se causa en las fórmulas del valor acumulado **(210)** deduciremos para el valor anticipado los valores siguientes:

$$M' = \frac{C(100k - tn)}{100k} \qquad [1]$$

como *fórmula general* para cualquiera relación entre la unidad del tiempo y el período del tanto

$$M' = \frac{C(100 \times 12 - tn)}{100 \times 12} = \frac{C(1200 - tn)}{1200} \qquad [2]$$

para el caso en que el tiempo se exprese en meses con un número no mayor de 12 y sea el tanto anual;

$$M' = \frac{C\,(100 \times 360 - tn)}{100 \times 360} = \frac{C\,(36000 - tn)}{36000} \qquad [3]$$

si el tiempo se expresase en días referidos al año comercial y por consiguiente no más de 360 días, siendo el tanto anual;

$$M' = \frac{C\,(100 \times 365 - tn)}{100 \times 365} = \frac{C\,(36500 - tn)}{36500} \qquad [4]$$

cuando los días a que se refiere el tiempo lo sean con respecto al año comercial, menores de 365 y el tanto también anual.

Si ahora comparamos las fórmulas anteriores con las encontradas en el párrafo **214**, en seguida echaremos de ver que en estas últimas el paréntesis del numerador indica una suma, mientras en las que acabamos de hallar indica una diferencia de las mismas cantidades, lo que muestra que no serán aplicables respectivamente los cálculos de un caso a los del otro. Más adelante veremos la relación que existe entre los elementos de unas y otras fórmulas.

Ejemplos: 1) Hallar el valor anticipado de un capital de 16400 pesetas, que produce intereses al 6 °/₀ anual durante 7 meses.

Los elementos que han de intervenir en el cálculo son:

$$C = 16400, \qquad t = 6, \qquad n = 7.$$

Aplicando ahora la fórmula [2] se tiene:

$$M' = 16400 \times \frac{1200 - 6 \times 7}{1200} = 15826 \text{ pesetas.}$$

2) A qué valor quedarán reducidas 7500 pesetas en el instante en que empiezan a devengar intereses anticipados al 4 °/₀ anual durante 248 días si se opera con el año comercial?

$$M' = 7500 \times \frac{36000 - 4 \times 248}{36000} = 7293'33 \text{ pesetas.}$$

según resulta de la aplicación de la fórmula [3].

3) ¿Cuál es el valor anticipado de 5800 pesetas con intereses de igual clase al 9 °/₀ anual durante 176 días si se considera el año civil?

Son los elementos de cálculo para este ejercicio los siguientes:

$$C = 5800, \qquad t = 9, \qquad n = 176,$$

y si ahora aplicamos la fórmula [4] tendremos:

$$M' = 5800 \times \frac{36500 - 9 \times 176}{36500} = 4548'296 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **310; 311; 315; 324; 325; 335; 352;** y **353**, y además pueden utilizarse todos los propuestos para cálculo del interés.

PROBLEMAS; ejercicios *números* **360** y **361.**

227.—Tanto y tiempo en el interés anticipado.—Si en cualquiera de las fórmulas que dan el interés anticipado **(224** y **225),** tratásemos de despejar uno de los elementos tanto o tiempo, las fórmulas que para estos valores encontrásemos habrían de ser idénticas a las halladas en el interés vencido **(217** y **218)**, por lo que nos abstenemos de deducirlas remitiendo al lector a dicho lugar.

Pero si en vez de despejar los elementos tanto y tiempo de la fórmula del interés, lo hiciésemos de la del valor anticipado **(224** y **226)**, entonces los valores diferirán de los correspondientes del interés vencido como vamos a ver.

Quitando denominadores de la fórmula general del valor anticipado **(226)** se convertirá en la siguiente:

$$100kM' = C\,(100k - tn)$$

de la que por transposición de términos y puesta en factor común se deduce:

$$Ctn = (C - M')100k$$

y de ésta quedará ya despejado el valor tiempo o tanto que se desee, obteniéndose:

$$t = \frac{100k(C - M')}{Cn} \qquad [1]$$

para valor del tanto, y

$$n = \frac{100k(C - M')}{Ct} \qquad [1']$$

para valor del tiempo.

Fijándose ahora en las dos fórmulas que acabamos de hallar y en las de **221** se puede apreciar, que el elemento de unas que cambia con respecto a las otras, es la diferencia del paréntesis. En las del interés anticipado es minuendo el capital, en las del interés vencido lo es el valor acumulado; en las primeras el sustraendo es el valor anticipado y en las segundas el capital, luego la diferenciación de unas y otras está en la

distinta posición que en la diferencia tiene el capital, pero es preciso advertir, como medio de evitar confusiones, que tanto en las fórmulas para el caso de interés vencido como para interés anticipado es siempre minuendo el mayor de los dos valores que hayan de restarse.

Considerando que la diferencia indicada en los numeradores de las fórmulas anteriores es el interés anticipado, damos por reproducidas aquí las razones del párrafo **221** para suprimir los ejemplos correspondientes a la aplicación de las fórmulas.

EJERCICIOS *números* **317; 318; 326; 330; 334; 337; 338; 340** al **343; 366** y los indicados para el interés vencido

PROBLEMAS: los ejercicios *números* **344; 345**; **348; CXXIX** y **CXXX**.

228.—Cálculo del capital en el interés anticipado. — De las fórmulas del interés anticipado se obtienen para el capital valores absolutamente idénticos a los del interés vencido **(216)** por lo que nos abstenemos de su deducción remitiendo al lector a esa otra clase de interés; pero sí es necesario calcularle en función del valor anticipado.

De la fórmula general para el valor de M' **(226**, [1]) obtenemos

$$C = \frac{M'100k}{100k - tn} \qquad [1]$$

y de ésta sucesivamente dando valores a k

$$C = \frac{100M'}{100 - t} \qquad [2]$$

para cuando el tiempo sea igual a un año;

$$C = \frac{1200M'}{1200 - tn} \qquad [3]$$

para tiempo expresado en meses con las limitaciones y circunstancias que ya nos son conocidas;

$$C = \frac{36000M'}{36000 - tn} \qquad [4]$$

para tiempo expresado en días referidos al año comercial;

$$C = \frac{36500M'}{36500 - tn} \qquad [5]$$

para tiempo expresado en días que se refieran al año civil.

Ejemplos: 1) ¿De qué capital proviene el valor anticipado de 18500 pesetas al principio de un año con intereses anticipados al 6 °/₀?

Los elementos de la fórmula son:

$$M' = 18500, \qquad t = 6, \qquad n = 1$$

y aplicando la fórmula [2] se obtiene

$$C = \frac{100 \times 18500}{100 - 6} = 19680'85 \text{ pesetas.}$$

2) Hallar el capital que después de separarle de sus intereses anticipados al 4 °/₀ en 8 meses se redujo a 16000 pesetas.

$$M' = 16000, \qquad t = 4, \qquad n = 8$$

Aplicaremos la fórmula [3] y obtendremos

$$C = \frac{1200 \times 16000}{1200 - 4 \times 8} = 16458'356 \text{ pesetas.}$$

3) ¿Cuál es el capital que al separarle sus intereses anticipados al 5 °/₀ durante 246 días se redujo a 2400 pesetas?

$$M' = 2400, \qquad t = 5, \qquad n = 246$$

Podemos aplicar cualquiera de las fórmulas [4] y [5] puesto que no se advierte a qué año se refieren los días del tiempo.

Con la fórmula [4] obtenemos:

$$C = \frac{36000 \times 2400}{36000 - 5 \times 246} = 2484'90 \text{ pesetas.}$$

y si aplicamos la fórmula [5] el resultado será

$$C = \frac{36500 \times 2400}{36500 - 5 \times 246} = 2485'69 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS en función del interés; *números* **319** y **339.**

EJERCICIOS en función del valor anticipado; *números* **307; 309; 312; 320; 321; 329; 332; 333; 336;** y **351**.

PROBLEMAS; ejercicios *números* **323; 349; 350; 356** y **357.**

229.—Relación entre valor e interés anticipados.— Por la combinación de la fórmula del interés **(225,** [4]) y la del capital antes hallada, obtenemos como relación fundamental de las dos cantidades que tratamos de unir para el caso en que no sea conocido el capital;

$$I = \frac{M'100k}{100k - tn} \times \frac{tn}{100k} = \frac{M'tn}{100k - tn} \qquad [1]$$

de la que deducimos inmediatamente

$$M' = \frac{I(100k - tn)}{tn} \qquad [1']$$

y sucesivamente para las diversas condiciones del tiempo tendremos como fórmulas prácticas;

$$I = \frac{M't}{100 - t} \qquad [2] \qquad M' = \frac{I(100 - t)}{t} \qquad [2']$$

$$I = \frac{M'tn}{1200 - tn} \qquad [3] \qquad M' = \frac{I(1200 - tn)}{tn} \qquad [3']$$

$$I = \frac{M'tn}{36000 - tn} \qquad [4] \qquad M' = \frac{I(36000 - tn)}{tn} \qquad [4']$$

$$I = \frac{M'tn}{36500 - tn} \qquad [5] \qquad M' = \frac{I(36500 - tn)}{tn} \qquad [5']$$

Ejemplos: 1) Hallar el interés anticipado que se cobró en un préstamo al 4 °/₀ durante 9 meses, habiéndose entregado al deudor la cantidad de 85000 pesetas.

Nos serviremos de la fórmula [5] con los valores especiales

$$M' = 85000 \qquad t = 4 \qquad n = 9$$

que da por resultado

$$I = \frac{85000 \times 4 \times 9}{1200 - 4 \times 9} = 2628{,}866 \text{ pesetas.}$$

2) Si de un capital se rebajan por intereses anticipados al 4,5 °/₀ durante 65 días 857 pesetas, determinar el valor a que habría quedado reducido en el momento de la operación.

El resultado pedido se obtiene por las fórmulas [4'] o [5'] en cualquiera de las cuales serán valores especiales

$$I = 857 \qquad t = 4{,}5 \qquad n = 65$$

teniéndose con año comercial

$$M' = \frac{857(36000 - 4{,}5 \times 65)}{4{,}5 \times 65} = 107968{,}40 \text{ pesetas.}$$

y con año civil se obtendría

$$M' = \frac{857(36500 - 4{,}5 \times 65)}{4{,}5 \times 65} = 107983{,}51 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **322** y **CXIX** al **CXXV**.

PROBLEMAS de ECUACIONES DE INTERÉS, los ejercicios números **346; 347** y **350.**

XVIII

DESCUENTO SIMPLE

230.—Definición y clases del descuento simple.— Sabemos (**202**) que los intereses anticipados corresponden a lo que antes hemos llamado descuento, y ahora podemos decir que el descuento simple es aquél cuyos *incrementos negativos absolutos* para tiempos iguales son iguales, es decir, que el descuento es un interés que debe restarse del capital en lugar de sumarlo.

Para determinar las *clases de descuento* tendremos presente las dos clases de interés que antes hemos considerado y dentro de cada una de ellas el valor capital que se toma por base para el cálculo de cada uno (**204** y **224**). El interés vencido se calcula sobre el valor que tiene el capital al principio de los períodos de tiempo, y el interés anticipado toma por base de su cálculo el valor de ese mismo capital al terminar esos mismos períodos, luego, al definir las dos clases de descuento correspondientes a esas dos clases de interés diremos.

1.° *Descuento a interés vencido es el que se calcula sobre el valor del capital al principio de los períodos de tiempo*, y se conoce con el nombre de *descuento racional*.

2.° *Descuento a interés anticipado es el que se calcula sobre el valor del capital al final de los períodos de tiempo*, y se le denomina *descuento comercial*.

Cada una de estas dos clases de descuento se calcula por los procedimientos conocidos para su respectivo interés y, por consiguiente, también ahora nos encontraremos, cuando el tiempo se exprese en días, con las dos variantes de año comercial y año civil o legal.

Todas las cuestiones tratadas al hablar del interés son de aplicación al descuento con sólo sustituir cada clase de interés por su respectiva del descuento.

231.—Racionalidad de las dos clases de descuento. —Antes de seguir con nuestro estudio hemos de hacer constar que *las dos clases de descuento son igualmente racionales y exactas*. Efectivamente; la distinción con las denominaciones de racional y comercial ha nacido en una confusión de la naturaleza de esta operación por parte de los matemáticos, que no han querido apreciar el aspecto económico de ella, y así han designado con el nombre de *racional*, *matemático*, *equitativo* y *real* al descuento a interés vencido porque es el único que sin más elementos que los que ellos emplean para el cálculo de interés permite aplicarle todas las leyes matemáticas sin llegar a resultados absurdos, y llaman *comercial*, o *abusivo* a la otra clase de descuento, tanto por ser el casi únicamente empleado en el comercio, cuanto porque al aplicarle las mismas leyes matemáticas que al anterior llega a ciertos resultados absurdos.

Al parecer están en lo cierto los matemáticos que tales cosas dicen, mas al considerar el origen del descuento podemos echar de ver inmediatamente que la operación de ceder un capital en metálico es idéntica a la cesión de otro bien cualquiera, y por consiguiente, si para riqueza que no sea metálico se admite el pago anticipado de los intereses, no hay razón ninguna para rechazar ese pago anticipado cuando la riqueza cedida esté representada por el dinero, luego, de existir el pago anticipado debe existir también el procedimiento que sirva para calcular la cantidad que haya de pagarse, y como para este cálculo se utilizan las propiedades matemáticas de las cantidades que intervienen en la operación, su resultado tiene que ser tan matemático, exacto y racional como el que se obtenga por el interés vencido cuando sean de esta clase los intereses a calcular.

Lo que sucede, **(224),** es que los matemáticos no quieren admitir que el descuento comercial es una operación económica de la circulación de la riqueza, una cesión de riqueza por un precio determinado, que es precisamente el tanto, y por consiguiente, a lo que hay que atenerse es a las condiciones

que el mercado de esos precios determina para su aplicación, a los alquileres de riqueza, y no querer introducir en los cálculos condiciones de otras operaciones o dejar de considerar todos los elementos de la operación de que se trata. En el caso que nos ocupa, los matemáticos quieren que forzosamente el mercado de descuento a interés anticipado sea el mismo que el de intereses vencidos y con su pretensión absurda se obstinan en que sea irracional el descuento comercial cuando sólo lo sería su obstinación. En el mercado de descuento comercial *el tiempo* se halla limitadísimo y *nunca es mayor de un año;* así que considerando este elemento limitativo y haciéndole intervenir en las fórmulas nunca se llegará a los resultados absurdos a que se llegaría sin esa limitación, y tendremos el descuento comercial tan racional como el que así se hizo llamar por quienes no investigaron la naturaleza de esta operación.

En cuanto al abuso que quieren esos matemáticos que exista en el descuento comercial repetiremos con un sabio maestro español que el único abuso está en el lenguaje empleado por esos que no quieren ver la naturaleza económica del descuento, además de que, al fijar un precio al alquiler, sea éste de dinero o de otra riqueza, nada coarta la libertad de las partes para acordar que ese precio se refiera al valor de la riqueza en tal época o en tal otra y es precisamente esta referencia la que determina la clase de descuento o de interés; luego, tampoco por aquí hay más racionalidad en una u otra clase.

232.—Los valores del capital en el descuento.—Ya sabemos que el descuento se calcula por las mismas fórmulas que hemos hallado para el interés, pero en la aplicación de las mismas puede dar origen a confusiones la diferente denominación de los elementos que en ellas intervienen por lo que es necesario sentar algunas aclaraciones.

Se llama valor NOMINAL al *valor del capital al final del tiempo de la operación*, cualquiera que sea la clase de descuento, por lo cual unas veces corresponde a valor acumulado y otras al capital.

Se denomina EFECTIVO al *valor del capital al empezar el tiempo de la operación*, también en las dos clases de descuen-

to y también con las dos equivalencias respecto de los capitales en el interés.

233.—El descuento con referencia a la denominación de los valores del capital.—Ahora que conocemos cómo se designan los valores del capital en la operación de descuento podemos dar una nueva definición del mismo que aclare las referencias que en adelante hemos de hacer.

Se llama *descuento racional* o *a interés vencido* al que se determina tomando como valor del capital el valor efectivo de la operación, o lo que es lo mismo, aquél que considera el valor nominal como valor acumulado.

Es *descuento comercial* o *a interés anticipado* el que se calcula sobre el valor nominal de la operación, es decir, que considera a este valor nominal como capital y es valor anticipado el efectivo que ha de resultar del descuento.

Una vez que hemos establecido estas dos nuevas definiciones del descuento, ya en adelante trataremos a la vez el interés y el descuento, entendiendo siempre que todo cuanto se diga del interés vencido queda dicho del descuento racional, y cuanto se refiera al interés anticipado es también referente al descuento comercial.

Téngase además en cuenta que en el lenguaje corriente y en el comercial se dice simplemente interés o descuento, y se entiende siempre por interés el interés vencido y por descuento el descuento comercial, y en ese sentido hemos de emplear esas denominaciones diciendo, por ejemplo, tanto de descuento, tanto de interés, números de descuento o de interés, etc.

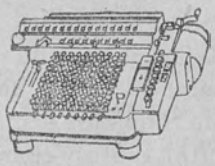
234.—Fórmulas generales de los dos descuentos.—Para completar estas aclaraciones damos a continuación las fórmulas generales del descuento para los tres principales elementos que son el descuento, d, el efectivo, E, y el nominal, N, en función de estos dos últimos y para las dos clases de descuento.

Descuento comercial	Descuento racional
$d = \frac{Ntn}{100k} = \frac{Etn}{100k - tn}$	$d = \frac{Etn}{100k} = \frac{Ntn}{100k + tn}$
$E = \frac{N(100k - tn)}{100k}$	$E = \frac{N100k}{100k + tn}$
$N = \frac{E100k}{100k - tn}$	$N = \frac{E(100k + tn)}{100k}$

de las cuales sería sumamente fácil deducir todas las demás para cualquier

elemento y cualesquiera condiciones de relación entre tiempo y período del tanto.

EJERCICIOS; será conveniente resolver los indicados en el interés y para las dos clases de descuento, según se han calculado las soluciones de los que no señalan especialmente la clase de descuento.



XIX

MÉTODOS COMERCIALES PARA INTERÉS Y DESCUENTO

ESTUDIO GENERAL

235.—Objeto de los cálculos abreviados.—En los cálculos de interés y descuento se han ideado diversos artificios con objeto de reducir, en cuanto fuera posible, las dificultades y duración de dichos cálculos. La importancia de las abreviaciones que se obtienen por esos artificios es tanto mayor cuanto que son de una frecuencia extraordinaria los cálculos relativos a operaciones de interés y descuento; pero entre todos los cálculos a efectuar entre las diversas cuestiones relativas a los intereses o descuentos, la que en la práctica se necesita con más frecuencia es la del cálculo del interés o del descuento en función de todos los demás elementos y en especial en función del capital, tanto y tiempo.

Todavía, examinando la frecuencia práctica de este cálculo echamos de ver que, en la inmensa mayoría de los casos, el tiempo se halla expresado en días, y así también veremos que es al tiempo días al que especialmente se refieren las abreviaciones que hemos de estudiar y algunas veces sólo al tiempo días son aplicables.

De lo anterior resulta que *el verdadero objeto de las abreviaciones en el interés y descuento es el cálculo de estos dos elementos, con especialidad cuando el tiempo está expresado en días,* aunque este objeto no excluye la posibilidad de que se calculen por esos mismos medios los demás elementos que intervienen en los cálculos.

236.—Origen de los métodos abreviados.—Los procedimientos abreviados se conocen con la denominación de

métodos comerciales porque su origen está en el comercio, que es donde con mucha frecuencia son necesarios los cálculos, y así vemos que en las haciendas de carácter bancario continuamente se están calculando intereses, habiendo secciones en las mismas en que no se hace otra cosa. Esta frecuencia, unida a la necesidad de que estos cálculos se hagan con rapidez y exactitud dió origen a los métodos de que nos ocupamos.

237.—Carácter general.—Todos los métodos abreviados del cálculo del interés y descuento consisten en lo que se llama en matemáticas artificios de cálculo, y se determinan por la modificación de las fórmulas, unas veces por simplificación de los quebrados que las representan, otras por los valores especiales que estos quebrados toman para ciertas condiciones del interés, y otras por alteraciones matemáticas que lleven a multiplicaciones o divisiones por la unidad seguida de ceros o a que los elementos de las fórmulas guarden entre sí la relación de división de la unidad monetaria; y debido a la multiplicidad de artificios que pueden ser ideados por los calculadores nacen la enorme variedad de procedimientos, de los cuales sólo hemos de estudiar los de carácter general por ser empleados con gran frecuencia y ventaja, ya que muchos de los que conocemos han sido ideados por el calculador que necesitando hacer muchos cálculos de intereses en una oficina o para un fin determinado, su misma práctica y necesidad le ha dado el medio de abreviar en las especiales condiciones en que se halla.

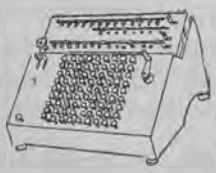
238.—Métodos más importantes.—En vez de enumerarlos indicamos ahora las clases que de ellos se pueden hacer, teniendo así el de divisores fijos o de simplificación sencilla de la fórmula; los de tantos bases o de artificio combinado; los de partes alícuotas o de descomposición mental; los de coeficientes y tablas; los gráficos, y los especiales o de aplicación limitada, de los que examinaremos los que hayan de ser de aplicación general o de fundamento matemático para otras cuestiones de Cálculo Mercantil.

239.—Comparación y combinación de procedimientos.—Siendo el fundamento y origen matemático de los

métodos abreviados los artificios de cálculo, claro está que a la vez que su variedad se obtiene la posibilidad de una ventaja en la unión de dos o más métodos, tanto más cuanto que considerado el año comercial son mayores las posibilidades de artificios estenorítmicos del cálculo, puesto que teniendo gran número de divisores los 360 días, permiten mayores combinaciones y así son muchos más los procedimientos abreviados para el año comercial que no para el año legal; pero la rapidez en el cálculo permitirá que se aprovechen dos o más métodos y que en esta combinación se llegue a incluir otras propiedades de las fórmulas de interés, como se verá en los estudios comparativos que haremos más tarde.

En el estudio de los tantos bases es donde puede más fácilmente apreciarse que no es posible aceptar como de empleo exclusivo uno solo de los diferentes procedimientos abreviados para el interés o descuento, sino que en cada caso particular el calculador debe poder discernir rápidamente, por el examen de los datos del problema, cuál es el procedimiento más ventajoso; y aún estimará los casos en que habrán de emplearse dos o más procedimientos combinados. Esto se aprecia mejor que en ninguna parte en todos los métodos de tantos bases porque ellos mismos constituyen una combinación de procedimientos para llegar a una mayor rapidez del cálculo.

Para obtener la mayor rapidez posible en los cálculos de intereses y descuentos no es posible dar regla ninguna, pues, según antes decimos, es la costumbre práctica y el conocimiento perfecto de los distintos métodos lo que permite al calculador elegir el camino más corto combinando los distintos artificios en que cada método se funda y la habilidad del calculador sólo se obtendrá con la resolución del mayor número posible de ejercicios de esta naturaleza.



XX

DIVISORES FIJOS

240.—Definición y fórmula fundamental.—Se llama *divisor fijo* al cociente de dividir la unidad de tiempo período del tanto, por el tanto por uno.

Resulta pues, que el divisor fijo tendrá por lo menos tantas variedades para cada tanto como subdivisiones pueda tener la unidad de tiempo período del tanto, que para el interés y descuento práctico serán las relativas a años, meses, días comerciales, días legales y, algunas veces también, semanas. La expresión que dará el valor del divisor fijo será

$$\frac{1}{r} \qquad \frac{12}{r} \qquad \frac{360}{r} \qquad \frac{365}{r}$$

la que reducida a tanto por ciento para adaptarla a las condiciones prácticas del interés y descuento, y representando por D el divisor fijo tendremos para el mismo

$$D=\frac{1}{t:100}=\frac{100}{t}; \qquad D=\frac{12}{t:100}=\frac{1200}{t};$$

$$D=\frac{360}{t:100}=\frac{36000}{t}; \qquad D=\frac{365}{t:100}=\frac{36500}{t};$$

según se trate de años, meses, días comerciales o días legales

Para ver la intervención del divisor fijo en las fórmulas del interés o descuento basta fijarse en las fórmulas generales de éstos **(212,** [7], y **225,** [4]**)** y dividiendo numerador y denominador por el tanto por ciento resultará:

$$\left.\begin{matrix} I \\ d \end{matrix}\right\}=\frac{Ctn:t}{100k:t}=\frac{Ctn:t}{100:t}=\frac{Ctn:t}{1200:t}=\frac{Ctn:t}{36000:t}=\frac{Ctn:t}{36500:t}$$

El denominador de las fórmulas que acabamos de encontrar es el divisor fijo por definición, luego sustituyéndole por su valor y haciendo la división que está indicada en el numerador, se tendrá la siguiente *fórmula fundamental por el divisor fijo* para cualquier interés o descuento·

$$I = \frac{Cn}{D}$$

241.—Número comercial y fórmula cuando interviene. El número comercial es el producto del capital por el tiempo de la operación de interés o descuento, o sea, el numerador de la fórmula del divisor fijo, por consiguiente el interés (o descuento) estará dado por la fórmula siguiente:

$$I = \frac{N}{D}$$

en la que N representa al número comercial.

Ejemplo: Calcular el interés que producen 14900 pesetas al 5 °/₀ anual durante 170 días considerando el año comercial.

El divisor fijo para el caso que nos ocupa es 36000 : 5 = 7200, y por lo tanto el resultado que se busca será:

$$I = \frac{14900 \times 170}{7200} = 351'80 \text{ pesetas.}$$

242.—Propiedades del número y del divisor fijo.—1.° *El número comercial representa un nuevo capital cuyo interés por un día es igual al de la suma propuesta durante los días prefijados* es decir, que el número es un capital del que sólo hay que determinar el interés durante un día.

Así por ejemplo, 12000 pesetas en 8 días producirán el mismo interés que 96000 pesetas en un sólo día.

2.° *Un capital igual al divisor fijo correspondiente a la tasa a que ha sido impuesto, produce una peseta de interé por cada día*, y si se tratase de divisor fijo relativo a meses la unidad producida sería en cada mes.

Siendo 6000 el divisor fijo correspondiente al tanto 6°/₀, un capital de 6000 pesetas colocado a dicha tasa por 75 días producirá 75 pesetas de interés o deberá ser descontado en 75 pesetas, ya que según la fórmula fundamental habrá de ser

$$I = \frac{6000 \times 75}{6000} = 75 \text{ pesetas.}$$

Al mismo resultado llegaríamos considerando que si 100 pesetas producen 6 en un año o sea en 360 días, 36000 producirán esas mismas 6 en un día, y un capital 6 veces menor (el divisor fijo) producirá por consiguiente 6 : 6 = 1 peseta.

Esta propiedad y la anterior explican el método de los divisores, porque siendo el *número* el capital de que hay que hallar el interés en un día, y el *divisor* el capital que también en un día produce una peseta, resulta ser el número el valor de una cosa cuya unidad vale lo que indica el divisor, por consiguiente, dividiendo el valor total (número) por el precio (divisor) se obtendrá el número de unidades (interés).

3.° *El divisor fijo expresa el número de unidades de tiempo que son necesarias para que el interés iguale al capital*, pues si un capital igual al divisor fijo produce una peseta de interés en la unidad de tiempo, en un número de unidades iguales a dicho divisor, también producirá un número de pesetas igual, luego, lo que suceda con un capital igual al divisor fijo, sucederá con cualquier otro capital.

4.° *El divisor fijo dividido por ciento, expresa las unidades de tiempo necesarias para que el capital produzca su* $1^{0}/_{0}$, lo que no es sino una simplificación de lo que indica la propiedad anterior.

243.—Tablas de divisores fijos.—La aplicacion del método de divisores fijos no abreviaría el procedimiento general si fuese necesario hallar el divisor a emplear en cada caso por medio de una división, por lo que se hace indispensable tener ya calculados con anterioridad, y de una vez para siempre, los distintos divisores fijos necesarios. Prácticamente se ha resuelto este asunto por medio de tablas como la **XXVI** en las que aparecen los divisores para los tantos más usuales y solo para meses y días, aunque en la práctica podríamos decir que nunca se emplean los divisores correspondientes a tiempo expresado en meses.

De todos los divisores de la tabla solamente son exactos aquellos que terminan en cero, que son los que están en menor número, y por consiguiente, solamente darán resultados exactos los divisores que tengan ese carácter. Por esta causa habrá de tenerse gran cuidado del error que se cometerá en los intereses o descuentos hallados mediante el empleo de

esos divisores inexactos, y aplicar en la división la regla de Guy si se quiere que la operación siga siendo abreviada y que el error no llegue a los céntimos, que es el límite práctico que en cualquier caso será necesario obtener.

Dicho error hace que en tales casos se haya de recurrir a otros procedimientos más exactos, sin excluir nunca la posibilidad de emplear los divisores cuando el error no llegue a la unidad correspondiente a los céntimos, lo que se determinará a priori por las reglas de los números aproximados.

EJERCICIOS *números* **377** al **386,** pudiendo ser utilizados todos los indicados para cálculo del interés.

244.—Las fórmulas derivadas con el divisor fijo.—Aunque ya hemos dicho que los métodos abreviados se emplean con gran preferencia para calcular el interés o el descuento, pudiera ser necesario alguna vez el conocimiento de las fórmulas para todos los elementos que intervienen en el cálculo, y como estas fórmulas pueden deducirse de la fundamental para los divisores fijos **(240)** de igual modo que se dedujeron de la del interés, para el caso que nos ocupa, se tendría:

1.° *Tanto.*—Para este elemento no hay ni puede haber fórmula por ser elemento inseparable del divisor fijo, y para conocer el tanto cuando se sabe cuál es el divisor bastará consultar la tabla, ya que si en ella no estuviera el divisor, se obtendría el tanto deseado por medio de una proporción inversa con el más aproximado que contuviere la tabla. Si se conocieran todos los elementos menos el tanto, entonces también sería desconocido el divisor y por consiguiente, solo de las fórmulas directas sería posible obtener el tanto desconocido.

2.° *Capital.*—La fórmula para este elemento sería **(216)**

$$C = \frac{ID}{n}$$

que para un interés (o descuento) de 140 pesetas en 25 días de año comercial al $4\frac{1}{2}\%$ nos dará; después de ver que el divisor fijo correspondiente es 8000

$$C = \frac{140 \times 8000}{25} = 44800 \text{ pesetas.}$$

3.° *Tiempo.*—En este caso **(217)** la incógnita del anterior pasa a ser denominador de la fracción y viceversa, teniéndose:

$$n = \frac{ID}{C}$$

y calculando el tiempo que ha sido necesario a un capital de 25000 pesetas para que su descuento al 5 % por años legales haya ascendido a 300 pesetas tendremos:

El divisor fijo que hemos de emplear es según la tabla 7300, luego

$$n = \frac{500 \times 7300}{25000} = 87'60 <> 88 \text{ días.}$$

EJERCICIOS. Los indicados en las páginas 230, 231, 244 y 245.

245.—Simplificación del número comercial.—Con el fin de hacer todavía más rápidas las operaciones del cálculo de intereses y descuentos se han introducido en la práctica modificaciones en los números comerciales en dos grados diferentes que pudiéramos decir pertenecen a la formación y después a la reducción de tales números.

1.° *Formación del número.*—Esta simplificación consiste en la supresión de las cifras decimales que tenga el capital para la multiplicación por el tanto. Es indudable que para obtener un interés o descuento rigurosamente exacto es necesario que tenga el mismo carácter el número comercial, y para ello será indispensable que en el cálculo del número intervenga todo el capital con sus cifras decimales inclusive, sin embargo se ha hecho de uso corriente operar como si el capital no tuviera cifras decimales, es decir que por ejemplo, para calcular el número de 5634'16 pesetas durante 28 días se multiplicará solamente el capital 5634 teniendo el número

$$5634 \times 28 = 157752.$$

Para que el error que con esa supresión se comete sea menor, la aproximación del capital debe hacerse en menos de media unidad entera, es decir, despreciando las cifras decimales, que sean una cantidad menor de 0'50 pesetas y añadiendo al capital una unidad cuando las cifras decimales fuesen una cantidad mayor de ese 0'50, despreciando luego las cifras decimales. En el primero de esos casos se encontraba el capital del ejemplo anterior, y si ese capital fuese, por ejemplo, 7802'69 el número se obtendría al multiplicar por el tiempo la cantidad 7803.

2.° *Reducción del número.* La simplificación a que ésto se refiere consiste en la supresión de las dos últimas cifras del número comercial encontrado por el procedimiento anterior. Para llegar a ello se partió de la simplificación del divisor fijo, pues como en la mayoría de los casos el divisor del año comercial termina en dos o más ceros, cuando es exacto, se pensó en suprimir esos ceros haciendo igual operación con el

número. Todavía no fué hecha la supresión de las cifras del número directamente, sino que se dividió por 100 lo mismo el divisor que el número y luego, para no operar con cifras decimales, se despreciaron esas cifras del número, advirtiéndose inmediatamente que se cometía un error con tal procedimiento y para subsanarle en parte se forzó en una unidad el número resultante de esa supresión cuando la fracción suprimida fuese mayor que 0'50, suprimiéndola solamente cuando fuese menor de dicha cantidad.

Si por ejemplo, deseáramos calcular el descuento de 1728'45 pesetas durante 69 días considerando el año comercial y al 4 %, el número que debiera dividirse por el divisor fijo sería, según lo dicho: $1728 \times 69 = 119252$ y por reducción quedaría convertido en 1192; y si el descuento a calcular durante el mismo tiempo y tanto fuese de 8690'71 el número formado sería $8691 \times 69 = 599679$ el que al efectuar la reducción se convierte en 5997.

Este número así reducido se llama *número truncado* o *tachado.*

246.—Tablas de números comerciales.—Cuando se hacen muchos cálculos de interés por medio de los divisores fijos son muy útiles esta clase de tablas que consisten en disponer en una columna los días del año y en la misma línea de cada día el número comercial que le corresponde para diversos capitales. Para que puedan ser empleadas es indispensable que sean muy extensas por lo que no podemos incluirlas en esta obra.

247.—Errores del cálculo por divisores fijos.—Además del error anteriormente indicado, de los divisores inexactos, y del que señalamos con respecto al año comercial (**205**), por la simplificación que acabamos de indicar nacen otros errores, de los que es indispensable conocer la importancia para desechar el procedimiento si de ellos resultase daño de consideración para alguna de las partes que intervienen en las operaciones de interés y descuento, o para corregir los resultados erróneos cuando se siga el procedimiento.

El error cometido por considerar el año de 360 días en vez de 365 es de $^1/_{26280}$ por cada unidad de capital y de tiempo a la vez, es decir, por cada unidad del número comercial y para el tanto por uno, luego el error cometido para cualquier tanto por unidad de número será de $1 : (26280 : t)$. Ahora bien; el cociente encerrado en el paréntesis anterior nos dice el valor que ha de tener el número comercial para que el error llegue a una unidad, así que siempre que por dicho error considere-

mos que el perjuicio es de importancia—en la práctica se puede admitir como error de importancia el que llegue a media décima de peseta—despreciaremos el método por inexacto.

Hemos examinado la cuestión de ese error bajo el punto de vista matemático, y además es indispensable examinarla desde el aspecto técnico o legal; en este aspecto no existe error de cálculo, porque ese procedimiento está admitido generalmente por los contratos que dan origen a tales cálculos, hasta el punto de que en las condiciones de descuento de algunos establecimientos de crédito se expresa que los cálculos de interés o descuento se harán «según el divisor fijo correspondiente al año comercial de 360 días» y la admisión de la operación en el establecimiento de que se trate es ya una conformidad tácita con ese procedimiento de cálculo, lo que hace imposible las reclamaciones de perjuicios que por ello pudieran originarse. En apoyo de esta misma legalidad del procedimiento que matemáticamente considerado es erróneo, está la naturaleza del tanto de interés y descuento, pues siendo éste un precio de mercado y estando fijado ese precio por los establecimientos de crédito ya se tiene en cuenta que se harán los cálculos por ese procedimiento cuando se fija el precio, luego, el tanto es precio en relación al mismo procedimiento, y, por consiguiente, exactos los resultados del mismo. Si ese error tuviera importancia es indudable que aquellos establecimientos que se sirven del año civil de 365 días, harían notar en sus propagandas la ventaja que tendrían sus clientes al operar con ellos, que se sirven del único procedimiento exacto.

En cuanto al error de la simplificación en la formación del número comercial, sería necesario que hubiese un número de capitales igual a las centenas del divisor fijo para que este error llegase a valer medio céntimo, lo que sobra para dejar de tener en cuenta la equivocación que en el cálculo motiva la simplificación de que nos ocupamos.

Donde es importante el error es en el cálculo por medio de los números truncados, pues en un solo capital puede ya causar alteración en los céntimos del resultado, ya que la medida del límite de ese error es un quebrado cuyo numerador es la unidad y que tiene por denominador las centenas del divisor

fijo; pero forzando el número truncado en la forma que ya hemos dicho, ese error disminuye, compensándole en su mayor parte cuando son varios los capitales de que se trata de calcular el interés o descuento, luego, este modo de cálculo es también aceptable en la práctica, porque sus errores no llegan a la importancia que se exige para considerar los resultados como no exactos. Si además de truncar el número se hubiese simplificado un divisor que no termina en ceros, entonces el error cometido es igual al relativo del nuevo divisor multiplicado por el cociente, y por lo mismo con importancia más que suficiente para desechar el procedimiento.

Resulta de todo lo anterior que *el error que se comete por el empleo de los divisores fijos no tiene importancia matemática; el que resulta de considerar divisores del año comercial puede llegar a tener importancia matemática, pero no puede desecharse su uso por ser una convención de carácter técnico, tácita o expresamente convenida por las partes; el error de los números truncados o solamente simplificados, tampoco tiene importancia bastante para desechar el método; y el error que se comete de truncar el número y simplificar a la vez el divisor que no termina en dos ceros hace inaplicable el procedimiento.*



XXI

PARTES ALÍCUOTAS

248.—Definición.—El método, o mejor dicho, los métodos de partes alícuotas consisten en la descomposición de los elementos que entran en el cálculo del interés y descuento en partes que representen alícuotas de otra cuyo interés o descuento se conozca o sea fácil de hallar, para luego calcular los intereses o descuentos parciales y sumar los resultados para tener el total de la operación de que se trate.

Estos métodos son una ampliación del que ya utilizamos para el tanto por ciento (**9**), teniendo en cuenta las propiedades de los divisores fijos y números comerciales.

249.—Partes de la unidad del tiempo.—Consiste en determinar el interés de un año, lo que la mayoría de las veces podría hacerse mentalmente, y después descomponer el tiempo dado en partes alícuotas del año, —trimestres, meses, quincenas, decenas, días—tomar las mismas partes alícuotas del interés o descuento y sumar los resultados parciales.

Ejemplo: Calcular el interés de 6846 pesetas al 5 % en 10 meses y 15 días.

Considerando el año comercial, el interés de ese capital en un año será $68'46 \times 5 = 342'30$ pesetas, y durante el tiempo de la operación

Para	6 meses, la mitad del año,	342'30 : 2.....	171'15	ptas.
»	5 » » »	» anterior, 171'15 : 2.....	85'575	»
»	1 » el tercio	» » 85'575 : 5.....	28'525	»
»	10 días »	» » 28'525 : 5.....	9'508	»
»	5 » el décimo	» mes, 28'525 : 10.....	2'852	»
	Total de la operación.....		297'610	»

250.—Partes alícuotas del tiempo.—En este procedi-

miento se calculan los intereses o descuentos correspondientes a un número de días y a las partes alícuotas de dicho número en que se descomponga el tiempo de la operación, sumando luego como anteriormente.

El número de días base del método se deduce de las propiedades del divisor fijo (**242**) referidas al correspondiente a los números truncados, ya que de otro modo sería necesario que el tiempo fuese de algunos millares de días, con lo que resulta fundamental para el método de partes alícuotas del tiempo, que *para un tiempo igual a la centésima parte del divisor fijo el interés o descuento es igual a la centésima parte del capital*, lo que puede demostrarse directamente, generalizándolo a la vez, y para ello en la fórmula fundamental del divisor fijo consideraremos (**240**) que el divisor es igual al múltiplo m del tiempo, y se tendrá:

$$I = \frac{Cn}{D} = \frac{Cn}{mn} = \frac{C}{m}$$

o sea, que si *el divisor fijo es múltiplo o submúltiplo del tiempo* (si el factor m es fracción de numerador 1) *el interés o descuento es igual al mismo submúltiplo o múltiplo del capital*, y si hacemos $m = 100$ también

$$I = C : 100$$

que es la propiedad fundamental del método

De esta propiedad fundamental se pueden deducir bases del cálculo para los diferentes tantos que se emplean en la práctica, si bien son de poca utilidad y menos aún si se dispone de las tablas de divisores fijos, pues no siendo bases utilizables más que aquellas que dan un número de días exactos, la tabla solamente contendría pocos tantos y precisamente aquellos cuyo divisor fijo termina en dos ceros. Como tabla de tiempos bases puede servir la de divisores fijos.

De la propiedad fundamental se deducen las dos siguientes:

1.º Si el tiempo de la operación es un múltiplo de la base del cálculo, el interés o descuento es igual al mismo múltiplo de la centésima parte del capital

2.º Si la duración de la operación es la mitad, tercio, o un submúltiplo cualquiera de la base del cálculo, el interés o descuento es el mismo submúltiplo del 1 % del capital.

En resumen: se toma un número de días igual a la centésima parte del divisor fijo; al interés que a este tiempo corresponde se le añaden los de los múltiplos y submúltiplos de dichos días, en que se habrá descompuesto el resto del tiempo, y si hubiera algún exceso para formar los respectivos múltiplos y submultiplos, el interés de ese exceso se restaría de la suma de los demás, es decir, que *se hará la suma algebraica de los intereses ó descuentos que correspondan a las diferentes partes en que se descompuso el tiempo.*

Ejemplo: Hallar el interés que producirán 65479 pesetas al $4\,^1/_2\,^0/_0$ durante 274 días.

La centésima parte del divisor fijo de $4\,^1/_2\,^0/_0$ es 80, luego se tendrá:

1.° Procediendo por solo adiciones.

80 días,	interés correspondiente a la base.....	Ptas.	654'79
	Restan 194 días en los que es interés		
160 »	el doble que durante 80.....	»	1309'58
16 »	el décimo de 160.....	»	130'96
16 »	igual que antes	»	130'96
2 »	el octavo de 16.....	»	16'37
274 »	Total de los intereses buscados...	»	2242'66

2.° Si procedemos por sumas y restas, o sea, por suma algebraica:

Interés durante	80 días.....	Ptas.	654'79
»	»	160	»	654'79 × 2.....	»	1309'58
»	»	40	»	654'79 : 4.....	»	327'40
»	»	280	»	.....	»	2291'77

Resulta el cálculo hecho para más días de los que en realidad debiera haberse hecho, por lo que es necesario restar el interés de 6 días.

Interés durante	4 días	327'40 : 10.....	Ptas.	32'74
»	»	2	»	32'74 : 2...	»	16'37
»	»	6	»	para restar.....	»	49'11

La diferencia 2291'77 — 49'11 = 2242'66 es el interés que tratábamos de hallar y el mismo que hallamos por el procedimiento de solo adiciones.

En vez de hacer esa suma y luego la diferencia que hemos hecho en este segundo caso, podríamos haber efectuado la suma algebraica que indica la regla para este procedimiento y el resultado habría sido el mismo.

Por el ejemplo anterior vemos que las operaciones aritméticas a efectuar con el método de partes alícuotas son sumamente elementales, pues la única dificultad está en la descomposición del tiempo en las partes alícuotas, y de la habilidad del calculador en esta descomposición depende la rapidez del procedimiento, habilidad que se obtiene con el empleo del método.

251.—Partes alícuotas del capital.—En él se descompone el capital de modo semejante a como antes se descomponía el tiempo, y algunos le llaman *método de partes alícuotas del divisor fijo* porque la descomposición del capital se hace en múltiplos y submúltiplos del divisor fijo.

Si en la fórmula fundamental para el divisor fijo hacemos el capital múltiplo de ese divisor, siendo $C = Dm$

$$I = \frac{Cn}{D} = \frac{Dmn}{D} = mn$$

lo que nos dice que *cuando el capital es múltiplo del divisor fijo, el interés o descuento es igual al mismo múltiplo del tiempo*, y si hacemos que m sea la unidad tendremos el fundamento del método que nos ocupa, según el cual *para un capital igual al divisor fijo corresponde un interés o descuento igual a los días en que se expresa el tiempo.*

El método de que nos ocupamos, por consiguiente, consistirá en descomponer el capital en sumandos que sean múltiplos o submúltiplos del divisor fijo, calculando los intereses correspondientes a cada una de estas partes por medio de sencillas multiplicaciones o divisiones, y sumar los resultados parciales que compondrán la cantidad buscada. Para facilitar la descomposición puede considerarse algún submúltiplo sustractivo,—de igual modo que antes lo consideramos para el tiempo—y por eso después de obtener los intereses o descuentos parciales, se hará la suma algebraica de los mismos.

Ejemplo: Calcular el descuento que corresponde a un capital de 14780 pesetas al que falta para ser disponible 150 días; si se considera el tanto de descuento de 4 °/₀ para el año comercial.

El divisor fijo correspondiente a este tanto es 9000, por consiguiente un capital de este importe soportará un descuento de 150 pesetas y el del ejemplo propuesto será:

Descuento de		9000	pesetas	....	150	Ptas.
»	»	4500	»	150 : 2.....	65	»
»	»	900	»	150 : 10.....	15	»
»	»	300	»	15 : 3.....	4'35	»
»	»	50	»	4'35 : 6.....	0'72	»
»	»	30	»	4'35 : 10	0'43	»
»	»	14780	»	(lo buscado)...	215'48	»

Del mismo modo que hicimos en el tiempo, podríamos haber considerado

después de las 500 pesetas una fracción de 90 pesetas, cuyo exceso en el descuento es de 10 pesetas, que por ser la novena parte del anterior calcularíamos fácilmente para restarlo de la suma de todos los demás.

252. Partes alícuotas del número comercial.—Si combinamos los dos últimos procedimientos del cálculo de intereses y descuentos resultará que *si el número comercial es un múltiplo del divisor fijo el interés o descuento correspondiente es el mismo múltiplo de la unidad entera*, como indudablemente se tiene al simplificar la fórmula fundamental para el método de los divisores fijos (**240**).

De esta propiedad es muy fácil deducir el interés que corresponda a un número comercial cualesquiera, y valiéndose de ella se han calculado tablas que dan el interés o descuento que corresponde, según los tantos más usuales, para números comerciales formados por números redondos, en la forma que puede verse en la tabla **XXVII.**

Una vez dispuestas estas tablas, se descompondría el número comercial en sumandos representados por los diferentes órdenes de sus unidades, de los cuales sumandos se tendría el interés o descuento por las tablas y después se sumarían estos intereses o descuentos parciales en la misma forma que ya lo hemos hecho en los demás procedimientos.

Ejemplo: Hallar el descuento de 64850 pesetas al 6 % durante 40 días considerando el año comercial.

El número comercial para este capital es:

$$64850 \times 40 = 2594000$$

y el descuento de todo el capital valiéndonos de la tabla, el siguiente:

Descuento para el número	2.000.000	333'333 Ptas.
» » » »	500.000	83'333 »
» » » »	90.000	15'000 »
» » » »	4.000	0'667 »
» total buscado de	2.594.000 números.	432'333 »

Este procedimiento tiene su mayor aplicación en el caso de que los capitales de que haya de calcularse el interés o descuento fuesen más de uno, según veremos cuando tratemos del caso de varios capitales.

253.—Partes alícuotas del tanto.—Este procedimiento es en su extructura semejante a los dos ya conocidos de partes alícuotas del capital y del tiempo y en su aplicación sirve úni-

camente para aquellos tantos que tengan divisor fijo inexacto o que sean números mixtos que dificultan los cálculos por el procedimiento ordinario, como sería, por ejemplo, el 4'32 °/₀ u otro semejante.

Para aplicar el método de que nos ocupamos se calcula el interés o descuento a otro tanto diferente del que interviene en la operación, eligiendo un tanto que facilite grandemente los cálculos, y después se descompone la diferencia entre el tanto verdadero y el que se supuso, en partes alícuotas de éste supuesto, para que a ellas correspondan los mismos múltiplos o submúltiplos de los intereses, y por suma algebraica se restablecen los intereses o descuentos al verdadero tanto.

Ejemplo: Calcular el interés que corresponde a 74200 pesetas al 5'80 °/₀ durante 185 días considerando el año comercial.

Siendo muy fácil calcular el interés de un capital al 5'60 °/₀ pues que el divisor fijo de este tanto es 10000, calcularemos el interés a este tanto, y como el verdadero excede en 0'20 °/₀ descompondremos este exceso en partes alícuotas de 5'60, o de las que vayan resultando, y que en este caso serían 0'18 que es la mitad de la décima parte de 5'60 y luego 0'02 que es la novena parte del anterior, y calculados los intereses parciales de estos dos nuevos tantos los sumaremos con el encontrado para 5'60, teniéndose:

Interés al 5'60 °/₀	74200 × 185 : 10000	1372'70	Ptas.
» » 0'18 °/₀	137'27 : 2	68'635	»
» » 0'02 °/₀	68'64 : 9	7'626	»
» » 5'80 °/₀		1448 961	»

De igual modo que para los demás métodos de partes alícuotas, puede ser aquí necesario algunas veces agregar alguna pequeña parte al tanto para poder formar un múltiplo o submúltiplo de los en que se descompone, y entonces la suma sería de cantidades positivas y negativas, teniendo este signo las correspondientes a la rectificación que exigiría la parte agregada para la formación de aquel múltiplo o parte alícuota.

254.—Partes alícuotas de tanto y tiempo.—Consiste este procedimiento en descomponer el tanto en partes alicuotas en relación con una descomposición semejante en el tiempo, de modo que el denominador de las partes de ambos elementos sea el mismo, así si se descompone el tiempo en cuartas partes, también en cuartas partes se descompone el tanto.

Esta descomposición no se hace por sumandos como la de los métodos anteriores, sino que fijado el tanto en la unidad del tiempo, se calcula la alícuota que de este tanto corresponde al

tiempo; así por ejemplo, si el tanto anual es de 8 % y el tiempo fuese de 3 meses, como este tiempo es la cuarta parte de la unidad del tiempo año, también la cuarta parte del tanto anual 8 % será la que corresponda al tiempo considerado, luego, para tres meses corresponderá el 2 %.

Cuando se tiene el tanto que corresponde a una alícuota de la unidad de tiempo, se descompone éste en sumandos (**250**) y se calcula el interés o descuento de cada parte haciendo la suma algebraica a que venimos refiriéndonos.

Para el empleo de este procedimiento ha de ser utilizada una tabla como la **XXXII.**

Ejemplo: Calcular el interés que corresponde a 36800 pesetas al 9 % durante 11 meses y 24 días.

Descomponiendo la unidad de tiempo en cuatrimestres, resultará que para cada uno de éstos ha de corresponder un tanto igual a la tercera parte del propuesto, es decir, el 3 % y con ello el interés buscado sería:

Interés de	4 meses; el 3 % de 36800.	1104'00	Ptas.
» »	4 »	....	1104'00	»
» »	2 »	1104'00 : 2	552'00	»
» »	1 »	1104'00 : 4	276'00	»
» »	11 »	.....	3036'00	»

y añadiendo ahora el interés de los días, para lo que consideramos que pertenecen a mes de año comercial, se tendrá:

Interés de	6 días 276'00 : 5	55'20	»
» »	18 » 55'20 × 3	165'60	»
»	total buscado.....	3256'80	»

Ejercicios *números* **387** al **400,** pudiendo ser utilizados todos los propuestos para el interés de ambas clases.



XXII

TANTOS BASES

255.—Concepto y fundamentos.—Se llaman procedimientos de tantos bases aquellos que consisten en calcular los intereses o descuentos a un tanto cualquiera que se adapte fácilmente a las condiciones del problema, y después añadir o quitar al interés o descuento hallado, la parte que falte o exceda el tanto verdadero con relación al que sirvió de base.

A este procedimiento suele denominársele también de *divisor constante* porque adoptado un tanto base siempre nos serviría el mismo divisor fijo; pero hay que tener presente que el interés o descuento al tanto base no se calcula sólo por los divisores fijos sino por cualquiera de los procedimientos conocidos hasta ahora, y que, por consiguiente, no hemos de darle denominación que excluya algún método de cálculo.

El fundamento de estos procedimientos está en el mismo del interés y como aquél, no excluye forma ninguna para llegar al conocimiento de un interés al tanto básico, debiendo aceptar que el cálculo se haga por cualquier procedimiento, y que luego se rectifique la diferencia de los tantos.

256.—Correcciones.—Cuando se adopta un tanto base para el cálculo del interés o descuento es indispensable corregir el resultado obtenido para referirle el tanto verdadero, y a ello puede llegarse por medio de una multiplicación y división o bien por una suma o resta, según se trate de considerar la relación entre los dos tantos o el exceso del uno sobre otro.

Para deducir la corrección por el primer método basta fijarse en que si tenemos

$$I = Crn \qquad \text{y} \qquad I' = C'r'n'$$

también ha de ser

$$\frac{I}{I'} = \frac{Crn}{C'r'n'}$$

y si hacemos que sean iguales los capitales y los tiempos, al simplificar se halla

$$\frac{I}{I'} = \frac{r}{r'}$$

Haciendo ahora para evitar confusiones que el interés o descuento encontrado al tanto supuesto sea R, refiriendo las fórmulas a tanto por ciento y siendo respectivamente t el tanto verdadero y t' el tanto base supuesto, la relación anterior quedará convertida en la siguiente:

$$\frac{I}{R} = \frac{t}{t'}$$

que da para valor del interés o descuento verdadero:

$$I = \frac{Rt}{t'}$$

y de aquí se deduce: *Para corregir el resultado de aplicar un tanto base cualquiera al cálculo del interés o descuento, se multiplica dicho resultado por el tanto por ciento dado y este producto se divide por el tanto que sirvió de base.*

Ejemplo: Sea hallar el descuento que corresponde a 6548 pesetas durante un año al $7\ ^1/_2\ \%$ anual.

Tomando el $4\ \%$ como tanto base este interés sería de 261'92 pesetas y haciendo la corrección según la regla anterior encontramos:

$$d = \frac{261'92 \times 7{\cdot}5}{4} = 491'10 \text{ pesetas.}$$

Para la corrección por suma o resta partiremos de la misma proporción de la que se deduce esta otra

$$I \text{ o } d \pm R : R :: t \pm t' : t'$$

y llamando e al error que representa el tanto base y E al error del resultado, los cuales corresponden respectivamente al tercero y primero de la proporción, ésta se convierte en

$$E : R :: e : t'$$

de la que se obtiene el valor de la corrección E que será:

$$E = \frac{Re}{t'}$$

De esta fórmula resultará para valor del interés o descuento verdadero

$$I \text{ o } d = R \pm \frac{Re}{t'}$$

lo que nos dice que *para corregir el resultado obtenido para el interés o descuento por la aplicación de un tanto base cualquiera, se añade o resta a dicho resultado su producto por el cociente de dividir por el tanto base la diferencia entre éste y el verdadero.*

Si se trata del ejemplo anterior, el error en el tanto sería de 7'5 — 4 =3'5 y como el resultado era de 261'92 pesetas la corrección será

$$E = \frac{261'92 \times 3'5}{4} = 229'18 \text{ pesetas.}$$

las que agregadas al resultado por el tanto base nos dan para el descuento

$$d = 261'92 + 229'18 = 491'10 \text{ pesetas}$$

que es el mismo resultado obtenido con la otra corrección.

257.—Método de los 60. – Consiste este procedimiento en tomar como tanto base el 6 °/₀ y calcular los intereses o descuentos según dicho tanto base por el procedimiento de las partes alícuotas del tiempo (**250**). El tiempo que sirve de fundamento para la descomposición del de la operación es 60 días comerciales, y de ahí el nombre con que se designa el procedimiento de que nos ocupamos.

En virtud de lo que llevamos dicho, la parte alícuota del tiempo que se calculará con más facilidad es la correspondiente a 6 días, pues siendo la décima parte de los días base del cálculo, resultará que *un capital al 6 °/₀ produce en 6 días su milésima parte como intereses, y le corresponde también la milésima parte como descuento*, siendo considerado también fundamental este principio.

Una vez obtenido el interés o descuento al 6 °/₀ será preciso corregir el resultado, habiéndose adoptado el procedimiento de suma o resta para esta corrección, y no en su pureza, sino

en combinación con las partes alícuotas del tanto (**253**), ya que esta corrección y la segunda parte de aquél procedimiento son en esencia la misma cosa.

Para servirnos del procedimiento de los 60 hay que descomponer en partes alícuotas primero el tiempo y después el tanto, y ahora, como ya se hizo en casi todos los demás procedimientos, se han dispuesto tablas como la **XXX** con la descomposición del número de días, comprendiendo unas el trimestre, tiempo durante el cual se hacen la mayoría de las operaciones bancarias; otras un semestre, y algunas todo el año. Estas tablas no señalan ni pueden señalar una descomposición exclusiva del tiempo, pues cada calculador hace la descomposición que estima más conveniente, y al cabo de pocos ejercicios que se hayan resuelto será más rápida cualquiera descomposición espontánea que el consultar la tabla.

En cuanto a la descomposición de los tantos, también se han calculado tablas cual la **XXXI** que faciliten el trabajo y las que, al igual de las anteriores, su verdadera utilidad la tienen para los principiantes, pues obtenida cierta práctica en la descomposición siempre es más conveniente la descomposición espontánea que la consulta de la tabla.

Ejemplo: Calcular el interés de 15640 pesetas al 4 $^1/_2$ % durante 50 días considerando el año comercial.

Por la tabla de descomposición el interés será:

Interés durante	60 días, el 1 % del capital	156'4000	Ptas.
» »	10 » la sexta parte del anterior.	29'0667	»
» »	50 »	130'3333	»
Como el interés que acabamos de calcular es al 6 % deberemos restar su cuarta parte que es		32'5833	»
y resultará para interés al 4 $^1/_2$ % pesetas		97'7500	

258.—Método del 3,60 %.—Siendo el divisor fijo del 3'60 por ciento para el año comercial 10000 cuando se emplean los números completos, y 100 si se hace uso de los números truncados, resultará que *para el 3'60 % el interés o descuento es igual a la diezmilésima parte del número comercial completo o la centésima parte del número truncado* por lo que para calcular el interés a este tanto base, se descompondrá el tiempo en partes alícuotas de la unidad, ya que para la uni-

dad el número es el mismo capital, y por medio de sencillas multiplicaciones se determina el interés o descuento de cada parte del tiempo descompuesto, sumando después en la forma que nos es conocida.

Este procedimiento no puede ser de tan grande aplicación como el anterior porque la descomposición del tanto para la corrección es más difícil a causa del menor número de divisores de este tanto, y por su naturaleza respecto del 6 °/₀ – el triplo de su décima parte—se le conoce también con la denominación de *método de los tres sesentas*.

Ejemplo: Sea calcular el interés que corresponde al ejemplo anterior.

Como el tiempo no contiene más que una cifra significativa y su total es precisamente la mitad de 100 días, también el interés al 5'60 °/₀ será la mitad de la centésima parte del capital o sean 78'20 pesetas.

Haciendo ahora la corrección del resultado por el primer procedimiento del párrafo **256** tendremos:

$$I = \frac{78'20 \times 4'5}{5'60} = 97'75 \text{ pesetas.}$$

que es el mismo resultado encontrado anteriormente.

259.—Procedimientos de sumas y restas o del 4 °/₀. Aunque hemos visto que todos los métodos en que hay descomposición en partes alícuotas pudieran llamarse de sumas y restas, pues en todos la descomposición puede hacerse para que el resultado total se obtenga por una u otra de esas dos operaciones, se designa con ese nombre el procedimiento de tanto base 4 °/₀, porque si nos servimos del multiplicador fijo **(263)** del 4 °/₀ para el año comercial, el resultado obtenido con él sería el mismo que el de sumar a la diezmilésima parte del número comercial su décima parte, a esta suma la décima parte del último sumando y así sucesivamente hasta la aproximación deseada, suma que a la vez se puede obtener abreviadamente como se obtiene el producto de un número cualquiera por otro formado sólo de cifras 1, que ya conocerán nuestros lectores

Para comprender la razón de estas *sumas* basta ver que si en la fórmula del interés o descuento para el caso de tanto 4 °/₀ y días de año comercial

$$I = \frac{Ct4}{36000}$$

dividimos numerador y denominador por 3'60 tenemos

$$I = \frac{Cn\frac{4}{3'6}}{\frac{36000}{3'6}} = \frac{Cn(1'111111...)}{10.000}$$

y descomponiendo en la suma de unidades de diferente orden al factor del paréntesis

$$I = \frac{Cn(1 + 0'1 + 0'01 + 0'001 + ...)}{10000}$$

que por medio del número comercial sería

$$I = \frac{N}{10000}(1 + 0'1 + 0'01 + 0'001 + ...)$$

Si ahora, en vez de servirnos del multiplicador fijo para calcular el interés o descuento al 4 %, nos servimos del divisor fijo también para el año comercial, resultará que hemos de hallar el cociente del número comercial por 9000, y como el cociente de un número cualquiera por 9 también puede hallarse abreviadamente con toda la aproximación necesaria por medio de sencillas *restas*—según enseña la Estenoritmia—de aquí que al emplear estas restas nos hallemos con la segunda parte de la denominación del procedimiento.

Obtenido el interés o descuento al 4 % se hará la corrección en la forma que ya conocemos para referir el resultado al tanto verdadero.

Ejemplo: Calcular el descuento que corresponde a un capital de 12384 pesetas al 5 ½ % durante 70 días,

Por el *procedimiento de sumas*, el descuento al 4 % será:

Número comercial dividido por 10000; (12684 × 70) : 10000 = 86'688.

Descuento al 4 %; 86'688 + 8'6688 + 0'8669 + 0'0867 + 0'0086 = 96'32 con la aproximación suficiente.

Si empleamos el *procedimiento de restas* tendremos:

División del número comercial por 9.

Resíduo de las unidades del número a 10.	0
» » » decenas al resultado anterior.....	2
» » » centenas » » » disminuído en la centena necesaria para la resta anterior.....	3
Resíduo igual para los millares.....	6
» » » las decenas de millar.....	9
» » » » centenas » »	0
Cociente del número comercial por 9.....	096320

Como el número comercial es divisible por 9 nada hay que añadir al cociente anterior y dividiéndole por mil para hallar el descuento al 4 %, tendremos el mismo resultado que antes, 96'32 pesetas de descuento, y reduciendo ahora en la forma conocida este resultado al 5 ½ %, tendremos para el descuento buscado, 152'44 pesetas.

260. - Método inglés. — Se llama así al método de tanto base 5 %, por ser muy empleado en Inglaterra, y consiste en calcular los intereses o descuentos valiéndose del divisor fijo de 5 % para el año civil por un procedimiento muy abreviado, aunque sólo aproximado, corrigiendo luego el resultado como para los demás tantos bases.

Siendo 7300 el divisor fijo de 5 % para el año civil, la fórmula que por medio de él sirve para calcular los intereses y descuentos, es:

$$I \text{ o } d = \frac{N}{7300}$$

y multiplicando los dos términos del segundo miembro de la expresión anterior por $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right)$ se convierte en la siguiente:

$$I \text{ o } d = \frac{N\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right)}{7300\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right)}$$

Haciendo ahora las operaciones indicadas en el denominador encontraremos para el valor del mismo

$$\begin{aligned} 7300 \times 1 &= 7300 \\ 7300 \times 1/3 &= 2433'\widehat{3} \\ 7300 \times 1/30 &= 243'\widehat{3} \\ 7300 \times 1/300 &= 24'\widehat{3} \\ \hline 7300 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) &= 10000'\widehat{9} \end{aligned}$$

que reducido a fracción ordinaria nos dará 10001 como valor del denominador, por ser éste el límite a que tiende con la consideración de infinito número de cifras decimales 9. Si despreciamos ese exceso de 1 sobre 10000 que tiene el denominador de la fórmula, cometeremos un error en el resultado

equivalente a una diezmilésima del cociente encontrado, lo que se considera pequeño por los ingleses, y despreciándole, toman por divisor 10000 y con ello deducen la regla siguiente:

Para calcular el interés o descuento al cinco por ciento basta multiplicar el capital por el número de días, añadir al producto su tercio, el décimo del tercio y el centésimo del tercio, (*) dividiendo la suma por 10000.

Ejemplo: Interés de 8000 pesetas al 7 1/2 % durante 70 días.

Calcularemos primero el interés al 5 % por el método inglés y obtendremos:

$$\begin{aligned} 80000 \times 70 &= 560000 \\ 1/3 \text{ de } 560000 &= 186666\overset{\frown}{6} \\ 1/10 \text{ de } 186666\overset{\frown}{6} &= 18666\overset{\frown}{6} \\ 1/100 \text{ de } 186666\overset{\frown}{6} &= 1866\overset{\frown}{6} \end{aligned}$$

Interés al 5 % ..... $767199\overset{\frown}{9} : 10000 = 76\overset{\frown}{9}72$ pesetas.

haciendo también ahora la corrección de la cifra 9 del período fraccionario

Interés al 5 %	76'72 Ptas.	
» al 2 1/2 % mitad anterior.	38'36	»
» al 7 1/2 %	115'08	»

261. – Modificación y corrección del error del método inglés. – Si obtenido el interés o descuento al 5 % se quiere hacer la reducción a otro tanto por la primera fórmula de éstas (**256**) tendremos:

$$I = \frac{Rt}{5}$$

y si multiplicamos numerador y denominador de esta fracción por 2 la corrección queda simplificada.

Sustituyendo ahora el valor de R por la fórmula del método inglés que sirve para calcularle y poniendo $2t$ en vez de t, y en vez de 5 poniendo 10, resultará la siguiente *modificación del método inglés* generalizándole para cualquier tanto.

$$\frac{N\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right)2t}{10000 \times 10}$$

lo que nos permite enunciar la regla siguiente:

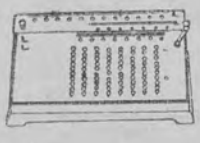
(*) Por este motivo llaman los ingleses a este método regla del tercio, décimo y décimo *(Third, tenth, and tenth rule).*

Para calcular el interés o descuento según el año civil a cualquier tanto se halla el número comercial, se le multiplica por el duplo del tanto, se añade a este producto su tercio, el décimo del tercio y el centésimo del tercio y la suma se divide por 100000.

Otra modificación del método inglés es la *corrección del error* que se comete con la aplicación del mismo, pues si para un interés o descuento pequeño este error puede ser despreciado, hay que tener presente que al llegar el interés o descuento a cien unidades enteras el error es igual a un céntimo y entonces procedería la corrección, además de que siendo un error tan fácilmente determinable *siempre que dicho error exceda del límite con que suelen hacerse los cálculos* —un céntimo o media décima en la práctica— *es indispensable añadir al resultado hallado según el método inglés, la diezmilésima parte de dicho resultado.*

262.—Descomposición de los tantos para corrección de resultados en el método inglés.—Del mismo modo que para el método de los 60, también para el método inglés se han formado tablas de reducciones de los diferentes tantos, como la **XXXIII,** que convendrá consultar hasta obtener alguna práctica.

Ejercicios *números* **399** al **402,** pudiendo servir todos los propuestos para interés y descuento.



XXIII

MÉTODOS DE COEFICIENTES

263.—Multip icadores fijos.—El multiplicador fijo es el *interés o descuento de la unidad de capital durante la unidad de tiempo* constituyendo, por consiguiente, la modificación más sencilla del procedimiento de cálculo previo y sirviendo para cualquier cálculo de esta clase, pues si representamos por m_u este multiplicador, para el capital C empleado en una unidad de tiempo, se tendría:

$$I = Cm_u$$

y para el mismo capital empleado durante el tiempo n habrá de ser

$$I = Cnm_u$$

La fórmula que acabamos de obtener es la misma fundamental que ya conocemos (**204**) y la definición anterior del multiplicador fijo es asimismo el mismo concepto dado para el tanto de interés (**200**); pero esa fórmula nos ha de servir ahora sin modificación ninguna para todas las unidades de tiempo, sean o no diversas del período del tanto.

Circunscribiéndose al interés y descuento prácticos (a tanto por ciento anual) la abreviación producida por la fórmula anterior consiste en la supresión del denominador de las fracciones que dan el interés o descuento (**212** y **225**) pues según la definición del multiplicador éste resultará de hacer C y n iguales a 1, con lo que se tendrá:

$$m_u = \frac{t}{100}; \quad m_u = \frac{t}{1200}; \quad m_u = \frac{t}{36000}; \quad \text{y} \quad m_u = \frac{t}{36500}$$

y una vez calculados los diferentes multiplicadores fijos que dan estas fórmulas para tiempo expresado en años, meses, días comerciales y días legales respectivamente, la operación del cálculo del interés o del descuento se reduce a la multiplicación que indica la primera fórmula, en la cual podríamos sustituir el producto Cn por el número comercial (**241** y **245**) y con ello resultaría el método que nos ocupa como una sustitución del divisor fijo por su inverso.

Este y todos los métodos de coeficientes tienen su principal empleo cuando se utiliza el cálculo mecánico.

Ejemplo: Determinar el interés de 7850 pesetas al $4\ ^1/_2\ ^0/_0$ en 129 días, en año legal

Los valores de la fórmula serían

$$C = 7850 \qquad n = 129 \qquad m_u = 0'0001252877$$

y con ello el resultado

$$7850 \times 129 \times 0'0001252877 = 124'847 \text{ pesetas.}$$

264.—Tablas de multiplicadores—Para que la aplicación de los multiplicadores fijos tuviese alguna utilidad práctica es indispensable tener calculados todos los correspondientes a los diferentes tantos que ocurran con más frecuencia, pues que nada abreviaría la operación si en cada caso particular fuese necesario hallar el multiplicador por división. Por todo ello se pensó en formar tablas con dichos multiplicadores comprendiendo en ellas los de los tantos más comunes, como la tabla **XXVIII**.

265.—Multiplicadores proporcionales.—Siendo el principal objeto de los métodos abreviados el cálculo cuando el tiempo esté expresado en días, y queriendo hacer aplicación de los multiplicadores fijos, se sintió la necesidad de buscar, no ya los multiplicadores fijos unitarios a que hemos venido refiriéndonos, sino *multiplicadores relativos a las diversas expresiones que pudiera tener el tiempo* a los que llamaremos *multiplicadores proporcionales* porque en proporción a dicho tiempo variarán los correspondientes a un mismo tanto.

Estos multiplicadores vienen a resultar el producto del multiplicador unitario por el tiempo y entonces para el interés se tiene:

$$I = Cm$$

si llamamos m al multiplicador proporcional (*).

(*) Esta denominación que empleamos no es ni puede ser tomada como invariable, pues no tiene más objeto que diferenciar una y otra clase de multiplicadores, reservando la denominación de multiplicador fijo para aquella más conocida y así designada por la mayoría de los autores; debiendo además hacer constar que el nombre no hace a la esencia del número designado por él, y así nos encontramos con la diversidad de denominaciones que para las dos clases de multiplicadores son propuestas por los autores que tratan de las dos.

De estos multiplicadores proporcionales, en la práctica se suelen formar tablas especiales que dan los intereses de una unidad de capital por los diferentes días del año y para los tantos más usuales dándoles una disposición como la de la tabla **XXIX**.

Ejemplo: Calcular el interés de 12400 pesetas al 5 °/₀ en 15 días considerando el año comercial.

Consultada la tabla en la columna del 5 °/₀ y año comercial hallamos en la línea de los 15 días el coeficiente 0'001805556, luego el interés será

$$12400 \times 0'001805556 = 22'388 \text{ pesetas.}$$

266.—Decimalización del tiempo.—Este procedimiento consiste en reducir el tiempo a fracción decimal de año y después de calcular el interés anual, se halla el interés o descuento pedidos multiplicando el interés de un año por la fracción de éste que corresponda a los días de duración del descuento o interés.

Para hacer posible este procedimiento hay que tener de antemano unas tablas como la **XXXIV** en que aparezcan las fracciones de año para cada uno de los días de que se compone éste, y después de calcular el interés o descuento correspondiente al año, hacer la multiplicación del número que se halla en la tabla por este interés anual.

Ejemplo: Interés de 5200 pesetas al 3 °/₀ en 85 días.

El interés anual sería:

$$52 \times 3 = 156 \text{ pesetas}$$

y siendo 0'232877 la fracción de año correspondiente a los 85 días, el interés pedido será:

$$156 \times 0\ 232877 = 36'33 \text{ pesetas.}$$

251.—Tablas de intereses.—De los multiplicadores fijos y proporcionales se llega por generalización al cálculo previo de intereses que correspondan, no sólo a una unidad de capital para una o varias unidades de tiempo, sino también y varias unidades de capital para diversas unidades de tiempo y tantos también diferentes, si bien no se calculan todos los capitales y tantos posibles sino que en la práctica estas tablas sufren por fuerza limitaciones. Para los tantos, se limitan a los más comunes, pues que de todos modos no pueden comprender todos los posibles; para los tiempos, unas tablas dan los intereses correspondientes a todos los días y algunas otras sólo los dan hasta 100; y para los capitales, que es donde hay más limitaciones, las tablas más difundidas sólo se refieren a capitales de hasta 100 unidades, o hasta solamente 9.

La disposición de esas tablas suele ser por días o por tantos; pero de las dos son más útiles aquellas que se distribuyen por tantos, como la **XXXVI** porque es mucho más frecuente tener necesidad de calcular varios interés y descuentos operando sobre el mismo tanto de contínuo, que teniendo varios capitales igual tiempo sin otros que le tengan diferente.

Cuando el capital o el tanto sobre que hubiera de hacerse el cálculo no se encontrasen en las tablas, sería preciso descomponer uno u otro en su-

mandos y después reunir por suma los intereses correspondientes a las partes en que se descompuso el capital o el tanto. Igual sucederá con el tiempo en aquellas tablas que no contienen todos los días del año.

Estos intereses adolecen de un defecto semejante al de que adolecían los multiplicadores, pues teniendo que ser forzosamente cantidades aproximadas y siendo siempre los intereses que dan los de una cifra significativa, puede tenerse un error en el resultado, por lo que será preciso conocer la aproximación de las tablas para determinar la que alcanzará el resultado y proceder en la forma indicada para otros cálculos aproximados.

Otras tablas de intereses sólo dan el de un día para varios capitales, como es la tabla **XXXV**, que es de empleo útil cuando se calculan intereses por pocos días o tienen éstos números de multiplicación fácil.

267.—Aplicación de la regla de cálculo.—Son muy útiles las reglas de cálculo para el interés porque una vez que ha sido colocado uno de los extremos de la regleta en el número correspondiente al tanto ya pueden hallarse los resultados como los de una operación combinada (**91**); pero la gran ventaja se hallará en el empleo de los cilindros de cálculo (**90**) y de las reglas especiales, como la de la fig. 46, en la cual se utiliza el método de los divisores fijos, pudiendo además hallarse el resultado por el sistema de los multiplicadores como una multiplicación sencilla.

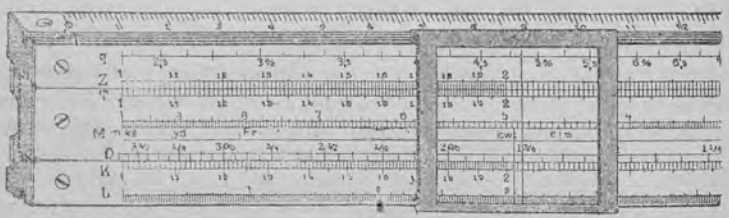


Fig. 46. Regla de cálculo de intereses.

Para servirse de la regla por el método de los divisores se hace coincidir el capital de la escala *K* con el divisor fijo del tanto propuesto en la escala *D*, y tomando los días en la escala *T*, el punto de estos días señala el interés en la escala *Z* de la regla; pero como todas las reglas de esta clase han de tener los divisores de año comercial solo, o del legal, se hace precisa la corrección que estudiaremos en la comparación de intereses.

EJERCICIOS *números* **375; 376; CLIV** y **CLV** y todos los demás propuestos para interés y descuento.

XXIV

VARIOS CAPITALES

267.—Intereses y descuentos de varios capitales.— Hasta ahora hemos considerado cálculo de intereses y descuentos cuando era uno sólo el capital, pero nada impide que sean varios, en cuyo caso tendremos que hacer el cálculo de la suma de intereses y descuentos con su complementaria de determinación del capital acumulado o el efectivo resultante del descuento en conjunto de todos.

Cuando son varios los capitales a que ha de hacer referencia, puede suceder que un elemento cualquiera de ese cálculo tenga o no relación con el mismo de otros capitales, y aún que entre éstos haya o no esas relaciones, y por cada combinación que de ésto resultase tendríamos un caso diferente que tratar; pero en vista de su gran número nos limitaremos a considerar sólo los casos que tienen realidad práctica

268.—Capitales y tiempos arbitrarios con tantos iguales. - El caso que se presenta en la práctica con una frecuencia ilimitada es el que trata de calcular el interés o descuento de todos los capitales en conjunto, y claro está que esa determinación puede hacerse con un cálculo particular para cada capital y sumando luego los intereses o descuentos tendríamos resuelto el problema; pero en la práctica esa determinación se hace de modo abreviado por el empleo de los divisores fijos que permiten hallar el conjunto de intereses o descuentos con una sola operación.

Efectivamente: si tenemos los capitales C_1, C_2, C_3, C_4,.... C_m empleados o descontados respectivamente por los tiempos n_1, n_2, n_3, n_4,.... n_m, y todos al mismo tanto, el interés o des-

cuento del conjunto será la suma de todos los parciales, lo que por el empleo del divisor fijo (**240**) sería:

$$I\,o\,d = \frac{C_1 n_1}{D} + \frac{C_2 n_2}{D} + \frac{C_3 n_3}{D} + \frac{C_4 n_4}{D} + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{C_m n_m}{D} = \frac{\sum_1^m C_m n_m}{D}$$

y sustituyendo los numeradores de la expresión anterior por sus valores (**241**) resulta esta otra expresión

$$I\,o\,d = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \ldots\ldots + N_m}{D} = \frac{\sum_1^m N_m}{D}$$

de donde resulta que *para determinar el interés o descuento de varios capitales por tiempos diferentes y al mismo tanto se divide la suma de números comerciales por el divisor fijo del tanto correspondiente.*

Ejemplo: Determinar el interés que corresponde a los siguientes capitales: 12320 pesetas durante 135 días, 7040 pesetas durante 80 días y 4600 pesetas durante 150 días, todos al 4 ½ % anual.

Los elementos de cálculo para este caso son:

$C_1 = 12320$	$C_2 = 7040$	$C_3 = 4600$
$n_1 = 135$	$n_2 = 80$	$n_3 = 150$

y por la aplicación de la fórmula tenemos.

Número correspondiente	al primer	capital.....	$12320 \times 135 = 16632$
» »	al segundo	»	$7040 \times 80 = 5632$
» »	al tercer	»	$4600 \times 150 = 6900$

y el interés buscado

$$I = \frac{16632 + 5632 + 6900}{80} = 364'55 \text{ pesetas.}$$

Igualmente que hemos empleado el divisor truncado del año comercial se puede emplear el divisor completo y el de año civil.

269.—Procedimiento de Thoyer.—Este procedimiento es sólo una disposición práctica del anterior ideada en 1841 por el matemático J. Thoyer, empleado del Banco de Francia con objeto de calcular rápidamente el numerador de la fórmula hallada en el párrafo anterior.

Se puede observar:

1.º Que un capital empleado o descontado por n décadas y n_1 días produce un número igual a la suma de los números de dos capitales iguales al mismo y empleados o descontados respectivamente por n décadas y n_1 días, pues ésto es la descomposición del tiempo en los dos sumandos que le constituyen y la multiplicación por la suma indicada.

2.º Que un capital empleado o descontado por n décadas y n_1 días produce un número igual a la suma de los números de dos capitales, uno de ellos el mismo que antes durante n_1 días y el otro capital diez veces mayor durante n días. Es decir, que

$$C(10\,n + n_1) = (10\,C)n + Cn_1$$

De acuerdo con la estructura del segundo miembro de la igualdad, la aplicación del método de Thoyer en la práctica se hace en la forma siguiente:

a) Se descomponen todos los tiempos de cada capital en decenas y unidades de días, y cada capital se considera produciendo intereses, o debiendo ser descontado, de modo distinto en esas decenas y unidades.

b) Los capitales se inscriben en una tabla como las de las páginas 286 y 288 de modo que se vea claramente el tiempo que corresponde a cada capital, pues las columnas se refieren a las unidades de días y las líneas a las decenas, así que, por tanto, cada capital se inscribirá en la casilla de encuentro de la línea y columna pertenecientes a su tiempo de empleo. Así el capital X_{45} que tiene 45 días de interés se escribirá en la línea 40 columna 5.

c) Cuando varios capitales produzcan interés o deban ser descontados por igual tiempo, que deberían inscribirse en la misma casilla, se suman antes de aplicarles la regla anterior.

Si por ejemplo, corresponde el tiempo de 82 días a los capitales 3685 pesetas, 2469 pesetas, 946 pesetas y 3900 pesetas, en la columna del núm. 2, línea de 80 se pondrá la suma de todos estos cuatro capitales que es 11000 pesetas.

d) Inscritos todos los capitales en el cuadro resultará que la suma de cada línea es el capital que produce interés o debe ser descontado por las decenas que aparecen al principio de cada línea, y la suma de cada columna es el capital que pro-

duce interés o debe ser descontado por los días que encabezan la respectiva columna.

e) Las sumas que acabamos de obtener han de ser multiplicadas por sus tiempos respectivos para determinar los correspondientes números comerciales, por consiguiente la suma de la primera línea y la de la primera columna deberían ser multiplicadas por cero y para lo que se refiere al número es completamente inútil su suma, pero el hacerla sirve de comprobación del total de capitales descontados o que producen interés como indica la expresión ΣC_m de la tabla general.

Cuadro de Thoyer.—Tabla general

Unidades n_1 del número de días

Decenas n del número de días	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											c_0
10											c_1
20											c_2
30											c_3
40						X_{45}					c_4
50											c_5
60											c_6
70											c_7
80											c_8
90											c_9
Totales	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	$\Sigma C_m = \Sigma c_m$
Décuplos de C_m.	$10c_0$	$10c_1$	$10c_2$	$10c_3$	$10c_4$	$10c_5$	$10c_6$	$10c_7$	$10c_8$	$10c_9$	$10\Sigma C_m$
Sumas.....	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	$11\Sigma C_m = \Sigma S_m$
Multiplicadores..	$\times 0$	$\times 1$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\times 8$	$\times 9$	
Productos o números....		N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	$\Sigma N_m = \Sigma m S_m$

Para establecer la fórmula general seguiremos la tabla que

antecede en la que las sumas horizontales o de decenas del tiempo están representadas por las letras minúsculas c_0, c_1, c_2, c_3, c_4,..... c_9 y las sumas de unidades de los tiempos corresponden a las letras mayúsculas C_0, C_1, C_2, C_3, C_4,... .. C_9 y de aquí que el número comercial—numerador de la fórmula para el que se ideó el método que nos ocupa—resulta, según todo lo anterior, de las operaciones siguientes

$$\Sigma N_m = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + ... + 9C_9 +$$
$$+ 10(c_1 + 2c_2 + 3c_3 + ... + 9c_9) =$$
$$= \Sigma m C_m + 10\Sigma m c_m = \Sigma m C_m + \Sigma m 10 c_m$$

y sacando el factor común de ambas sumas nos dará como número

$$\Sigma N_m = \Sigma m(C_m + 10c_m)$$

pero como la cantidad del paréntesis es la que forma las sumas S_m, esa expresión se reduce a esta otra

$$\Sigma N_m = \Sigma m S_m$$

conforme a lo indicado en la tabla general, y por fin el interés o descuento hallado por el método de Thoyer será:

$$I \text{ o } d = \frac{\Sigma N}{D}$$

Ejemplo: Sea hallar el interés al 6 % de los capitales 900; 1200; 3000; 1600; 2000; 1000; 5000; 600; 2000; 1500; 1200; *1400; 2600;* 1600; 1700; 900; 1200; 600; 1000; 2000; 1900; 1800; 4020; 1500; 7500; 1200; 1200; 2000; 8000; 3000; 2000; 3000; 1500; 1400; 2700; 3400; 1000; 1800; 3000; 2700; 5000; 2100; 2500; 12000; 2000; 4000; 2000; 1800; 1200; 2500; 1000; 2000; *400; 1700; 2600; 6000;* 1000; 3000; 2000; 4000; 2400; 2000; *3685; 2469; 946; 3900;* 1000; 6000; 2800; 6000; 7000; 9000; 3000; 3500; 5000; 1600 y 7000 pesetas a los que respectivamente falta para vencer 1; 2; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 14; 15; 17; 19; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 26; 27; 28; 30, 31; 33; 35; 36; 38; 39; 41; 42; 44; 45; 46; 47; 48; 49; 50; 52; 54; 56; 58; 59; 60; 61; 63; 64; 65; 67; 68; 69; 71; 72; 73; 73; 73; 73; 75; 76; 77; 78; 80; 81; 82; 82; 82; 82; 84; 85; 88; 89; 90; 91; 93; 95; 96; 97 y 99 días.

Como ya están colocados por orden de vencimientos, y reunidos los del mismo según indican los subrayados, formaremos el cuadro de la página siguiente, según el cual el número comercial es 12.515.500, y por tanto los intereses al 6 %

$$I = \frac{\Sigma N}{D} = \frac{12515500}{6000} = 2085'92 \text{ pesetas.}$$

Cuadro de Thoyer.—Ejemplo resuelto

Unidades del número de días

DECENAS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Sumas
0		900	1200			3000	1600		2000	1000	9700 (*)
10	5000	600			2000	1500		1200		4000	14300
20	1600	1700	900	1200	600		1000	2000	1900		10900
30	1800	4000		1500		7500	1200		1200	2000	19200
40		8000	3000		2000	3000	1500	1400	2700	3400	25000
50	1000		1800		3000		2700		5000	2100	15600
60	2500	12000		2000	4000	2000		1800	1200	2500	28000
70		1000	2000	10700		1000	3000	2000	4000		23700
80	2400	2000	11000		1000	6000			2800	6000	31200
90	7000	9000		3000		3500	3000	1600		7000	34100
Totales.	21300 (*)	39200	19900	18400	12600	27500	14000	10000	20800	28000	211700 (*) $= \Sigma C_m$
Décuplos..	97000 (*)	143000	109000	192000	250000	156000	280000	237000	512000	341000	
Sumas S_m.	118300 (*)	182200	128900	210400	262600	183500	294000	247000	332800	369000	2328700 $= \Sigma S_m$
Factores...		$\times 1$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\times 8$	$\times 9$	
NÚMEROS.....		182200	257800	631200	1050400	917500	1764000	1729000	2662400	3321000	12.515.500 $= \Sigma N_m$

Líneas de comprobación de Cauchy

		182200 A''_1	311100 A''_2	521500 A''_3	784100 A''_4	967600 A''_5	1261600 A''_6	1508600 A''_7	1841400 A''_8	2210400 A''_9	$\Sigma A''_m$ = 9588500
	182200 $S_1 = A_1$	128900 $S_2 = A_2$	210400 $S_3 = A_3$	262600 $S_4 = A_4$	183500 $S_5 = A_5$	294000 $S_6 = A_6$	247000 $S_7 = A_7$	332800 $S_8 = A_8$	369000 $S_9 = A_9$		
2210400 A'_1	2028200 A'_2	1899300 A'_3	1688900 A'_4	1426300 A'_5	1242800 A'_6	948800 A'_7	701800 A'_8	369000 A'_9	$\Sigma N_m = \Sigma A'_m$		12515500
									$10(\Sigma S_m - S_0)$		22104000

(*) Estas sumas se pueden omitir; pero siempre sirven de comprobación.

270.—Generalización del método de Thoyer para cualquier tiempo. - Por el examen de las dos tablas que explican este método se deduce que sólo es aplicable para tiempos que no excedan de 99 días, y cuando el tiempo excede de ese límite es necesario una descomposición de los días, que permita su empleo para cualquier tiempo.

La descomposición del tiempo superior a 99 días se hace por un procedimiento idéntico al de descomposición en decenas y unidades, pues también ahora un capital empleado a interés o descontado durante n centenas de días y x unidades, produce un número igual a la suma de los dos que le corresponderían separadamente si se impusiese o descontase por las centenas n y las unidades x, luego cuando el tiempo contenga alguna centena determinaremos por el método de Thoyer el número para las decenas y unidades y separadamente calcularemos el número que corresponde a las centenas.

Para facilitar el cálculo de este segundo número se completa la tabla que ya conocemos con tres columnas en las que respectivamente se van anotando los capitales que tienen en los días de su tiempo la cifra de centenas 1, la 2 o la 3.

Llamando S' S'' y S''' a las sumas respectivamente de las tres columnas a que nos referimos, los números correspondientes serían:

$$100S', \quad 200S'' \quad \text{y} \quad 300S'''$$

lo que daría una suma de

$$100S' + 200S'' + 300S''' = 100(S' + 2S'' + 3S''')$$

y si a esta suma añadimos la de la tabla de decenas y unidades tendremos el número total que deseamos encontrar.

271.—Comprobaciones en el método de Thoyer.— En la tabla general del método de Thoyer se ve que el total de capitales se obtiene lo mismo por suma horizontal que por suma vertical, y como al hacer las sumas de los totales de líneas y columnas queda una única casilla para escribir ambas sumas, si fuesen diferentes quedaría descubierto el error.

Además de esa igualdad de los dos totales, también resulta

$$\Sigma S_m = 11\Sigma C_m$$

lo que es también un nuevo control.

Pero la comprobación mejor es la ideada por el matemático A. L. Cauchy y que sirve además para calcular el número total sin necesidad de efectuar los productos que dan los números parciales de cada columna. Para llegar a este objeto formemos el cuadro que indica la escala siguiente:

	$\rightarrow$	A''_1	A''_2	A''_3	A''_4	A''_5	A''_6	A''_7	A''_8	A''_9	$\Sigma A''_m$
	A'_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9		ΣA_m
A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6	A'_7	A'_8	A'_9	$\leftarrow$		$\Sigma A'_m = \Sigma N_m$

en el cual la línea central es la suma de totales y décuplos S_m del cuadro de Thoyer y las otras se forman por suma de ésta; la inferior sumando la cantidad de la línea central con la que tiene debajo y escribiendo la suma resultante un lugar más hacia la izquierda, y como la cantidad A_9 no tiene ninguna debajo se escribe como primera cantidad en la última línea esta misma; la línea superior se forma de un modo casi igual, pues sólo varía que la suma se empieza por la izquierda uniendo cada cantidad de la línea central con la que tiene escrita encima y escribiendo el resultado un lugar más hacia la derecha.

De la estructura del cuadro resultan los siguientes valores:

$$A'_9 = A_9$$
$$A'_8 = A_8 + A'_9 = A_9 + A_8$$
$$A'_7 = A_7 + A'_8 = A_9 + A_8 + A_7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A'_1 = A_1 + A'_2 = A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1$$

y sumando miembro a miembro las igualdades anteriores

$$\sum_1^9 A'_m = 9A_9 + 8A_8 + \ldots\ldots + A_1 = \sum_9^1 mA_m = \Sigma N \qquad [1]$$

lo que nos señala el procedimiento de obtención del número

total sin necesidad de hacer los productos que indica el segundo miembro.

Para acabar de utilizar el estado de sumas progresivas y obtener la comprobación del resultado examinemos los valores que resultan para las cantidades que se van escribiendo en la línea superior, que han de ser los siguientes:

$$A''_1 = A_1$$
$$A''_2 = A''_1 + A_2 = A_1 + A_2$$
$$A''_3 = A''_2 + A_3 = A_1 + A_2 + A_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A''_9 = A''_8 + A_9 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9$$

igualdades que sumadas miembro a miembro nos dan:

$$\sum_1^9 A''_m = 9A_1 + 8A_2 + \ldots\ldots + A_9 = \sum_1^9 (10-m)A_m \qquad [2]$$

Si ahora sumamos miembro a miembro los primeros y últimos de las igualdades [1] y [2] tendremos:

$$\sum_1^9 A'_m + \sum_1^9 A''_m = \sum_1^9 mA_m + \sum_1^9 (10-m)A_m =$$
$$= (10-m+m)\sum_1^9 A_m = 10\sum_1^9 A_m$$

que es la comprobación de Cauchy para los resultados del método de Thoyer.

Proponemos al lector como ejemplo la comprobación del resultado del resuelto en el párrafo **269** que se halla al pie del cuadro de Thoyer de la página 298.

272.—Método de los números diferenciales.—Este procedimiento sirve también para calcular el número comercial que corresponde en conjunto a varios capitales de los que hay que calcular el interés o descuento al mismo tanto para todos Puede emplearse sólo o en combinación del método de Thoyer y para llegar a la abreviación que supone consideraremos los días de tiempo de todos los capitales o grupos de capitales en orden creciente, y que estos días sean:

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots\ldots < n_m$$

calculadas las diferencias

$$n_2 - n_1 = \delta_2, \qquad n_3 - n_1 = \delta_3, \qquad n_4 - n_1 = \delta_4, \ldots\ldots$$

el número que corresponda a cada capital constará de dos partes; una común a todos los capitales e igual al sustraendo de las diferencias que anteceden para el factor tiempo, y otra cuyos días han de ser los que representan esas diferencias.

De estas dos partes del número de cada capital, la primera tiene el mismo tiempo para todos los capitales, luego el número que por suma de todas estas partes resultará habrá de ser

$$N_c = n_1 \sum_{1}^{m} C_m$$

y la otra parte del número total de los capitales considerados será la suma de los números que para cada capital corresponda por las diferencias del tiempo anteriormente encontradas, el que podremos hallar valiéndonos del método de Thoyer y que en todo caso será:

$$\Sigma N_\delta = \sum_{\delta=2}^{\delta=m} \delta C_\delta$$

por consiguiente, el número total de los capitales que consideramos tendría que ser:

$$N = n_1 \sum_{1}^{m} C_m + \sum_{\delta=2}^{\delta=m} \delta C_\delta$$

y el interés o descuento resultaría de dividir el segundo miembro de esta igualdad por el divisor fijo correspondiente al tanto de la operación.

La utilidad de este método es notoria, puesto que siempre en la práctica es preciso sumar los capitales y el número común resulta de la multiplicación de esta suma por los días del primer capital, lo que equivale en trabajo al número de este primer capital, y los números de los demás capitales respecto de las diferencias de días dan un trabajo menor, tanto por tener el factor tiempo más pequeño, cuanto porque la aplicación del método de Thoyer a ellos reduce el trabajo que para su cálculo se necesita.

Estos segundos números parciales que se calculan con los días diferenciales son los llamados *números diferenciales*, de donde toma su nombre el procedimiento.

279.—Método de Cauchy. - Este matemático además de perfeccionar la comprobación del método de Thoyer modificó el mismo procedimiento valiéndose de los números diferenciales, para que pudiera servir con absoluta generalidad a cualquier tiempo.

En el método de Cauchy los capitales se agrupan por los períodos de tiempo cuyos días son inferiores a la cifra significativa del divisor fijo terminado en ceros, o que estén comprendidos entre dos múltiplos seguidos de esa cifra significativa (*), considerando a cada múltiplo de dicha cifra significativa como una decena en el método de Thoyer y disponiendo un cuadro semejante, con la particularidad de que las líneas representen intereses o descuentos por sólo múltiplos de la cifra significativa del divisor fijo, y el número de columnas es precisamente el que indica dicha cifra.

Los números comunes para cada grupo corresponden a las sumas de capitales de las líneas y en relación al múltiplo de la tan repetida cifra que corresponde a cada línea. Como estos números comunes debieran ser multiplicados y divididos por la cifra significativa del divisor, se ha suprimido dicha multiplicación y división para multiplicar por solo los factores de dicha cifra, que aparecen en las líneas respectivas, y luego dividir sólo por la unidad seguida de ceros.

Los números diferenciales se calculan por multiplicación de las sumas de las columnas por la respectiva cifra, sumando después estos productos, que para hallar el interés se dividirán por el divisor fijo sin ninguna simplificación.

Los números diferenciales en el método de Cauchy se denominan *números unitarios*, y si los representamos por N_u y llamamos T_1, T_2, T_3. ..... T_m, a los totales de capitales escritos en las líneas contando de abajo arriba, los números que se hallarán por el procedimiento de Cauchy son:

$$\Sigma N = T_2 k + (T_3 2k) + (T_4 3k) + \ldots\ldots + [T_m(m-1)k] + \Sigma N_u$$

teniendo en cuenta que k representa la cifra significativa del divisor fijo adoptado y que la suma T_1 habría de multiplicarse por cero.

(*) Cuando el divisor fijo no tenga estructura que permita la aplicación de este método se toma un tanto base adaptable, y después se reduce al tanto verdadero **(256)**.

Si ahora nos fijamos en que para hallar el interés o descuento, esa suma de números que da la igualdad anterior ha de dividirse por un divisor terminado en ceros y cuya cifra significativa es k podemos simplificar el quebrado que para ello resultase, dejando reducido el denominador a la unidad seguida de ceros, según hemos dicho, y suprimido el factor k de los primeros sumandos. Con ésto los intereses o descuentos se hallarían por la fórmula

$$I \circ d = \frac{T_2 + 2T_3 + 3T_4 + 4T_5 + \ldots\ldots + (m-1)T_m}{1000} + \frac{\Sigma N_u}{D} =$$

$$= \frac{\sum_2^m (m-1)T_m}{1000} + \frac{\Sigma N_u}{D}$$

Ejemplo: Sea calcular el interés o descuento al 6 % que corresponde a los capitales que siguen en los tiempos señalados:

Ptas.	Días	Ptas.	Días	Ptas.	Días	Ptas.	Días	Ptas.	Días
160	80	825	38	470	46	1815	53	876	89
1970	75	685	59	1200	74	695	47	910	62
2640	59	2643	81	1816	82	2375	72	568	26
1163	63	4320	19	635	48	280	85	1575	92
1050	49	4000	76	1856	50	910	42	315	77
75	51	2042	36	735	25	391	37	1885	18
1627	44	197	12	326	64	400	6	2630	43

Aunque puede aplicarse directamente el tanto propuesto nos valdremos de un tanto auxiliar, tomando el 4'5 % cuyo divisor es 8010, y con ello las columnas del cuadro de Cauchy se encabezarán con las cifras **0** a **7**. Tomando ahora el tiempo mayor de todos los capitales, que es los 92 días, vemos que el mayor múltiplo de 8 que contienen estos días es 88, número que marcará la primera línea horizontal siguiendo las demás disminuyendo de 8 en 8 hasta la última que va marcada **0**.

En el cuadro así formado escribimos cada capital en la línea que indica el múltiplo de 8 comprendido en sus días y en la columna del exceso de esos días sobre el múltiplo, y así el capital 4320 pesetas cuyos días son 19 estará en la línea que empieza por 16 y en la columna 3 por ser $19 - 16 = 3$; el capital 391 con días 37 estará en la línea que empieza por 32 y en la columna 5 por ser $37 - 32 = 5$; colocando en igual forma todos los capitales hasta formar el cuadro siguiente, en el cual aparece a la derecha la formación del número $\sum_2^m (m-1)T_m$ por el sistema de comprobación del propio Cauchy **(271, [1])**.

Ejemplo del método de Cauchy — (D = 8000)

	0	1	2	3	4	5	6	7	Sumas	Números
88		876			1575				2451	2451
80	160	2643	1816			280			4899	7350
72	2375	1970	1200		4000	315			9860	17210
64	326								326	17536
56				2640			910	1163	4713	22249
48	635	1050	1836	75		1815			5411	27660
40			910	2630	1627		470	695	6332	33992
32					2042	391	825	685	3943	37935
24		735	568						1303	39238
16			1885	4320					6205	45443
8					197				197	45640
0							400		400	
Sumas...		7274 ×1	8215 ×2	9665 ×3	9441 ×4	2801 ×5	2605 ×6	2543 ×7	$\sum_{2}^{m}(m-1)T_m$ = 296704	
Números.		7274	16430	28995	37764	14005	15630	17801	ΣN_u = 137899	

Según el cuadro el interés o descuento al 4'5 % será

$$I = \frac{296704}{1000} + \frac{137899}{8000} = 296'704 + 17'237 = 313'941 \text{ pesetas}$$

y añadiendo el tercio de ese resultado, correspondiente al 1'5 % de la diferencia de tantos tenemos:

Interés al	4'5 %.....	311'941	Ptas.
» al	1'5 %.....	104'647	»
» al	6'0 %.....	418'588	»

274.—Aplicación de las máquinas de calcular.—La comprobación

de Cauchy para el método de Thoyer y el método del primero señalan el procedimiento fácil de obtención del número comercial para calcular el interés o descuento valiéndose de las máquinas de calcular.

Para servirse de estos aparatos se hace la primera suma de capitales que debiera ser multiplicada por 9 o por el mayor múltiplo de la cifra del divisor fijo, y esta primera suma se transporta al mecanismo reservador de la máquina **(87, 3.º y 88)** conservándola a la vez en el operador para que sea sumada con la segunda suma de capitales y transportado el total de las dos sumas al mecanismo reservador; repitiendo la tercera suma con la de las dos primeras que se conservan en el operador y transportando el total de las tres al reservador, y continuando así añadiendo nuevas sumas de capitales y nuevos transportes al reservador hasta llegar a los capitales que no deban multiplicarse por nada, y de esta forma en el reservador de la máquina obtenemos la suma de comprobación de Cauchy que dijimos era el número comercial.

Por el procedimiento semejante se pueden utilizar las máquinas sumadoras **(82 y 83)** valiéndose del dispositivo de suma total y subtotal, pues una vez que se hayan colocado los capitales por orden de la fecha de su disponibilidad y de mayor a menor número de días sobre que se calculen intereses, se escribe el primer capital, que se repetirá tantas veces como días haya hasta la fecha del segundo, colocando esta primera suma como subtotal, se escribe el primero y el segundo capital, que quedan sumados entre sí para el subtotal, que se escribirá, repitiendo luego este segundo subtotal por los días menos uno que falten hasta la fecha del segundo y escribiendo esta repetición como tercer subtotal; se escriben los tres primeros capitales cuya suma obtenemos por medio del subtotal, y repetimos este último subtotal como repetimos el segundo escribiendo el subtotal de esta repetición; y continuando con la suma de capitales y repetición de subtotales hasta repetir el último de éstos (que será la suma de capitales) por los días menos uno que deba descontarse el último capital, y así obtenemos en la última suma de subtotal la de los capitales de la operación y en la suma de total de la máquina el número comercial.

Si la máquina dispusiera de varias columnas de suma, como disponen las máquinas llamadas Contabilizadoras, entonces las sumas que hemos indicado para los subtotales se escribirían en columna diferente que las de capitales, facilitando la operación que esencialmente sigue el mismo procedimiento indicado.

La obtención directa del número comercial también se obtiene en las calculadoras que tengan el aparato reservador de resultados **(87, 3.º y 88)** sin más que efectuar la multiplicación de cada capital por sus días, y pasar al reservador cada producto parcial.

Claro está que este procedimiento de aplicación mecánica no excluye el que existan capitales de signos diferentes, puesto que tanto en las sumadoras como en los transportes de resultados parciales se puede hacer la resta directa en aquellos capitales que sea de restar, y con ello llegar a mayor amplitud de uso de estas máquinas como veremos al ocuparnos de las cuentas corrientes.

275.—Capitales o tiempos iguales y tantos también iguales. Cuando sean iguales todos los capitales sobre los que haya necesidad de calcular el interés o descuento también se emplea el método del divisor fijo y en este caso la fórmula que da el valor de la incógnita por los productos de capitales y tiempos **(268)** se transforma en estas otras:

$$I \text{ o } d = \frac{\Sigma C_m n_m}{D} = \frac{C \Sigma n_m}{D}$$

si son iguales todos los capitales, y

$$I \text{ o } d = \frac{n \Sigma C_m}{D}$$

si fuesen iguales todos los tiempos.

Ejemplos: 1). Hallar el descuento de cinco capitales todos iguales a 7600 pesetas cuyos tiempos respectivos son 15, 48, 55, 82 y 70 días al 6 °/₀ anual.

Haciendo la suma de tiempos que indica la fórmula resultan 250 días, los que multiplicados por el capital y divididos por el divisor fijo de 6 °/₀ que es 6000, nos da:

$$d = \frac{7600 \times 250}{6000} = 1900000 : 6000 = 316'66 \text{ pesetas.}$$

2) Calcular el interés de los capitales 6000 pesetas, 5840 y 7900 pesetas que han sido impuestos al 4 ½ °/₀ durante 50 días cada uno.

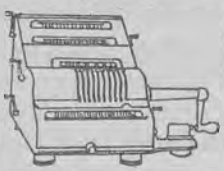
Haciendo la suma de capitales, asciende ésta a 17740 pesetas, lo que hace que el interés sea de

$$(17740 \times 50) : 6000 = 110'87 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **435** al **438; 440; 443** al **460.**

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **439; 441; 442; 286; 289; 290; 302; 303; 323; 344; 347** al **349.**

PROBLEMAS que convendrá resolver por medio de ECUACIONES, los ejercicios *números* **260; 261; 293; 294; 327; 328; 346.**



XXV

COMPARACIONES

276.—Valor actual, valor final y valor anticipado.— Las tres clases de valores que vamos a considerar en el interés son modalidades o denominaciones que recibe el capital teniendo en cuenta tres diferentes momentos del tiempo.

Valor actual es el que suele llamarse simplemente capital, y corresponde al momento a que se refieren los cálculos. La denominación de actual se le da porque en la gran mayoría de los casos los cálculos se refieren al momento en que se efectúan, salvo que ya se indique lo contrario en la cuestión a resolver. Se emplea con gran frecuencia para designar el valor efectivo del descuento.

Valor final es el que corresponde al capital cuando termina el tiempo durante el que se considera produciendo interés. Es el llamado valor acumulado o el nominal del descuento, considerado como suma de capital e intereses.

Valor anticipado o *primitivo* es el que tiene el mismo capital en una época cualquiera anterior al momento a que se refieren los cálculos. La denominación de primitivo indica que ciertas veces ese momento a que se refiere el valor coincide con el origen del tiempo. En el descuento este valor siempre corresponde al valor efectivo.

277.—Comparación de valores del capital.—La comparación matemática de estas clases de valor que corresponden a un mismo capital reviste gran importancia por la frecuencia con que en la práctica ha de relacionarse valores de un mismo capital en diferentes momentos del tiempo.

Para ello hemos de hacer constar que *el valor actual* es

valor anterior con respecto al final y es valor final con respecto al primitivo, o sea que si en la fórmula **(220**, [5]**)**.

$$C = \frac{100kM}{100k + tn}$$

consideramos que M sea el valor actual, resultará entonces que el valor que da la fórmula es el correspondiente a un capital que, n unidades de tiempo anteriores al momento actual, empezó a producir intereses, es decir, que *esa fórmula da el valor primitivo o anterior.*

Con esta deducción tenemos ya relacionados los tres valores de presente, futuro y pretérito y tomando a esa fórmula y a la que para deducirla sirvió de fundamental (**214**, [6]) como leyes generales, resultará que *la relación entre dos valores diferentes del mismo capital para dos momentos también distintos está dada por la expresión*

$$\frac{C}{M} = \frac{100k}{100k + tn}$$

Resulta de esas fórmulas.

1.° *Para referir el valor de un capital* A UNA ÉPOCA POSTERIOR *cualesquiera con interés vencido basta multiplicarle por la fracción*

$$\frac{100k + tn}{100k}$$

2.° *Para referir el valor de un capital* A UNA ÉPOCA *cualquiera* ANTERIOR *con interés anticipado se multiplicará por la fracción*

$$\frac{100k}{100k + tn}$$

Si ahora partimos del interés anticipado tomando la fórmula del valor anticipado (**226**, [1])

$$M' = \frac{C(100k - tn)}{100k}$$

siendo en ella C el valor actual, también estableceríamos como relación de un valor cualquiera con otro posterior

$$\frac{M'}{C} = \frac{100k - tn}{100k}$$

y se tendría de las dos fórmulas:

3.° *Para referir el valor de un capital con interés anticipado* A UNA ÉPOCA POSTERIOR *se multiplica por la fracción*

$$\frac{100k}{100k - tn}$$

4.° *Para referir un capital con interés anticipado* A UNA ÉPOCA ANTERIOR *se multiplicará ese capital por la fracción*

$$\frac{100k - tn}{100k}$$

278. – Regla general de referencia de valores en los dos intereses. – Comparando ahora las cuatro reglas anteriores nos encontramos con que para *referir capitales a una situación anterior o posterior cualesquiera, se multiplica el capital a referir por la fracción* $\frac{100k}{100k \pm tn}$ *o por la* $\frac{100k \pm tn}{100k}$ *teniendo siempre en cuenta que para valores posteriores ha de aumentar el resultado y para los anteriores debe disminuir, y que además el signo de suma corresponde a los intereses vencidos y el de resta a los anticipados.* Esta regla general que acabamos de enunciar permite recordar en todo momento la estructura de todas las fórmulas y evita las confusiones en la aplicación de las mismas que por su semejanza pudieran ocurrir, ya que para que el resultado aumente todos saben que ha de ser mayor el numerador que el denominador y viceversa.

Ejemplos: 1). Averiguar el valor que tenía hace 29 meses un capital que produce intereses vencidos al 4 % y que hoy asciende a 26000 pesetas.

Según la regla anterior deberemos tomar el signo de suma en la fracción por que hayamos de multiplicar el capital 26000 pesetas y además dicha fracción tendrá por numerador el número más pequeño para que el resultado sea menor que el mismo capital. Por consiguiente, tendremos:

$$M' = 26000 \times \frac{1200}{1200 + 4 \times 29} = 23708'20 \text{ pesetas}$$

2). ¿Qué valor adquiere un capital de 1200 pesetas al 6 °/₀ de interés vencido anual en 4 años?

También en este caso corresponde tomar el signo de suma por ser vencido el interés; pero el numerador ha de ser el número mayor de los dos de la fracción, luego

$$M' = 1200 \times \frac{100 + 6 \times 4}{100} = 1488 \text{ pesetas.}$$

279.—Los valores del capital por medio del divisor fijo.—Conociendo la naturaleza y el empleo del divisor fijo es posible llegar a la simplificación de las fórmulas de estos dos valores y de la referencia general anterior.

Tomando las fórmulas del interés vencido o descuento racional **(214)** resultará para el valor acumulado, según el concepto de divisor fijo **(240)**

$$M = \frac{C(36000 + tn) : t}{36000 : t} = \frac{C(D + n)}{D} \qquad [1]$$

Si partimos de las fórmulas del interés anticipado y descuento comercial **(226)** entonces tendremos:

$$M' = \frac{C(36000 - tn) : t}{36000 : t} = \frac{C(D - n)}{D} \qquad [2]$$

y de ahí para valores del capital

$$[3] \qquad C = \frac{MD}{D + n} \quad \text{y} \quad C = \frac{M'D}{D - n} \qquad [4]$$

Reuniendo ahora unas y otras tendríamas como antes las dos fracciones

$$\frac{D \pm n}{D} \qquad \text{y} \qquad \frac{D}{D \pm n}$$

por una de las cuales habría de multiplicarse el valor de un capital para referirle a otra fecha cualquiera en iguales condiciones a las indicadas en el párrafo anterior.

Ejercicios. Pueden servir para ésto todos los propuestos en las páginas 204, 211, 219 y 221.

280. - Comparación entre las dos clases de interés o descuento.—Varias veces durante el estudio de intereses y descuentos hemos dicho que no son equivalentes entre sí el interés anticipado con el interés vencido, y el descuento co-

mercial con el descuento racional, faltándonos únicamente establecer una comparación de los mismos, comparación que puede hacerse por medio de dos valores cualesquiera homólogos en las dos clases de interés o de descuento.

Dos elementos homólogos en interés y descuento son el valor anticipado en el interés y el valor descontado en el descuento, siendo la correspondencia de los mismos, el ser iguales respectivamente en interés vencido y descuento racional, y en interés anticipado y descuento comercial.

Para hacer más fácil la comparación vamos a servirnos de las fórmulas [2] y [3] del párrafo anterior; teniendo en cuenta que en ellas han de ser $M'=C$ en valor que dan las fórmulas, y $C=M$ en los factores de esas mismas fórmulas, y que los elementos de la primera son el valor efectivo del descuento y los de la segunda son el valor nominal, por lo tanto, poniendo en ellas las iniciales del efectivo y del nominal resultan las siguientes:

$$E=\frac{N(D-n)}{D} \qquad \text{y} \qquad E=\frac{ND}{D+n}$$

Vemos en estas fórmulas que el valor efectivo del descuento (valor anticipado del interés) se obtiene multiplicando el valor nominal (valor actual del interés) por la cantidad $\frac{D-n}{D}$ para el descuento comercial (interés anticipado) y por $\frac{D}{D+n}$ para el descuento racional (interés vencido). Al comparar estas dos fracciones, se echa de ver inmediatamente que sus términos respectivos se diferencian de la misma cantidad n, es decir, que la segunda resulta de añadir a numerador y denominador de la primera, la cantidad n, y como sabemos por las matemáticas puras que al añadir a los dos términos de una fracción propia un mismo número la fracción que resulta se acerca más a la unidad, aumenta, por esta propiedad podemos sentar que *el efectivo del descuento racional* (interés vencido) *es mayor que el efectivo del descuento comercial* (interés anticipado), y en consecuencia también será: *el descuento comercial e interés anticipado son mayores que el descuento racional e interés vencido respectivamente* porque estos

descuentos son los sustraendos de las diferencias que representan aquellos valores efectivos.

281.—Cálculo de la diferencia entre esos valores.— Representando por Δ la diferencia entre los dos descuentos o intereses, según las fórmulas últimamente señaladas para el mismo nominal N, se tendrá: **(234** y **240)**

$$\Delta = \frac{Ntn}{100k} - \frac{Ntn}{100k + tn} = \frac{Nn}{D} - \frac{Nn}{D + n}$$

Si en el último miembro de estas igualdades reducimos las dos fracciones al mismo denominador y efectuamos la resta indicada resulta:

$$\Delta = \frac{Nn(D + n)}{D(D + n)} - \frac{NnD}{(D + n)D} = \frac{NnD + Nn^2 - NnD}{D(D + n)} =$$

$$= \frac{Nn^2}{D(D + n)} = \frac{Nn}{D+n} \times \frac{n}{D} = N \times \frac{n}{D+n} \times \frac{n}{D} \qquad [1]$$

de la que según tomemos un orden u otro en los dos últimos factores podemos sentar:

1.° *La diferencia entre las dos clases de descuento* o interés *es igual, para un mismo capital, al descuento racional* (interés vencido) *del descuento comercial* (interés anticipado).

2.° *La diferencia entre los dos descuentos* (intereses) *para un mismo capital es igual al descuento comercial* (interés anticipado) *del descuento racional* (interés vencido).

Si en vez de tomar las fórmulas en base del capital nominal partimos de las del efectivo, tendremos

$$\Delta = \frac{Etn}{100k - tn} - \frac{Etn}{100k} = \frac{En}{D - n} - \frac{En}{D}$$

de la que efectuando la resta indicada en el último miembro y sacando factor común E obtenemos sucesivamente

$$\Delta = \frac{EnD - En(D - n)}{(D - n)D} = \frac{EnD - EnD + En^2}{(D - n)D} =$$

$$= \frac{En^2}{(D - n)D} = E \times \frac{n}{D - n} \times \frac{n}{D} \qquad [2]$$

que también indica que *la diferencia buscada es igual a los*

intereses de una clase calculados tomando por capital los de la otra.

Ejemplos: 1). Determinar la diferencia de descuentos de un crédito disponible a los 74 días por el que se cobraron como anticipo al 5 °/₀ 6800 pesetas.

Es conocido el capital anticipado y por tanto se aplicará la fórmula [2] con los valores especiales

$$E = 6800, \qquad n = 74, \qquad D = 7200,$$

y el resultado será

$$\Delta = 6800 \times \frac{74}{7200 - 74} \times \frac{74}{7200} = 0'72576 \text{ pesetas.}$$

2). Hallar la diferencia de las dos clases de interés o descuento que correspondería a un capital de 8000 pesetas al 6 °/₀ anual en 52 días.

Utilizando la fórmula [1] con los valores

$$N = 8000, \qquad n = 52 \qquad D = 6000$$

obtenemos por resultado

$$\Delta = 8000 \times \frac{52}{6000} \times \frac{52}{6000 + 52} = 0'60614 \text{ pesetas.}$$

282. Cálculo del nominal por la diferencia de descuento e interés.- La diferencia que acabamos de encontrar es la que existe entre el concepto corriente de descuento y el del interés y sirve para calcular el valor nominal de una operación de descuento o el acumulado de una operación de interés aplicando la propiedad según la cual *el producto de los dos descuentos de un mismo capital dividido por su diferencia es igual al valor nominal del descuento.*

Efectivamente, el producto de esos dos descuentos es:

$$\frac{Nn}{D} \times \frac{Nn}{D+n} = \frac{(Nn)^2}{D(D+n)}$$

y dividiendo este valor por el antepenúltimo miembro de la serie de igualdades [1] del párrafo anterior nos da

$$\frac{(Nn)^2}{D(D+n)} : \frac{Nn^2}{D(D+n)} = \frac{N^2n^2D(D+n)}{D(D+n)Nn^2}$$

y simplificando queda como resultado el N, que expresa la exactitud del principio enunciado.

Ejemplo: Comprobar esta propiedad para el capital 8000 pesetas al 6 °/₀ durante 100 días por medio del año comercial.

Descuento comercial de ese capital

$$d = \frac{8000 \times 100}{6000} = 133'\widehat{3} \text{ pesetas.}$$

Descuento racional del mismo capital

$$d = \frac{8000 \times 100}{6000 + 100} = 131'14754 \text{ pesetas.}$$

Haciendo ahora la división del producto de estos dos valores por la diferencia de los mismos, tenemos:

$$\frac{133'\widehat{3} \times 131'14754}{133'\widehat{3} - 131'14754} = 8000'008 \text{ pesetas,}$$

cuyo error puede y debe despreciarse a causa de la inexactitud de las tres divisiones que han sido necesarias para el cálculo.

283. Tantos equivalentes de las dos clases de interés o descuento. — Son los que producen igual interés o descuento para un mismo capital y por consiguiente serán los que resulten de igualar las fórmulas del interés para un mismo capital según se considere en un momento o en otro del tiempo.

Estableceremos, pues, la igualdad de valores según la fórmula del párrafo **212** [7] con la del **222** [1], o bien según la del párrafo **225** [4], con el **229** [1], que respectivamente serían

$$\frac{Ct'n}{100k} = \frac{Ctn}{100k + tn} \quad \text{y} \quad \frac{Ct'n}{100k - t'n} = \frac{Ctn}{100k}$$

y en ambas igualdades t' representará el tanto de interés anticipado o de descuento comercial.

La resolución de las dos ecuaciones conduce al mismo resultado, por lo que partimos de la primera, que sucesivamente nos dará

$$Ct'n(100k + tn) = Ctn100k$$

$$t' = \frac{Ctn100k}{Cn(100k + tn)} = \frac{t100k}{100k + tn} \qquad [1]$$

o bien efectuando la operación indicada al quitar denominadores y transponiendo términos y resolviendo

$$Ct'n100k + Ctnt'n = Ctn100k$$

$$Ct'n100k = Ctn100k - Ctnt'n = Ctn(100k - t'n)$$

$$t = \frac{Ct'n100k}{Cn(100k - t'n)} = \frac{t'100k}{100k - t'n} \qquad [2]$$

según cuyas dos fórmulas vemos que un *tanto cualquiera equivalente se halla, considerando el tanto conocido como valor acumulado si se trata de hallar el tanto de interés, y como valor anticipado si el tanto desconocido es el de descuento, y calculando siempre el capital correspondiente.*

Fijándose en la variación que sufren las fracciones de los tantos equivalentes se apreciará que el tanto de interés respecto del de descuento, aumenta a medida que disminuye la unidad de tiempo y el tanto de descuento respecto del de interés disminuye con la disminución de la unidad de tiempo. Cuando la unidad llegase al límite de su disminución (infinitésimo del tiempo) los dos tantos equivalentes serían iguales.

Ejemplos: 1). Hallar el tanto de interés equivalente al 6 °/₀ de descuento en un préstamo durante 125 días con año comercial

Se trata de aplicar la fórmula [2] siendo valores especiales

$$t' = 6, \qquad k = 360, \qquad n = 125$$

que así da por resultado

$$t = \frac{6 \times 36000}{36000 - 125} = 6\ 0209\ ^{0}/_{0}$$

2). Una operación de interés se concierta al 4 °/₀ anual, durante 5 meses. Calcular el tanto de descuento que será equivalente.

Los valores especiales que toma la fórmula [1] son:

$$t = 4, \qquad k = 12, \qquad n = 5,$$

que da por resultado

$$t' = \frac{4 \times 1200}{1200 + 5} = 3'9834\ ^{0}/_{0}$$

284.—Comparación de resultados con año legal y año comercial.—Ya varias veces hemos hecho referencia al error de emplear el año comercial en vez del año civil o legal para los cálculos de interés y descuento cuando el tiempo se expresa en días, debiendo ahora establecer la relación que hay entre un resultado y otro. Para ésto hallaremos el valor de la diferencia

$$\frac{1}{360} - \frac{1}{365}$$

que será:

$$\frac{1}{360} - \frac{1}{365} = \frac{365 - 360}{360 \times 365} = \frac{5}{360 \times 365} = \frac{1}{72} \times \frac{1}{365} = \frac{1}{360} \times \frac{1}{73}$$

es decir que *el interés o descuento calculado por año comercial excede al mismo calculado por año legal en un setenta y dos avo del que se encontraría por año legal, o un setenta y tres avo del correspondiente por año comercial*

Para el *año bisiesto* esta diferencia daría:

$$\frac{1}{360}-\frac{1}{366}=\frac{366-360}{360\times 366}=\frac{6}{360\times 366}=\frac{1}{360}\times\frac{1}{61}=\frac{1}{360}\times\frac{1}{60}\times\frac{1}{1+\frac{1}{60}}$$

285.—Cálculo de intereses legales por medio de los comerciales y viceversa. —La relación que acabamos de hallar puede bien servirnos para abreviar el cálculo de intereses y descuentos, pues siendo más fácil el cálculo por el año comercial a causa del mayor número de divisores exactos y debiendo obtenerse la mayor exactitud posible, que sólo da el empleo del año civil, podemos calcular abreviadamente intereses o descuentos por el año comercial y rectificar el resultado mediante la relación anterior, lo que constituirá procedimiento abreviado cuando sean varios los capitales, porque entonces bastará una sola rectificación.

Ejemplo: Calcular el interés de 8500 pesetas al $4\,^1/_2\,\%$ anual durante 120 días.

Empleando el divisor fijo del año comercial este interés será:

$$I=\frac{8500\times 120}{8000}=127{\cdot}50 \text{ pesetas.}$$

y restándole su $^1/_{73}$ que son	1'746 »
el interés buscado es.....	125'754 »

Comparando la operación de rectificación que acabamos de hacer en el ejemplo anterior con el procedimiento inglés para el cálculo directo podemos apreciar que el importe de esta rectificación es respecto del interés de año comercial 100 veces más que el interés respecto del número comercial y que por consiguiente su cálculo puede hacerse por la regla del tercio, décimo y décimo sin más variación que dividir solamente por 100 el resultado, en vez de 10000 que indicamos en el párrafo **260.**

Si en el ejemplo anterior calculamos la rectificación por el método inglés hallaremos:

Interés por el año comercial.....	127'50	Ptas.
1/3 del anterior.....	42'50	»
1/10 » »	4'25	»
1/10 » »	0'42	»
Total de la rectificación.....	174'67 : 100 = 1'746	»

Si se tratase de hallar el interés o descuento según el año comercial conociendo el correspondiente al año civil, tendríamos que sumar al interés o descuento conocido el $^1/_{72}$ del mismo, pero teniendo en cuenta que su utilidad práctica es nula, pues sólo sirve para hacer el cálculo más largo que por el procedimiento ordinario, nos abstenemos de resolver el ejercicio correspondiente.

Para el caso de *año bisiesto* hemos visto que la rectificación a efectuar, para tener el interés o descuento del año civil conociendo el del año comercial, era restar de éste su $^1/_{61}$, y por el desarrollo del último miembro de las igualdades que dan esta rectificación podemos tener un procedimiento abreviado, pues sucede que es

$$\frac{1}{61} = \frac{1}{60}\left(1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2} - \frac{1}{60^3} + \ldots\ldots\right)$$

así que la rectificación será igual al $^1/_{60}$ del interés o descuento de año comercial disminuído en el $^1/_{60}$ del mismo y así sucesivamente sumado y restado alternando el $^1/_{60}$ del resultado anterior.

Supongamos que en el ejemplo ya resuelto se tratase del año bisiesto, la rectificación que habríamos de restar de las 127'50 pesetas que corresponden al año comercial sería:

El $^1/_{60}$ de 127'50.....	2'125
El $^1/_{60}$ del anterior (para restar).....	0'035
El $^1/_{60}$ del anterior (para sumar).....	0'0006
Total de la rectificación (suma algebraica)..	2'0906

286.—Valores múltiplos y submúltiplos del capital. —Es una curiosidad científica el cálculo del tiempo que se necesita para que un capital cualquiera adquiera un valor acumulado en el interés igual a un múltiplo suyo, o que el efectivo de un descuento sea un submúltiplo del nominal. Según ésto, hay cuatro problemas que resolver, y vamos a ocuparnos de ellos, advirtiendo antes que son sólo curiosidades científicas, por lo que sólo determinaremos las fórmulas relativas a los mismos.

1.°—*Múltiplo del capital en el interés vencido.* —Si el múl-

tiplo en que haya de convertirse el capital C es, por ejemplo, x se tiene:

$$M = xC$$

y poniendo en vez del valor acumulado la fórmula que lo determina por el divisor fijo **(279,** [1]**)** resulta:

$$\frac{C(D+n)}{D} = xC$$

de donde, dividiendo los dos miembros por C y haciendo desaparecer el denominador obtenemos:

$$D + n = Dx$$

y de aquí el valor del tiempo buscado que será:

$$n = Dx - D = D(x-1)$$

resultado que igualmente se obtendría sustituyendo el valor xC en la fórmula del tiempo.

2.º - *Múltiplo del capital en el interés anticipado.* — Este interés no se diferencia del anterior sinó en que los intereses son devengados en el instante mismo en que empiezan los períodos de tiempo, debiendo ser la misma la cantidad total de intereses necesarios para que el capital quede multiplicado y por consiguiente también igual el tiempo necesario para ello, por consiguiente, la misma fórmula que anteriormente servirá para este caso (*)

3.º *Submúltiplos del nominal en el descuento comercial.*—En este caso el efectivo M' ha de ser igual a N/x y poniendo en vez del efectivo su valor **(279,** [2] y **234)** resultará la igualdad

$$\frac{N(D-n)}{D} = \frac{N}{x}$$

haciendo desaparecer denominadores de esta ecuación, y simplificando por N tenemos:

(*) Téngase en cuenta que el capital que ha de quedar multiplicado no es el valor anticipado en el instante en que se devengan los intereses, sino el capital sobre el que se calculan los mismos.

Si en el interés anticipado quisiéramos hallar el múltiplo del valor anticipado en cada unidad de tiempo en el instante de empezar ésta, la fórmula para tal caso sería la misma que hallaremos para el descuento comercial.

$$x(D-n) = D$$

efectuando las operaciones indicadas

$$Dx-nx = D$$

trasponiendo los términos y despejando el valor del tiempo;

$$n = \frac{Dx - D}{x} = \frac{D(x-1)}{x}$$

4.° *Submúltiplo del nominal en el descuento racional.* —El valor efectivo que en este caso ha de ser igual al submúltiplo del nominal es el que se obtendría por la fórmula [3] del párrafo **279** y la igualdad que lo expresaría ha de ser:

$$\frac{ND}{D+n} = \frac{N}{x}$$

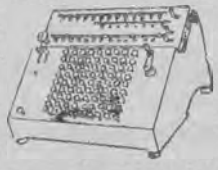
y con iguales transformaciones que anteriormente tendríamos:

$$Dx = D + n$$

$$n = Dx - D = D(x-1)$$

que es la misma hallada para el primer caso.

EJERCICIOS *números* **367** y **403** al **434**.



XXVI

PROMEDIOS DE INTERÉS

287.—Objeto de estos cálculos.—Con el cálculo de los promedios (Capítulo II) de los diferentes elementos del interés y descuento nos proponemos reducir a uno sólo el de varios capitales.

Los promedios de interés y descuento pueden ser divididos en *simples* y *compuestos* según que el elemento de que se busque la medida media se considere o no como de determinación simultánea con otro elemento cualquiera, es decir, que esa división de los promedios se refiere al número de incógnitas sobre que verse el problema.

Esta clase de promedios no exigen el que sean diferentes todos los elementos relativos a los distintos capitales que intervienen en la operación, sino que pueden ser iguales otros de los que no se trate de buscar el promedio, y en la práctica así sucede la mayoría de los casos para los promedios de capitales y tiempos que suelen referirse a tantos iguales.

288.—Promedio simple del tanto.—El objeto de este cálculo es hallar el tanto medio a que resultan productores de interés o a que han sido descontados varios capitales. En este caso, lo mismo que en todos los relativos a varios capitales, pueden éstos tener signos positivos todos, todos negativos, o unos de un signo y otros de otro, sin que se altere la exactitud de las fórmulas que sirven para cada caso y sin que sea preciso señalar el modo de conocer el signo, que está siempre determinado por las condiciones prácticas de cada capital.

Supongamos que se tengan los capitales C_1, C_2, C_3, ... C_m cuyos tiempos sean respectivamente n_1, n_2, n_3, ... n_m y los tantos también respectivos t_1, t_2, t_3, ... t_m. El

problema consiste en determinar un tanto común t tal que el conjunto del interés o descuento de todos esos capitales por los respectivos tiempos sea el mismo a este tanto común que a los diferentes tantos particulares.

Este interés o descuento será por un lado **(212,** [7]**)**

$$\frac{C_1 n_1 t_1 + C_2 n_2 t_2 + C_3 n_3 t_3 + \ldots\ldots\ldots + C_m n_m t_m}{100k} =$$

$$= \frac{\sum_1^m C_m n_m t_m}{100k}$$

y por otra parte el valor de ese interés o descuento debe ser

$$\frac{(C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + \ldots\ldots\ldots + C_m n_m)t}{100k} =$$

$$= \frac{t\sum_1^m C_m n_m}{100k}$$

expresiones que han de dar resultados idénticos en virtud de la definición del problema, luego igualándolas y despejando t que es la incógnita buscada, se tendrá sucesivamente:

$$\frac{t\sum_1^m C_m n_m}{100k} = \frac{\sum_1^m C_m n_m t_m}{100k}$$

$$t\sum_1^m C_m n_m = \sum_1^m C_m n_m t_m$$

$$t = \frac{\sum_1^m C_m n_m t_m}{\sum_1^m C_m n_m}$$

Ejemplo: Calcular el tanto medio de tres capitales de 500, 450 y 1200 pesetas respectivamente que producen interés durante 102 días al 4 °/o el primero, 90 días al 5 °/o el segundo y 70 días al 6 °/o el tercero

Son los elementos de cálculo

$C_1 = 500,$	$C_2 = 450,$	$C_3 = 1200$
$n_1 = 102,$	$n_2 = 90,$	$n_3 = 70$
$t_1 = 4,$	$t_2 = 5,$	$t_3 = 6$

con lo que será:

$$\Sigma C_m n_m t_m = 300 \times 102 \times 4 + 450 \times 90 \times 5 + 1200 \times 70 \times 6 = 828900$$
$$\Sigma C_m n_m = 300 \times 102 + 450 \times 90 + 1200 \times 70 = 155100$$

de donde tenemos por resultado buscado

$$t = \frac{828900}{155100} = 5'344\ \%$$

289. – Promedio simple del capital. – Este cálculo tiene por objeto encontrar un capital que podría sustituir a todos los de la operación sin que se alterase el resultado del interés o descuento que le correspondería. Aunque menos frecuente que el cálculo del tanto medio, el que ahora nos ocupa presenta cierta importancia práctica y sirve para el valor de la incógnita el fundamento mismo que antes hemos empleado, pues si en la primera igualdad del párrafo anterior, hacemos que el elemento igual en todos los sumandos sea C, el valor del segundo miembro de la segunda igualdad se convertiría en

$$\frac{C\sum_1^m t_m n_m}{100k}$$

y por igualación y supresión del denominador común resulta

$$C\sum_1^m t_m n_m = \sum_1^m C_m n_m t_m$$

de donde podemos despejar la incógnita y nos dará:

$$C = \frac{\sum_1^m C_m n_m t_m}{\sum_1^m t_m n_m}$$

fórmula semejante a la del promedio del tanto.

Ejemplo: Calcular la deuda media de un particular para con un Banco, de cuyas cajas retiró el particular las cantidades siguientes por diferentes préstamos. 8000 pesetas el 4 de junio al $4\ ^1/_2\ \%$; 5000 pesetas el 15 del mismo mes al $5\ \%$; 8950 pesetas el 7 de julio al $4\ \%$, pagando todas las cantidades en fin de julio.

Los elementos del cálculo son:

$C_1 = 8000$,	$C_2 = 5000$,	$C_3 = 8950$
$n_1 = 57$,	$n_2 = 46$,	$n_3 = 24$
$t_1 = 4'50$,	$t_2 = 5$,	$t_3 = 4$

con lo que las sumas de productos serán

$$\Sigma C_m n_m t_m = 8000 \times 57 \times 4'50 + 5000 \times 46 \times 5 + 8950 \times 24 \times 4 = 4061200$$
$$\Sigma n_m t_m = 57 \times 4'50 + 46 \times 5 + 24 \times 4 = 582'50$$

y el resultado sería

$$C = \frac{4061200}{582'5} = 6972 \text{ pesetas.}$$

290. – Promedio simple del tiempo. – Con menos importancia práctica que los anteriores, pues es muy raro que pueda necesitarse calcularle, está el promedio del tiempo, que es el número de unidades durante las que podrían ser productores de interés o ser descontados varios capitales a tantos también diferentes, para que, supliendo a todos los tiempos ese tiempo promediado, se obtuviese el mismo resultado.

Haciendo que en la suma ya conocida sea igual el elemento tiempo, resultaría:

$$n\Sigma C_m t_m$$

y por la igualación con el resultado de interés o descuento verdadero tendríamos

$$n\sum_1^m C_m t_m = \sum_1^m C_m t_m n_m$$

y por división llegamos al valor buscado

$$n = \frac{\sum_1^m C_m t_m n_m}{\sum_1^m C_m t_m}$$

fórmula también semejante a las dos anteriores.

Ejemplo: Resolver el último para tiempo promediado.

Las sumas de productos serán:

$$\Sigma C_m n_m t_m = 4061200$$

$$\Sigma C_m t_m = 8000 \times 4'50 + 5000 \times 5 + 8950 \times 4 = 96800$$

siendo el resultado pedido

$$n = \frac{4061200}{96800} = 41'95 <> 42 \text{ días}$$

puesto que la unidad del resultado ha de ser la misma empleada en la suma del numerador, señalándonos este resultado que la fecha promediada es 42 días anteriores al 31 de julio, o sea el 19 de junio.

291.—Promedio compuesto de tanto y tiempo. – Estos promedios resuelven la siguiente cuestión: dados varios capitales que producen interés o son descontados a tantos diversos y cuya disponibilidad depende de plazos diferentes, hallar el plazo medio de disponibilidad y a la vez el tanto medio de las diferentes operaciones.

Con las notaciones empleadas hasta ahora, la ecuación del problema es la siguiente:

$$tn\Sigma C_m = \Sigma C_m t_m n_m$$

y como no tenemos más ecuación que ésta y las incógnitas son dos (tanto y tiempo) el problema es indeterminado y sólo podría ser resuelto dando valores arbitrarios a una de dichas incógnitas, teniéndose aún así tantos promedios de la otra como se quisiera; pero cuando el valor arbitrario se diese al tanto, lo que equivale a considerar que a todos los capitales corresponde el mismo tanto, entonces nos hallamos con la determinación de un promedio simple de tiempo, caso particular del promedio que ya calculamos antes, y que en la práctica constituye el problema llamado del *vencimiento medio*, de gran importancia y que luego estudiaremos.

Los autores que tratan de estos promedios aconsejan que se haga primero el promedio de los tantos como si no existiese el factor tiempo y luego el promedio de este tiempo, lo que equivale a resolver el problema con un valor tanto completamente arbitrario y, por consiguiente, sin garantía de que haya de ser aceptado como resultado verdadero en la práctica, por lo que no debe nunca seguirse este procedimiento y sí considerar el problema como irresoluble en tanto no se fijen otras condiciones.

292 —Promedio compuesto de capital y tiempo.—El problema que se trata de resolver ahora es idéntico al del párrafo anterior, pues para las mismas condiciones que antes se ha de buscar el promedio de los capitales a la vez que el promedio de los plazos de que depende su disponibilidad, y como entonces, este problema resulta indeterminado porque la ecuación es una, y las incógnitas a buscar son dos, debiendo como en el párrafo que antecede, fijar un valor arbitrario a una de las dos incógnitas y con arreglo a él determinar el valor de la otra.

Esta determinación arbitraria de una de las incógnitas causa dos variaciones en el problema fundamental, según que sea determinar el capital que pueda sustituir al conjunto de los demás en una época pre-establecida y con la compensación de intereses o descuentos, o hallar la época en que esta

compensación se verifique entre todos los capitales que entran en la operación y otro promediado y también establecido de antemano.

Puede observarse que los promedios compuestos teóricamente constituyen una cuestión indeterminada, que sólo por convención y en casos particulares llega a ser determinada, y en cuanto a la práctica son éstas cuestiones de promedios compuestos de absoluta indiferencia, pues que no corresponden a verdaderas necesidades de cálculo, pero su estudio puede resultar beneficioso como medio de ampliación de aquellos casos particulares que se presentan en la práctica.

293.—Vencimiento medio.—Por lo que ya dijimos **(291)** se deduce que el vencimiento medio es el problema que tiene por objeto hallar un plazo que pueda sustituir a todos los de la disponibilidad de diversos capitales, de forma que haya compensación de intereses o descuentos entre los ganados y perdidos.

Estos capitales pueden tener cualquier signo y por consiguiente la suma de que hablamos ha de ser suma algebraica; que prácticamente estará representada por capitales sobre los que sólo hubiere de calcularse intereses, en cuyo caso todos serían positivos y la suma algebraica daría un resultado numérico igual a la suma aritmética; por capitales sólo a descontar, siendo todos negativos y suma algebraica igual a suma aritmética; y capitales unos positivos y otros negativos, porque corresponda a unos interés y a otros descuento, y su suma algebraica sería el saldo de la cuenta en que se representasen, (*) con signo positivo si el saldo es de los capitales de interés y con signo negativo si dicho saldo es de los capitales de descuento.

También sabemos que el tanto de interés o descuento que corresponde a los diferentes capitales ha de ser el mismo para todos los que intervienen en la operación, y fijadas estas limitaciones prácticas a las condiciones teóricas que pudieran dar origen al problema que nos ocupa, pasamos a determinar la incógnita.

Los plazos de descuento o interés para cada capital desde un origen común del tiempo – origen que se denomina *época*—

(*) Esta clase de vencimiento medio constituye uno de los varios principios fundamentales porque puede explicarse las operaciones de liquidación de intereses en las cuentas corrientes **(395)**.

son n_1, n_2, n_3,..... n_m y los capitales correspondientes C_1, C_2, C_3,.....C_m, a todos los cuales corresponde un mismo tanto t debiendo ser n el plazo medio que resuelva la cuestión, contado, claro está, este plazo medio desde la misma época que los particulares dados en el problema.

La compensación de intereses o descuentos tendrá lugar cuando se cumpla la igualdad de intereses de los capitales en los plazos de sus respectivas disponibilidades y el nuevo que se les asigna en conjunto, como tiene que ser en todos los promedios, o sea que ha de verificarse

$$\frac{t\Sigma C_m n_m}{100k} = \frac{tn\Sigma C_m}{100k}$$

y simplificando por supresión del denominador común y del factor común t de ambos miembros nos queda

$$\Sigma C_m n_m = n\Sigma C_m$$

de la que obtenemos para valor del vencimiento medio buscado

$$n = \frac{\Sigma C_m n_m}{\Sigma C_m}$$

en cuya expresión ha desaparecido el tanto, como no podía menos al ser el mismo para todos los capitales, o sea que *el vencimiento medio es independiente del tanto.*

También el resultado hallado para el vencimiento medio es independiente del origen que se tome para el tiempo, pues si tenemos una época diferente en z unidades de tiempo a la primeramente elegida, pudiendo ser estas z unidades positivas o negativas, el nuevo vencimiento medio debería ser:

$$n' = \frac{\Sigma C_m(n_m \pm z)}{\Sigma C_m} = \frac{\Sigma C_m n_m}{\Sigma C_m} \pm \frac{\Sigma C_m z}{\Sigma C_m} = \frac{\Sigma C_m n_m}{\Sigma C_m} \pm z$$

y según esta fórmula el nuevo vencimiento medio difiere del primeramente encontrado en valor absoluto y en signo lo mismo que la nueva época de la primera, con lo que, si el nuevo plazo es mayor en valor absoluto, es porque todos los plazos parciales se contaron z unidades antes, y también la fecha del vencimiento medio se contará desde z unidades antes que el primero, obteniéndose por consiguiente la misma fecha.

Esta independencia permite obtener una simplificación en el cálculo, pues *tomando por época la fecha de la disponibilidad del primer capital* será cero el primer plazo y todos los productos de la suma indicada en el numerador de la fórmula serán cantidades más pequeñas.

Ejemplo: Hallar la fecha en que deberían pagarse de una sola vez y sin perjuicio para ninguna de las dos partes las cantidades siguientes: 4000 pesetas que deben ser satisfechas en 10 de mayo; 7000 en 5 de julio; 6000 en 20 de agosto, y 11000 en 30 de septiembre.

Presentamos la disposición práctica que conviene a estos cálculos para facilitar las dos sumas que indica la fórmula, y así tendremos:

Ptas.	4000	al	10 de mayo,	época		
»	7000	»	5 » julio,	56 días	392000	producto.
»	6000	»	20 » agosto,	102 »	612000	»
»	11000	»	30 » septbre,	143 »	1573000	»
$\Sigma C_m =$	28000				$2577000 = \Sigma C_m n_m$	

y haciendo ahora la división que indica la fórmula

$$n = 2577000 : 28000 = 92{,}05 < > 92 \text{ días}$$

que añadidos a la época dan 10 de agosto como vencimiento.

Como *caso particular del vencimiento medio* que estamos estudiando suele ser considerado aquel en que todos los capitales fuesen iguales, para cuya resolución basta considerar que entonces el valor del numerador de la fórmula hallada se convierte en $C\Sigma n_m$ y el denominador en mC con lo que simplificando por supresión del factor común C, queda como regla que *el vencimiento medio de varios capitales todos iguales, corresponde a la media aritmética* **(27)** *de los plazos de esos mismos capitales.*

Es frecuente leer en obras de Cálculo que el vencimiento medio exige la equivalencia de valores actuales y así distinguen el que ese vencimiento se calcule con descuento racional o con descuento comercial, obteniendo de este modo consecuencias peregrinas, porque confunden el problema de promedios (vencimientos medios por compensación de intereses) con la equivalencia de efectos (compensación de valores actuales).

Como este segundo problema lo estudiamos más adelante remitimos al lector al párrafo **298** en que se estudia.

EJERCICIOS *números* **461** al **473; 477** al **485; 488** al **493; 495; 497; 499; 501; 494** (2.º); **500** (2.º) y **CXXVI** al **CXXVIII.** PROBLEMAS, los ejercicios *números* **474** al **476; 496; CXXIX** y **CXXX.**

XXVII

EQUIVALENCIA DE PAGOS

294.—Efectos equivalentes.—Se dice que dos *efectos o capitales* son *equivalentes*, cuando sus valores actuales calculados al mismo tanto resultan iguales, llamándose *punto de equivalencia* el valor particular del tiempo para el cual se hacen equivalentes los dos capitales, puesto que solamente puede existir un momento en que se cumpla esa equivalencia.

Para convencernos de que existe un sólo punto de equivalencia de dos capitales bastará que establezcamos la igualdad que define la equivalencia de los efectos, llamando n al plazo o valor del tiempo que representa ese punto de equivalencia, y empleando la notación general que hemos utilizado en los promedios, tendríamos que en el caso de descuento comercial el valor actual de esos dos capitales debiera ser (**279**, [2])

$$\frac{C_1[D-(n_1-n)]}{D}=\frac{C_2[D-(n_2-n)]}{D}$$

calculados los dos con referencia al punto de equivalencia; y si consideramos que el descuento sea racional **279**, [3])

$$\frac{C_1D}{D+(n_1-n)}=\frac{C_2D}{D+(n_2-n)}$$

viendo que en ambos casos la condición de igualdad de valores actuales contiene una sola incógnita, luego es una ecuación determinada, con una sola solución, si bien el valor de la incógnita que es el punto de equivalencia no tiene limitación alguna en su valor, pudiendo ser lo mismo positivo que nega-

tivo, entero que fraccionario, e incluso ser cero que indicaría que el punto de equivalencia coincide con el origen del tiempo.

295.– Problemas de equivalencia de capitales.– Examinando cualquiera de las dos ecuaciones anteriores podemos apreciar que las variables interesantes en ellas son los capitales, los tiempos de cada uno de ellos y el tiempo o punto de equivalencia, de donde nacen los tres problemas principales de determinación del punto de equivalencia, valor de un capital o nominal de un efecto para que sea equivalente a otro determinado, y cálculo de la fecha de disponibilidad de un capital para que sea equivalente a otro conocido, considerando prácticamente que estos dos últimos problemas tienen por punto de equivalencia la fecha del cálculo o la del origen del tiempo para todos los capitales. Además pudiera determinarse el tanto al que pueden ser equivalentes los dos capitales y que por ser de importancia solamente teórica no examinamos.

Para resolver estos tres problemas principales partiremos de las dos ecuaciones anteriores y tendremos:

1.° *Punto de equivalencia.* a) *Descuento comercial.–* Al quitar los denominadores de la ecuación queda ésta

$$C_1[D-(n_1-n)] = C_2[D-(n_2-n)]$$

en la que haciendo las operaciones indicadas es

$$C_1(D-n_1) + C_1n = C_2(D-n_2) + C_2n$$

y como ahora ya tenemos los términos de la incógnita independientes, al transponer términos y reducir los semejantes nos da

$$C_1(D-n_1) - C_2(D-n_2) = (C_2-C_1)n$$

de la que ya podemos obtener para el valor del punto de equivalencia

$$n = \frac{C_1(D-n_1) - C_2(D-n_2)}{C_2-C_1}$$

si bien suele darse otra disposición a esta fórmula haciendo las operaciones indicadas en el numerador que convierte a éste en

$$DC_1 - C_1n_1 - DC_2 + C_2n_2 = D(C_1-C_2) + C_2n_2 - C_1n_1$$

con lo cual permite simplificar el quebrado en cuanto al primer término cambiando los signos, y se tiene como fórmula final

$$n = \frac{C_1 n_1 - C_2 n_2}{C_1 - C_2} - D \qquad [1]$$

b)—*Descuento racional.*—Partiendo de la segunda de las ecuaciones de equivalencia, se simplifican ambos miembros por supresión del factor común D y así se obtiene sucesivamente al resolver la ecuación para la incógnita n

$$C_1(D + n_2 - n) = C_2(D + n_1 - n)$$
$$C_1 D + C_1 n_2 - C_1 n = C_2 D + C_2 n_1 - C_2 n$$
$$C_1 D + C_1 n_2 - C_2 D - C_2 n_1 = C_1 n - C_2 n$$
$$C_1 n_2 - C_2 n_1 + D(C_1 - C_2) = (C_1 - C_2) n$$

que nos da para valor del tiempo buscado

$$n = \frac{C_1 n_2 - C_2 n_1}{C_1 - C_2} + D \qquad [2]$$

2.° *Nominal de uno de los capitales.* - Para este problema y el siguiente, según antes dijimos, pudiera tomarse como punto de equivalencia cualquier fecha, pero las condiciones prácticas en que se hace necesario este cálculo es que el punto de equivalencia coincida con el momento de los cálculos que se toma por origen del tiempo, y siendo así resulta que el valor de n en las ecuaciones fundamentales del problema queda reducido a cero, y así llamando C_x al capital desconocido obtenemos para él como ecuación y resolución en el descuento comercial

$$C_1(D - n_1) = C_x(D - n_x)$$
$$C_x = \frac{C_1(D - n_1)}{D - n_x} \qquad [3]$$

y en el caso del descuento racional

$$C_1(D + n_x) = C_x(D + n_1)$$
$$C_x = \frac{C_1(D + n_x)}{D + n_1} \qquad [4]$$

3.° *Plazo de uno de los capitales.* - Haciendo las operaciones indicadas en las ecuaciones anteriores, transponiendo

y reduciendo términos semejantes para llegar a la resolución de la ecuación, obtendremos en el caso de descuento comercial

$$C_1 D - C_1 n_1 = C_x D - C_x n_x$$

$$C_x n_x = C_1 n_1 + C_x D - C_1 D = C_1 n_1 - D(C_1 - C_x)$$

$$n_x = \frac{C_1 n_1 - D(C_1 - C_x)}{C_x} \qquad [5]$$

y si se trata de descuento racional

$$C_1 D + C_1 n_x = C_x D + C_x n_1$$

$$C_1 n_x = C_x D - C_1 D + C_x n_1 = C_x n_1 - D(C_1 - C_x)$$

$$n_x = \frac{C_x n_1 - D(C_1 - C_x)}{C_1} \qquad [6]$$

Ejemplos: 1). Hallar la fecha en que resultarían equivalentes dos capitales de 15000 y 14976 pesetas respectivamente a los que falta para su disponibilidad 130 y 116 días, si el descuento se calcula al 4 %.

Tomando el año comercial, la fórmula [1] nos dará para el caso de descuento también comercial

$$n = \frac{15000 \times 130 - 14976 \times 116}{15000 - 14976} - 9000 = -134 \text{ días},$$

lo que indica que la fecha de equivalencia es de 134 días anteriores a la fecha del cálculo o época origen del tiempo.

Si se tratase del descuento racional dará la fórmula [2]

$$n = \frac{15000 \times 116 - 14976 \times 130}{15000 - 14976} + 9000 = 380 \text{ días},$$

a partir de la fecha del cálculo que se toma por origen del tiempo; y como es superior a la fecha de disponibilidad de los dos, quiere decir que para hacerse equivalentes hay que esperar a que produzcan intereses ambos capitales, para que exista la igualdad entre sus valores acumulados.

2). Determinar el valor de un capital disponible a los 75 días para que sea equivalente en la fecha del cálculo a otro de 12000 pesetas con descuento del 6 %, si la disponibilidad del segundo está alejada en 48 días.

Por medio de la fórmula [3] y con descuento comercial tendremos en el caso de que el divisor fijo empleado sea el exacto

$$C = \frac{12000(6000 - 48)}{6000 - 75} = 12058'68 \text{ pesetas},$$

y si se trata de descuento racional la fórmula [4] dará

$$C = \frac{12000(6000 + 75)}{6000 + 48} = 12055'57 \text{ pesetas}.$$

3). Determinar la fecha en que deba ser disponible un capital de 81000

pesetas para que al 5 % de interés o descuento anual sea equivalente en 7 de julio a otro capital de 81525 pesetas disponible el 5 de septiembre siguiente.

Tomando por época la fecha en que deben ser disponibles para que sea cero el punto de equivalencia según se estableció en las fórmulas, o sea; siendo el 7 de julio la fecha del cálculo, tendremos que por la fórmula [5] para el año legal, con el valor de 60 días para el plazo del segundo capital, sería el del primero que se pide

$$n = \frac{81525 \times 60 - 7300(81525 - 81000)}{81000} = 15 \text{ días},$$

que a partir del 7 de julio nos dice que la fecha en que debe ser disponible el primer capital es el 20 de julio.

Para caso de descuento racional nos da la fórmula [6]

$$n = \frac{81000 \times 60 - 7300(81525 - 81000)}{81525} = 12'60 \text{ días},$$

que aun cuando en la práctica serían equivalentes a los anteriores, dando también la fecha del 20 de julio, nos indica la diferencia de disponibilidad que dan las dos clases de descuento, que en el ejemplo es de medio día.

EJERCICIOS *números* **522** al **524; 526** al **529; CXXXI** al **CXXXIV**.

PROBLEMAS los ejercicios *números* **512;** y **515.**

296.—Problemas del vencimiento común.—Se llama *vencimiento común* cualquiera que corresponda a la vez a varios capitales reemplazados por otro, de forma que el valor actual de todos los reemplazados sea igual al valor actual del capital con que se reemplazan.

Pronto se ve que los problemas deben consistir en determinar el capital sustitutivo de todos los demás, la fecha en que este capital debe ser disponible para que se cumpla la condición de igualdad de valores actuales, y el tanto de la operación, si bien este último problema carece de importancia práctica debido a que el tanto en estas operaciones es el mismo para todos los capitales y para el sustituto, por lo que no suele ser examinado en las obras de Cálculo.

Podremos observar en este estudio que el vencimiento medio antes examinado **(293)** es un caso particularísimo del vencimiento común, en el que al hacer las restricciones de las condiciones del problema se cumple al mismo tiempo la igualdad de valores actuales con la compensación de los números comerciales sobre que se calculan los intereses.

297.—Capital sustitutivo de varios pagos.—Debere-

mos distinguir las dos clases de interés y descuento y en ambos casos el problema consistirá en igualar los valores actuales según expresa la definición del vencimiento común.

Para caso de descuento comercial tendremos como ecuación fundamental

$$\frac{C(D-n)}{D}=\frac{\Sigma C_m(D-n_m)}{D}$$

de la cual al quitar los denominadores iguales podemos despejar el valor del capital C teniendo

$$C=\frac{\Sigma C_m(D-n_m)}{D-n}=\frac{D\Sigma C_m-\Sigma C_m n_m}{D-n} \qquad [1]$$

pudiendo emplear uno u otro de los dos últimos miembros, aunque será más cómodo el último.

Si consideramos el descuento racional, la ecuación fundamental sería

$$\frac{CD}{D+n}=\sum\frac{C_m D}{D+n_m}$$

en la cual la simplificación ha de hacerse por supresión del factor igual de los numeradores, e inmediatamente obtendremos para valor del capital buscado

$$C=(D+n)\left[\sum\frac{C_m}{D+n_m}\right] \qquad [2]$$

en la que no puede establecerse simplificación ninguna porque los denominadores de la suma son todos diferentes, pero sí podremos observar que si se tratase de un sólo capital nos daría la fórmula [4] del párrafo **295** como la fórmula del descuento comercial nos habría dado la fórmula [3] de dicho párrafo, probando así que *el problema de equivalencia de capitales es sólo un caso particular del vencimiento común.*

Ejemplo: Cuatro capitales tienen por valor respectivamente 1500, 950, 3000 y 4800 pesetas y por plazos de disponibilidad 40, 50, 65 y 75 días. Quiere sustituirse esos cuatro efectos por uno solo cuya disponibilidad sea de 60 días. Hallar el importe del capital por que han de sustituirse siendo el interés o descuento del 6 %.

Daremos a este ejercicio una disposición práctica que facilite las sumas, y para descuento comercial por medio de la fórmula [1] tendremos:

Ptas.	1500	durante	40	días	60000
»	950	»	50	»	47500
»	3000	»	65	»	195000
»	4800	»	75	»	360000
	$\Sigma C_m = 10250$				$\Sigma C_m n_m = 662500$

ahora tendremos que por ser el divisor fijo de 6 °/₀ = 6000 también será:

$$D\Sigma C_m = 6000 \times 10250 = 61500000$$

y por consiguiente el valor buscado ha de ser

$$\frac{61500000 - 662500}{6000 - 60} = \frac{60837500}{5940} = 10242 \text{ pesetas}$$

valor poco diferente de la suma de capitales, por ser muy poco diferente también el plazo señalado para la sustitución del que correspondería al vencimiento medio.

En la práctica suele presentarse esta cuestión sólo para plazos bastante diferentes del que habría de corresponder al del vencimiento medio, y también suele hacerse el cálculo por el procedimiento rudimentario de calcular los intereses y descuentos que corresponda a los diferentes capitales en relación al nuevo plazo fijado y añadir la diferencia, cuando son mayores los intereses, o restarla, si son mayores los descuentos, de la suma de capitales a sustituir. Por este procedimiento el ejercicio que acabamos de resolver nos daría, con disposición práctica semejante:

					Núms. de ints.	Núms. de descto.
Ptas.	1500	durante	60 — 40 = 20	días	30000	
»	950	»	60 — 45 = 10	»	9500	
»	3000	»	65 — 60 = 5	»		15000
»	4800	»	75 — 60 = 15	»		72000
»	10250		Números.....		39500	87000

7'996 Interés a restar $\frac{87000 - 39500}{6000}$

Pesetas 10242'003 como capital sustituto, que es el mismo resultado que antes encontramos.

Por medio de la fórmula [2] nos daría en el caso de descuento racional

Valor del primer quebrado.....		1500 : (6000 + 40) =	0'24854437
» del segundo	»	950 : (6000 + 50) =	0'15702479
» del tercer	»	3000 : (6000 + 65) =	0'49464138
» del cuarto	»	4800 : (6000 + 75) =	0'79012362
» de la sigma.....			1'69013416

con lo cual obtenemos para valor del capital pedido

$$1'69013416 \times 6060 = 10242'21 \text{ pesetas}$$

pudiendo emplear también el segundo procedimiento que empleamos para el caso del descuento comercial.

298.—Fecha del vencimiento común.—Como antes hemos de hacer el estudio para las dos clases de interés o descuento.

Para el descuento comercial o interés anticipado partiremos de la igualdad de numeradores de la ecuación fundamental del párrafo anterior, en la que efectuando las operaciones indicadas, transponiendo términos y sacando factor común, tenemos sucesivamente

$$CD - Cn = D\Sigma C_m - \Sigma C_m n_m$$

$$DC - D\Sigma C_m + \Sigma C_m n_m = Cn$$

$$D(C - \Sigma C_m) + \Sigma C_m n_m = Cn$$

y de aquí para el valor del tiempo buscado

$$n = \frac{D(C - \Sigma C_m) + \Sigma C_m n_m}{C} \qquad [1]$$

fórmula en la cual, si establecemos la condición de que el capital C sustitutivo de los varios de la operación sea igual a la suma de todos, se anula el primer término del quebrado y queda reducido este vencimiento al que calculamos como vencimiento medio **(293)**.

Para el caso del descuento racional partimos de la fórmula [2] del párrafo anterior, de donde se deduce inmediatamente

$$D + n = \frac{C}{\sum \frac{C_m}{D + n_m}}$$

y de aquí para el valor del tiempo,

$$n = \frac{C}{\sum \frac{C_m}{D + n_m}} - D \qquad [2]$$

fórmula que no admite simplificación aunque se cumpla la igualdad entre el capital sustituto y la suma de todos los sustituídos.

Repetimos ahora lo que dijimos en el vencimiento medio **(293)** sobre la confusión de querer calcular este vencimiento medio por igualdad de valores actuales, con lo que la fórmula que serviría para tal caso sería la anterior en que en vez de C se hubiera puesto ΣC_m, y estudiando la fórmula

para todas las posibilidades de aplicación, nos hallaremos con que nos daría tantos vencimientos medios como fueren las épocas tomadas como origen del tiempo y los tantos de las operaciones, siendo así que el vencimiento medio ha de ser independiente de la época y del tanto. La confusión proviene de considerar vencimiento medio siempre que el pago sustituto de todos sea igual a la suma de éstos, cosa que no es exclusivamente propia del vencimiento medio.

Ejemplo: Tres capitales cuyo importe respectivo es de 2900, 8700 y 4200 pesetas, tienen por plazos de su disponibilidad 70, 85 y 97 días y se desea sustituirlos por un sólo capital de 16000 pesetas calculando intereses al 5 % anual. Determinar el plazo de disponibilidad del último capital para año comercial.

En caso de que el interés sea anticipado nos valdremos de la fórmula [1], para cuya aplicación calcularemos el valor de las sigmas con la disposición práctica más adecuada, y tendremos

Ptas.	2900	durante	70	días.....	203000	producto.
»	8700	»	85	»	739500	»
»	4200	»	97	»	407400	»
ΣC_m =	15800				1349900	= $\Sigma C_m n_m$

de donde tenemos para valor del tiempo pedido

$$n = \frac{7200(16000 - 15800) + 1349900}{16000} = 174'37 <> 174 \text{ días.}$$

Para caso de interés vencido nos valdremos de la fórmula [2] en la que calcularemos los valores de los quebrados a sumar, teniendo:

Valor del primer quebrado.....	2900 : (7200 + 70)	= 0'39889959
» del segundo »	8700 : (7200 + 85)	= 1'19425473
» del tercer »	4200 : (7200 + 97)	= 0'57557900
» de la suma de quebrados.....		2'16871332

que nos dará para el tiempo buscado

$$n = 16000 : 2'16871332 - 7200 = 178 \text{ días.}$$

EJERCICIOS *números* **500** (1.º, 3.º y 4.º); **502; 503; 506** al **509; 513; 521; 525** y **CXXXV** al **CXLI.**

PROBLEMAS los ejercicios *números* **514; 518** al **520.**

299.—Descomposición, anticipos y prórrogas de pagos.—Con todas estas denominaciones y con la de liquidación de facturas se designan problemas sobre el interés que suelen tener aplicación práctica, y que no constituyen sino casos particulares ya de equivalencia de capitales ya de vencimiento común, pero siempre podemos decir que para que estos problemas tengan una solución matemática es indispensable que la incógnita sea una sola, ya un sólo capital o una sola fecha en que deba hacerse el pago, y siendo así, siempre quedará reducido a uno de los problemas anteriores, con

la advertencia de que el caso de vencimientos en que haya varios capitales, las sumas de ellos y de sus productos que intervienen en las fórmulas halladas, son sumas algebraicas que representan capitales con tiempos positivos y negativos.

EJERCICIOS *números* **486; 487; 492** al **494; 497** (1.°); **498; 511; 516** y **CXLII** al **CXLV.**

PROBLEMAS; los ejercicios *números* **510; 517.**

PROBLEMAS GENERALES; los ejercicios *números* **504; 505** y **CXLVI.**

300. Convenio de acreedores y pérdida que ocasiona. — Una de las aplicaciones de las cuestiones que acabamos de estudiar es la determinación del pago único a que equivalen otros varios que ha sido preciso efectuar en fechas distintas, y de todas las operaciones en que así se liquidan, revisten especial importancia las emisiones de valores mobiliarios y el convenio de acreedores de un quebrado o concursado. El primero de estos problemas ha de ser estudiado como parte de los mismos valores mobiliarios en la parte bursátil de esta obra a la que remitimos al lector, pero el segundo lo examinamos ahora.

Cuando se tramita el expediente de una quiebra se establecen negociaciones por el quebrado de una parte y los acreedores por la otra, con el fin de conseguir el primero un trato lo más benévolo posible por parte de los segundos y poder éstos a su vez conseguir mayor porción de sus respectivos créditos. A tal fin el quebrado pretende una reducción y aplazamiento en el total de sus deudas, para de esta forma evitar la liquidación de todos sus bienes y con ella la depreciación propia de todas las ventas apresuradas, consiguiendo también los acreedores mayor parte de la que les habría correspondido por la liquidación.

En el convenio se hace constar la *quita*, o sea la parte de los créditos perdonada al deudor, y la *espera* o plazo de demora para el pago, siendo casi siempre la quita un tanto por ciento y la espera un tiempo fraccionado en plazos.

Los cálculos que motiva el convenio en sí son todos de tantos por ciento (**6**) para determinar la parte que en cada plazo haya de cobrar cada acreedor, cuya facilidad evita nuevos

detalles; pero además origina el problema derivado del tanto real de pérdida motivado por la quita y espera.

El convenio, en la forma que tiene lugar, exige que los acreedores renuncien a los intereses de sus créditos durante la espera convenida además de renunciar a una parte de los mismos créditos representada por la quita, siendo por consiguiente dos los conceptos porque resultan perjudicados, uno el nominal de la quita, y otro el importe de esos intereses.

Se llama *tanto real de pérdida* causada por un convenio de acreedores el conjunto del tanto por ciento condonado por la quita y los intereses representados por la espera, y este tanto real corresponde al que resulta de considerar los pagos fijados en el convenio con el valor actual que les corresponde en el momento de dicho convenio, es decir, el valor que resulta de hacer que la fecha del convenio fuese el vencimiento común de todos los pagos parciales.

Resulta por consiguiente, que nos encontramos con la determinación de un capital (tanto por ciento pagado) equivalente en una fecha determinada a otros varios capitales pagaderos en fechas distintas, lo cual constituye un problema del vencimiento común **(297)**.

Considerando el descuento comercial por ser el que se emplea en la práctica, aunque también podríamos servirnos del descuento racional, si en la fórmula

$$C = \frac{D\Sigma C_m - \Sigma C_m n_m}{D - n}$$

hacemos que n sea cero porque la fecha del vencimiento coincida con el momento origen del tiempo, y consideramos que el tanto real de pérdida ha de ser lo que falte al valor hallado por esa fórmula para componer 100, que es el pago total de los créditos en el momento del convenio, llamando T_r a ese tanto real, ha de ser:

$$T_r = 100 - \frac{D\Sigma C_m - \Sigma C_m\, n_m}{D} = 100 \quad \left(\Sigma C_m - \frac{\Sigma C_m\, n_m}{D}\right)$$

expresión en que la diferencia representada por los dos primeros términos del último miembro es lo que hemos llamado pérdida nominal y el último término son los intereses de la espera, de acuerdo con lo que antes dejamos dicho.

Ejemplo: Calcular el tanto real de pérdida sufrida por los acreedores de un quebrado, que han convenido con éste en que les pagará el importe de sus respectivos créditos en la forma siguiente: 5 °/₀ al contado; 20 °/₀ a los cuatro meses; 15 °/₀ a los 6 meses; 15 °/₀ a los 9 meses, y 10 °/₀ a los 11 meses; siendo el tipo de interés corriente en el mercado el de 6 °/₀ anual.

Los valores que hemos de emplear para los cálculos son:

$$C_1 = 5; \quad C_2 = 20; \quad C_3 = 15; \quad C_4 = 15; \quad C_5 = 10; \quad D = 200$$
$$n_1 = 0; \quad n_2 = 4; \quad n_3 = 6; \quad n_4 = 9; \quad n_5 = 11;$$

con lo cual resulta

5 °/₀	al contado.....	época
20 °/₀	a los 4 meses.....	$20 \times 4 = 80$
15 °/₀	a los 6 meses	$15 \times 6 = 90$
15 °/₀	a los 9 meses..	$15 \times 9 = 135$
10 °/₀	a los 11 meses... ..	$10 \times 11 = 110$
$\Sigma C_m = 65$		$\Sigma C_m n_m = 415$

y el tanto de pérdida real ya obtenido es

$$T_r = 100 - 65 + \frac{415}{200} = 100 - 62'925 = 37'075\ \%.$$

EJERCICIOS *números* **1342** al **1344.**



XXVIII

GRÁFICOS DE INTERÉS Y DESCUENTO

301.- Línea de la función del interés simple.—Si en la fórmula fundamental del interés (**204**) consideramos que sean constantes el capital y el tanto nos hallaremos con una función de la forma

$$y = ax$$

en la que la constante a es el producto de capital y tanto, y la variable x el valor del tiempo que sucesivamente nos dará los valores de y como interés. Pero ya sabemos (**67**) que esta función queda representada por una recta, y como además en el caso en que el valor de x sea cero también lo será el de y, dicha recta representativa del interés pasa por el origen de las coordenadas cartesianas, luego bastará que determinemos un punto cualquiera de valor del interés para que tengamos la recta de la función.

En la práctica, para facilitar la construcción se acostumbra a considerar un capital de 100 unidades monetarias, porque entonces el producto del capital por el tanto por uno resulta el tanto por 100.

Para la representación del interés simple en la forma más común de calcularle, o sea considerando el año comercial, es lo más conveniente servirse de las coordenadas polares, porque entonces se tiene un grado por cada día del tiempo, y como entonces el polo corresponderá al punto cero del tiempo y del interés, es decir que la línea pasa por el polo, la línea cero de estas coordenadas ha de corresponder también con el cero, sin que existan valores negativos, ya que

los que de tal clase puede tener el interés se determinan por las condiciones del problema, sin que hagan variar el valor absoluto que señalaría el gráfico.

En tales condiciones, la representación del interés en coordenadas cartesianas se consigue dando al eje de las y los valores del interés según los que tiene el tiempo en el eje de las x, como puede verse para cualquiera de las líneas de la fig. 47, y para trazar cualquiera de ellas basta conocer el valor que toma el interés para un punto distinto de cero.

En coordenadas polares es indispensable determinar todos o la mayoría de los puntos de la línea, porque siendo curva no bastan dos como antes, y en tal caso siendo el coeficiente angular el valor del tiempo, sería el interés la medida del radio vector. Para el tanto 6 $^{0}/_{0}$ obtendríamos la línea de la fig. 48.

Si consideramos dos variables en la fórmula fundamental del interés (**204**), deberemos tomar cada una de ellas en uno de los ejes de coordenadas y como la combinación de los diferentes valores de las dos variables independientes nos dará múltiples valores para la variable dependiente, tendremos que construir diversas líneas para esta tercera variable, formando un monograma (**73**) de tres ejes para cada uno de los valores que pudiera tomar ese elemento tercero del interés. Por ejemplo, en el caso en que se haga constante el tanto, tomaremos uno de los ejes para la variable del tiempo y el otro para la variable del capital y así trazaríamos una curva para cada uno de los diferentes valores que puede alcanzar el interés en la forma que aparece en la fig. 49, que constituye el nomograma de interés para el 5 $^{0}/_{0}$ y que ha sido construído determinando puntos diversos del interés que corresponde a combinaciones del capital y del tiempo, y uniendo por medio de curvas todos aquellos puntos en que el valor del interés es el mismo, y así resultan las curvas para el valor de 1, 5, 10, 20 y 30 unidades monetarias de valor del interés, pudiendo apreciar entonces que la línea de éste es curva con todos los inconvenientes que tiene el trazado de esta clase de líneas, que siempre necesitan determinar muchos puntos si es que se quiere eliminar errores de trazado que junto a los propios del gráfico le hicieran inútil.

Para eliminar el inconveniente de las curvas, podemos em-

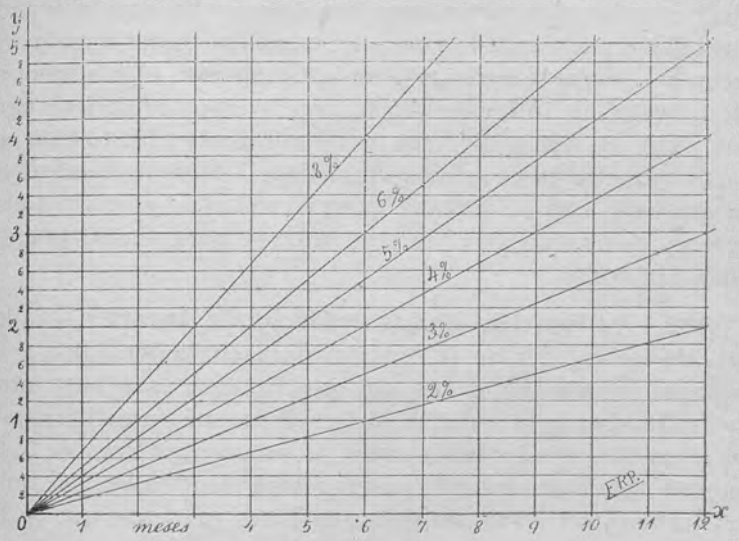


Fig. 47. Diagrama cartesiano de interés.

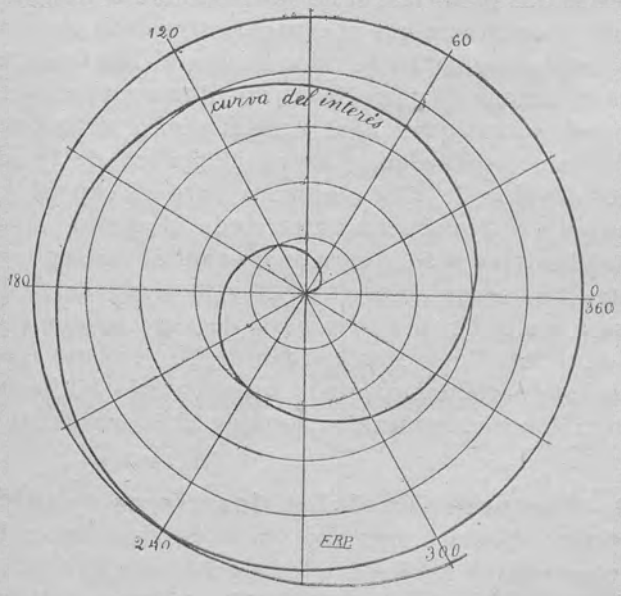


Fig. 48. Diagrama polar de interés.

plear coordenadas cartesianas ortogonales de escala logarítmica (**71**) con lo cual la curva de interés se transforma en una recta, según puede apreciarse en la fig. 50 para el mismo ejemplo anterior, de intereses al 5 % con diversos capitales y tiempos y con las líneas diversas de interés desde 1 hasta 1000 unidades monetarias de interés simple, bastando por consiguiente en este caso que se hayan determinado dos puntos cualesquiera que produzcan el mismo interés para que se tenga la línea funcional.

302. - Utilización de los gráficos de interés.—La lectura de los valores de la función para cualquier valor de la variable, lo mismo que los que pueda tener ésta para otros determinados de la función, se leerán por medio de las paralelas a los ejes, interpoladas entre las líneas auxiliares de lectura que hubiéramos trazado y en la forma idéntica a las de todos los gráficos (**69** y **74**), sin más que tener presente que en los ábacos de interés de dos variables, las paralelas que se tracen han de ser dos a la vez para un sólo valor de la función, una por cada variable en su eje respectivo, y en el punto de encuentro de estas dos paralelas, si no corresponde a ninguna línea funcional se considera que el espacio entre cada dos líneas es proporcional al aumento de valor de una a otra línea, y se dividirá la diferencia de valor de las dos líneas en proporción al espacio o distancia que a ellas tiene el punto encontrado por cruce de las dos paralelas, y así en el gráfico de la fig. 50 si tomamos el valor de 1700 unidades para el capital y el de 100 días para el tiempo, encontraremos el punto *I* que representa el interés al 5 % para dicho capital y tiempo, y como está entre las líneas de interés de 20 y 30 unidades, la diferencia 10 será multiplicada por la parte de espacio que va de la menor de dichas líneas hasta el punto *I*, y como apreciaremos que esta parte de espacio es un poco más del 1/3 del total así el interés buscado también sería de 23'60 unidades monetarias.

303.—Comparación de las dos clases de interés o descuento.—Bastará para ello trazar las dos líneas funcionales en un mismo gráfico empleando a la vez para este cálculo las fórmulas del párrafo **212** o **229** en interés anticipado y

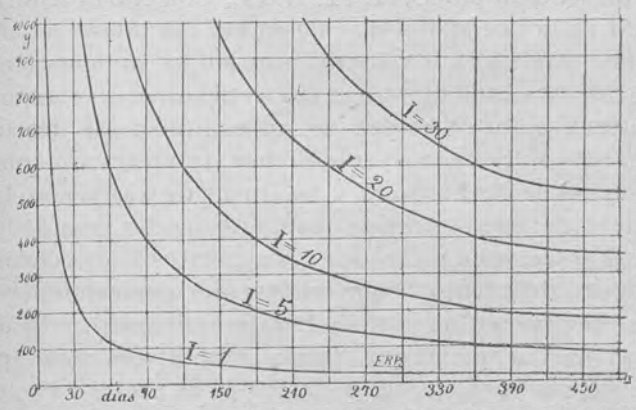


Fig. 49. Nomograma ordinario de interés.

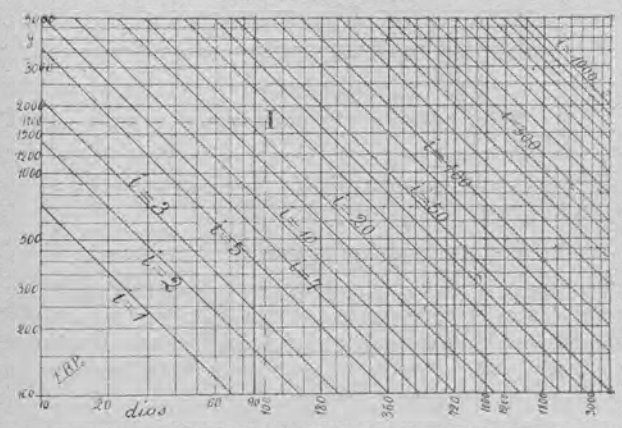


Fig. 50. Nomograma logarítmico de interés.

las del párrafo **222** o **224** para interés vencido, o bien las que se indican en el párrafo **234** para cada clase de descuento y poniendo en las que se utilicen el mismo valor al capital, ya esté representado por *C*, *M*, *M'*, *N* o *E*. Con ello obtendríamos la fig. 51 en la que aparecen calculados los intereses anuales de varios capitales a los tantos que allí se indican, teniendo tres líneas para cada tanto que respectivamente corresponden, la continua a los intereses de un capital o los descuentos cuando sólo se tiene en cuenta dichos intereses sin comparación con los de otra especie, y las líneas de trazos son: la inferior intereses vencidos o descuentos racionales cuando la continua sea intereses anticipados o descuentos comerciales, y la superior los descuentos comerciales que corresponderían al caso en que la continua sea la de interés vencido, y en ambos casos se puede apreciar que el valor absoluto es mayor para el descuento que para el interés.

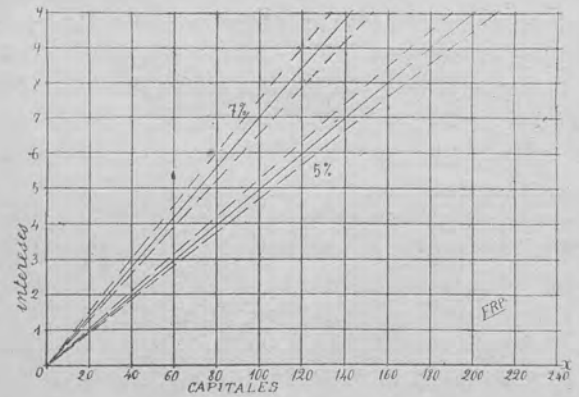


Fig. 51. Comparación gráfica de interés y descuento.

Desde luego que la lectura, interpolación, y construcción de las demás clases de gráficos es lo mismo para una que para otra clase de interés, como lo sería para los valores anticipados y acumulados, por lo que no damos más ejemplos, pudiendo el lector resolver cuantos ejercicios sobre interés indicamos en los capítulos anteriores.

EJERCICIOS. Pueden utilizarse los señalados para resolución numérica.

XXIX

CRÉDITO

304.—Concepto del crédito.—La palabra *crédito* es equivalente a confianza y así en las operaciones mercantiles se comprende con esa denominación todas aquellas que representan una demora en el pago de una obligación, es decir, que el crédito constituye el elemento de la circulación de la riqueza que sustituye a la moneda y sirve de expresión de la diferente disponibilidad de los capitales.

En el crédito han de intervenir dos personas: el *acreditado* o concesionario del crédito, que debiera ser el pagador y que por virtud del crédito aplaza el pago; y el *acreedor* o cedente del crédito, que habría de cobrar si ese pago no se prorrogase. Además de esas dos personas principales pueden intervenir otras que iremos dando a conocer a medida que se estudien las operaciones donde intervienen.

305.—Clases de crédito. Son muy diversas las clasificaciones que pueden hacerse del crédito, según el punto de vista desde que se le considere; pero teniendo en cuenta el objeto de nuestro trabajo, la clasificación queda indicada en el cuadro siguiente:

Clases de crédito

- Por la naturaleza de la riqueza cuya disponibilidad se altera por el crédito
  - Monetario.
  - De cambio.
  - De servicios.
- Por el vencimiento
  - A término
    - A corto plazo
    - A largo plazo
      - Definido.
      - Indefinido.
  - Sin plazo
    - Denunciable.
    - No denunciable.
- Por las personas
  - Privado.
  - Público.
- Por la garantía
  - Personal.
  - Real
    - Mobiliario.
    - Inmobiliario.

El crédito se denomina *monetario* cuando consiste no en la demora de pago propiamente dicha, sino en la cesión de un capital en dinero; es *de cambio* si la cesión es de una riqueza de naturaleza no monetaria, y se llama crédito *de servicios* el que prorroga la disponibilidad de la remuneración de servicios. De estas clases, la primera determina el comercio bancario y la segunda da vida a la industria y el comercio en conjunto con la primera.

Crédito *a término* es aquél en que se fija la fecha en que ha de realizarse el cumplimiento de la operación, fecha que se denomina *vencimiento*, y la distinción en corto o largo depende del tiempo que transcurre desde el momento de la concesión del crédito. El crédito a largo plazo es *definido* si la fecha de cumplimiento queda precisamente determinada en el mismo momento de la concesión, y es *indefinido* si sólo se determina el límite dentro del cual haya de quedar cumplida la obligación, como sucede con las emisiones de obligaciones, que dentro de cierto tiempo han de ser reembolsadas, sin que lo sean todas en la misma fecha ni se conozca la de cada una.

Es *privado* el crédito que se hace en beneficio de particulares o sociedades privadas, y es *público* aquel cuyos beneficiarios sean el Estado, la Provincia o el Municipio, como entidades públicas.

La garantía es la clase de confianza en que se fundamenta el crédito; siendo *personal* cuando esa confianza es moral e inseparable de la persona que se beneficia del crédito y constituída por sus cualidades personales, su honradez y trabajo; y es real con la confianza material dependiente de los medios de que dispone para cumplir con la obligación prorrogada, e integrada por el valor de sus bienes en total o de algunos de ellos especialmente.

306.—Representación del crédito.—La existencia del crédito puede hacerse constar en documentos en los que intervenga cuando menos el beneficiario del crédito o bien quedar sin documento especial que le represente.

En este último caso la forma mercantil de representar la existencia del crédito es el hacerle constar en los libros de Contabilidad de la casa que le concede, y aunque puede probarse la existencia por documentos, éstos no son especiales, sino que representan las operaciones que dieron nacimiento al crédito y por incidencia prueban el mismo.

Cuando el crédito se hace constar en documentos especiales entonces la variedad de éstos nos permite la formación del cuadro de la página siguiente en que á la vez se aprecia a qué clasificación y grupo de los ya conocidos representa cada documento.

Clasificación de los Títulos de Crédito

- **Por el objeto de la prestación que representan**
  - Promesa de pagar una *suma de dinero*. Se subclasifican según la *persona* que los emite en:
    - *Efectos públicos*, que proceden del uso del crédito público y producen intereses hasta que llega la devolución y son negociables en Bolsa
      - Títulos de la Deuda
        - Del Estado.
        - De la Provincia.
        - Del Municipio.
      - Bonos del Tesoro.
    - *Efectos mercantiles*, que proceden del uso del crédito privado por una persona individual o social distinta de las anteriores...
      - Billete de Banco.—Carácter monetario.
      - Letra de cambio.....
      - Vale o Pagaré.....
      - Carta-orden de crédito.
      - Cheque.....
      - Abonaré .....
      - (Documentos de giro.)
  - Promesa de prestar un *servicio* valuado en dinero..
    - Billetes de transportes personales.....
      - Por tierra.
      - Por agua.
      - Por el aire.
  - Prestación de *dar* una *cosa* distinta del dinero.....
    - Cartas de porte.
    - Conocimientos.
    - Warrants.
    - Resguardos de pignoraciones.....
      - en crédito.
      - en préstamo.
    - Pólizas de préstamos a la gruesa.
    - Facturas de mercancías.
  - Crédito unido a facultades especiales.....
    - Acciones.
    - Obligaciones.
- **Por la forma de emisión.**
  - *Nominativos* o que llevan el nombre del acreedor a quien debe pagarse.....
    - *Simples* o no endosables, que sólo pueden transmitirse con *conocimiento del deudor*, respondiendo el cedente de la legitimidad del crédito y de su propia personalidad, pero no de la solvencia del deudor.
    - *A la orden*, que son transmisibles por *endoso*, respondiendo el endosante, no sólo de la legitimidad del crédito, sino también de la solvencia del deudor.
  - *Al portador*, que se pagan al poseedor de ellos, cualquiera que sea éste, transmitiéndose por la simple tradición manual y no estando sujetos a reivindicación si han sido intervenidos por agente o corredor colegiado.
- **Por la fecha del vencimiento.....**
  - A plazo fijo.....
    - Desde la fecha.
    - Desde la vista.
  - A la vista (pagaderos a la presentación).
  - Sin vencimiento determinado.

XXX

EFECTOS DE COMERCIO

307.—Definición.—En el cuadro sinóptico de los documentos representativos del crédito aparecen los *efectos mercantiles*, también denominados *documentos de giro* por la operación o acto que origina estos documentos, y a ellos nos referimos ahora, como instrumentos del crédito que han de estar extendidos en forma legal, y que constituyen promesas o mandatos de pago, y algunas veces reconocimiento de la existencia del crédito.

La enumeración de estos efectos aparece ya en el cuadro antes referido y de acuerdo con ella procederemos a dar las ideas indispensables a la comprensión de los cálculos a que dan origen las operaciones verificadas con los mismos.

308.—Letra de cambio.—La letra de cambio es un documento privado en el cual una persona manda a otra que pague cierta cantidad a su orden o a la de un tercero, indicando fecha, lugar del pago y monedas en que se ha de pagar.

La letra de cambio es la más importante de todos los documentos de crédito y a ella se refieren casi todas las disposiciones legislativas concernientes a las operaciones llamadas de cambio y giro. Sólo por complemento a esas disposiciones aparecen aquellas relativas a los demás documentos, y hasta para evitar los conflictos de leyes que nacen de la internacionalización de la letra de cambio han sido diversas las asambleas organizadas y los proyectos en ellas presentados para conseguir la unificación de todas las legislaciones, sin que hasta ahora se haya podido llegar a un acuerdo. Estas tentativas y

la estructura misma de las disposiciones de las leyes sobre el cambio y sus documentos, en la forma que dejamos dicha, prueban la grandísima importancia de la letra de cambio; pero no nos es posible entrar en más detalles a este respecto que aquellos estrictamente indispensables para comprender las operaciones de cálculo sobre estos documentos, remitiendo al lector a las obras de Derecho Mercantil para apreciar las letras que tienen valor real y aquellas otras que carecen de él por no cumplir los requisitos legales exigidos, sin los cuales la letra de cambio es un documento equivalente a un recibo simple.

309.– Forma de la letra de cambio. – Es indudable que la orden de pago que representa la letra ha de ser escrita, como su mismo nombre lo indica (del italiano *lettera* carta), siendo el modelo español el siguiente:

Núm.

..... de ..... de 19.. .

Por ..... (1) ....

A.....(2)....., se servirá Ud. pagar por esta.. .....(3) ..... de cambio, no habiéndolo hecho por la .....(3) ..... a la orden de..... (4) ..... la cantidad de ..... (5) ..... valor ..... (6) ..... que sentará Ud. en ..... (6) ..... según aviso de .....

TIMBRE

..... (7) .....

A .....

..... (8).....

.....

En el modelo anterior se han de llenar los huecos en cada caso particular y con arreglo a las disposiciones que señalan las circunstancias que ha de contener la letra como sigue:

(1) Cantidad en guarismo y moneda a que se refiere la orden de pago.

(2) Plazo a que debe ser pagada la letra.

(3) Expresión del número de ejemplares, que se extienden de una letra, con indicación del orden que corresponde a cada uno, o la de que no hay más que un ejemplar

(4) Nombre de la persona a cuyo favor se ordena el pago.

(5) Cantidad en letra y moneda del pago.

(6) Concepto de las operaciones que dieron origen a la creación de la letra.

(7) Firma de la persona que extiende la letra.

(8) Nombre, domicilio y lugar de residencia del pagador.

De todas estas circunstancias hemos de dar los suficientes detalles en el estudio que sigue.

310. - Personas que intervienen en la letra. — En el momento de creación de la letra, puede apreciarse por la definición, que intervienen dos o tres personas, pero siempre tres personalidades, las que reciben los nombres de librador, librado y tomador.

El *librador* es la persona que extiende la letra y ordena el pago.

El *librado* es aquel que ha de pagar la letra.

El *tomador* es la persona a cuyo favor se extiende la letra, pudiendo ser el mismo librador u otra persona, y de esta dualidad nace la existencia de tres personalidades siendo sólo dos las personas que intervienen.

Puede también suceder que el librador y librado sean la misma persona, o bien que haya alguna más de las indicadas como garantes del pago, sustitutos del librado u otra cualquiera circunstancia, pero siempre resultarán como importantes las tres personalidades que antes hemos enumerado.

El tomador de la letra, pasado el momento de la creación y siendo ya el propietario de la misma se denomina *tenedor*, y si no se ha suprimido la cláusula «a la orden» el tenedor de la letra puede ceder su propiedad a otra persona por medio del *endoso*.

311. — Plazo de las letras. — En la clasificación de los efectos ya se indicó algo respecto a las fechas en que éstos se habían de pagar, y de acuerdo con lo que allí se decía las letras pueden extenderse a plazos diversos que son:

A la vista, que quiere decir que ha de pagarse la letra en el momento en que se presente al pagador.

A un plazo vista, que ha de ser cuando transcurra el tiempo que en la letra se señala, contando desde el momento en que se presenta al librado. Como requisito que prueba la presentación de la letra se estampa en ella la *aceptación*, que es el compromiso al pago adquirido expresamente por el librado y cuya fecha sirve de punto de partida para contar el plazo vista.

Cuando se trata de calcular los días que faltan para el vencimiento de una letra que esté extendida a la vista o a un plazo contado desde la vista, claro está que no puede determinarse ese número de días de una manera absolutamente exacta, porque se desconoce la verdadera fecha en que se presentará la letra; pero es aproximación bastante en la práctica para todas las operaciones en que han de intervenir esos días, considerar el plazo vista aumentado de las fechas que tarda el correo, de la plaza en que se hace el cálculo del tiempo a aquella en que ha de pagarse la letra, añadiendo además un día que se pierde para la anotación por parte del tenedor de la letra, y si hay días de gracia para la aceptación se añadirán también esos días. Así por ejemplo, una letra girada en Sevilla a 15 días vista sobre Barcelona se calculará en esta plaza que faltan para que venza la letra los 15 días del plazo, más tres fechas de correo de Sevilla a Barcelona, un día por pérdida en las anotaciones y otro día que puede perderse al recoger la aceptación, por la facultad de poderse aceptar las letras hasta antes de la puesta del sol del día siguiente a la presentación (*); total 19 días, o 20 si se tiene en cuenta éste de gracia.

A un día fijo, cuya fecha es la que corresponde para el pago.

A un plazo fecha, cuyo vencimiento corresponde al día en que se cumpla el plazo señalado a partir de la fecha en que se extendió la letra.

A la mitad de un mes, término muy poco usado y al que corresponde un vencimiento en el día 15 del mes que se fije.

Al final de un mes, plazo igual al anterior y que corresponde al último día del mes de que se trate.

A uno o más usos, siendo cada uso de 30, 60 o 90 días fecha según las plazas, pero que ya no se emplea.

A una feria, que es término también anticuado.

Sin fijar el plazo. Cuando en una letra no se fija el plazo deberá entenderse que es pagadera a vista, si bien sólo en los países en los que la legislación permita girar en esta forma,

(*) Téngase en cuenta que este día puede perderse, y en realidad se pierde por plazo para el protesto, cuando no se acepta la letra en el instante de presentarla en el domicilio del pago por no hallarse en él el librado.

pues en la ley española donde es riquisito indispensable el determinar el plazo, estas letras pierden su carácter de efectos mercantiles.

Cuando a una letra le corresponda vencimiento en día festivo deberá ser pagada en el día hábil inmediatamente anterior, sin que ésto exija cambio alguno en el cálculo, porque de existir días de gracia no entra a contarse el festivo o festivos que en ese plazo de gracia se pudieran incluir.

312.—Lugar del pago.—La indicación del lugar del pago es la segunda en importancia para los efectos del cálculo, tanto por lo que se refiere a la determinación del plazo vista, según hemos dicho, cuanto porque el diferente lugar hace variar considerablemente la base del cálculo del descuento de estos efectos.

Aunque en la letra se indica el lugar en que reside el librado, no siempre es ese lugar el del pago, y mucho menos el domicilio, pues las letras pueden girarse, y en efecto se giran, en la forma llamada de *domiciliación* y que consiste en designar para el pago otro domicilio diferente que el del pagador por medio de la fórmula. *Pagadera en el domicilio de Fulano de Tal en tal parte*, siendo entonces el lugar y domicilio del pago el que así se indica.

313. - Moneda del pago. – La cantidad a que se refiere el pago ha de hacer referencia a la moneda en que habrá de hacerse dicho pago, circunstancia extraordinariamente importante, pues de ella depende en primer lugar el valor del crédito que representa la letra.

Las letras pueden extenderse en cualquier clase de monedas, lo mismo nacionales que extranjeras, efectivas o imaginarias, del país del pago o del que ordena el pago, y si esas monedas fuesen imaginarias o anticuadas y no se encontrasen en la circulación, el pago se hará en las monedas equivalentes que se encuentren en la circulación. Hay que aclarar que no pueden considerarse como imaginarias las monedas extranjeras con relación al lugar del pago, siempre que en el país donde son nacionales esas monedas tengan circulación. Según ésto será imaginaria en España el ducado, pero no lo será el soberano inglés.

Las letras que están extendidas en moneda diferente de la que circula en el lugar del pago, es decir en moneda extranjera para dicho lugar, exijen diferente pago según las indicaciones que lleve la misma letra o no lleve ninguna.

1.° *Efectos en moneda extranjera sin indicación especial.*—Tratándose de una moneda efectiva debiera pagarse en las que se indica en la letra y así en efecto se hará siempre que una cualquiera de las partes (librado y tenedor) no quiera hacer modificación; pero la práctica generalmente seguida es que se paguen estas letras en moneda nacional al cambio que el dia del pago rige en la plaza del pago sobre el país donde es nacional la moneda de la letra.

2.° *Moneda extranjera efectiva.*—En este caso es indispensable el pago en la moneda que se expresa, o en cheque de de ella, sin reducción a las equivalentes nacionales.

3.° *Moneda extranjera oro.*—Esta cláusula es idéntica a la anterior y debe hacerse el pago en las monedas de oro que se indica; pero en la práctica también se admite el pago en monedas corrientes nacionales equivalentes en valor intrínseco a las de oro que se expresa en el efecto, calculada esta equivalencia en la forma ya conocida de nuestros lectores (**172**), y teniendo en cuenta el diferente valor que pueda tener el oro, como veremos en el comercio especial de metales preciosos.

4.° *Moneda extranjera al cambio de vista.*—Es la expresión de la costumbre práctica de pagar las letras del grupo 1.°.

5.° *Moneda extranjera a cambio fijo.*—Es de la misma significación que el anterior, pero debiendo hallarse la equivalencia en monedas nacionales al cambio que se fija.

6.° *Pago por cheque.*—Algunas veces se pagan las letras que no lleven indicación especial o las que digan que se pagarán con cheque, entregando este documento pagadero en la capital del país en que es nacional la moneda del pago.

314. Circunstancias especiales de la letra. Además de la domiciliación de que ya hemos hablado (**312**), puede hallarse modificada la situación ordinaria de la letra por algunas circunstancias que, sin cambiar esencialmente los cálculos a que dan origen, hacen variar el precio que sirve de base a las transmisiones del valor de las letras, como son las siguientes:

Valor al cobro, que puesto en un endoso no transmite la propiedad de la letra, dejando reducida esa transmisión a una comisión de cobro.

Valor en garantía, que indica que la operación que da origen a la letra es

un préstamo que garantiza la misma letra y que la hace intranmisible sin conocimiento del librado; término casi nunca empleado.

No a la orden, cuya circunstancia impide el endoso.

Sin garantía, que modifica el valor de la letra, porque siendo ésta de naturaleza responsable ilimitada para todos los que en ella intervienen, quien hace constar esta circunstancia no responde a los sucesivos poseedores.

Letra indicada, es aquella que con la forma «en caso necesario a N. N.» señala una persona que se convertirá en librado si el que lo es de la letra no la aceptase o pagase.

Letra avalada, es la que con la forma «por aval» y la firma de la persona que avala, garantiza el valor de la letra por cualquiera de las personas que en ella intervienen.

Duplicados y copias. Cuando se extienden varios ejemplares de las letras se hace para prevenir el extravío o para remitir un ejemplar a la aceptación, si está la letra girada a plazo vista largo, y disponer de otro ejemplar para transmitir la propiedad, haciendo constar en éste dónde se halla el ejemplar aceptado. Puede sustituirse este ejemplar circulante por una copia simple de la letra, y con los dos ejemplares juntos se reclama el pago.

315. —Protesto y cláusula «sin gastos».— El protesto es el acta notarial en que se hace constar la falta de aceptación o de pago de una letra. El protesto por falta de aceptación sustituye en todo a ésta, incluso para contar el plazo del vencimiento, y uno y otro protesto constituyen el único medio legal de conservar el tenedor de una letra los derechos que respecto de ella tiene en relación con esa responsabilidad ilimitada de las personas que en ella intervinieron.

Es costumbre muy generalizada en la práctica mercantil hacer constar en las letras la cláusula *sin gastos* por el librador o uno cualquiera de los tenedores sucesivos, como indicadora de que no se proteste la letra si no es aceptada o pagada; pero esta cláusula es contraria a las disposiciones legales y hace que las letras que la contienen pierdan lo que después llamaremos facultad de descuento y las deja reducidas a ser admitidas por los Bancos con restricciones que aumenten el descuento de las mismas.

Cuando una letra no se acepta o paga, al suceder esta última circunstancia el tenedor de la letra puede ejercer acción de resarcimiento de principal y gastos sobre cualquiera de los anteriores tenedores o del librado, pero en la práctica se devuelve dicha letra al tenedor anterior hasta llegar al librador, acompañando a la letra la *cuenta de resaca* si la letra se pro-

testó, y solamente una *nota de gastos* si la letra llevaba la indicación *sin gastos* y no hubo protesto, pues hay que advertir que a pesar de llevar esa indicación es potestativo en el tenedor el protestarla, ya que según la ley hay que considerar como no escrita la cláusula en cuestión.

316.—Cheque.—El cheque es un mandato de pago semejante a la letra, de la que se diferencia en que sólo ha de girarse para retirar fondos que anteriormente estuviesen en poder del librado.

Puede el cheque ser al portador, nominativo o a la orden, y en este último caso se podrá transmitir por endoso.

El plazo de vencimiento del cheque es sólo a la vista, determinando las leyes los días que han de transcurrir desde la fecha del cheque hasta el día de la presentación como máximo, pero muchas veces son menores que los del correo de plaza libradora a plaza librada y entonces es indispensable interpretar la ley como autorizando el mayor plazo, además que en la práctica se pagan los cheques aun cuando hubiese transcurrido dicho término, siempre que aún existan fondos del librador en poder del librado.

De igual modo que la letra, puede y debe protestarse el cheque que no sea pagado a su presentación.

En todas las demás circunstancias el cheque es semejante a la letra de cambio, presentando como característica el llamado *cruzamiento del cheque* y que consiste en atravesarle por dos barras paralelas entre las cuales se escribe el nombre de la persona a cuyo favor queda así extendido, o solamente las palabras «y Comp.» según sea el cruzamiento especial o general. Por el cruzamiento, el cheque ha de ser pagado a un banquero y en cuanto al cálculo tiene la especialidad del diferente timbre que necesita con relación a los demás cheques.

317.—Pagaré.—El pagaré es una promesa de pago; y bajo el punto de vista que nos interesa podemos decir que es una letra en la que el librador y librado son la misma persona y que sólo puede extenderse a un plazo contado desde la fecha o a día determinado.

318.—Talón.—Con este nombre se conoce una modalidad

del cheque al portador y que se utiliza para retirar fondos de los Bancos en la misma plaza en que se gira.

319.—Carta-orden de crédito.—Este es un documento que constituye una orden de pago que sólo puede extenderse a favor de persona determinada, siendo intransmisible por consiguiente, y teniendo como cantidad a pagar solamente un límite máximo.

Presenta la particularidad este documento de poder ser colectivo, por ir dirigida la orden de pago a varios a la vez, denominándose en tal caso *circular*.

También es indefinido el plazo de las cartas órdenes, pues sólo se determina el límite dentro del cual podrá hacerse uso de la misma por el beneficiario, y en cualquier cantidad porque se utilice exige que se extienda un recibo como justificante del pago y se anote en la carta-orden la cantidad cobrada para conocer en cualquier momento el importe exigible.

320.—Abonaré.—Es el documento en que se hace constar que ha sido anotada en una cuenta, y en el haber de la misma, cierta cantidad, debiendo expresar el nombre del titular de la cuenta o beneficiario del abono en ella.

Cuando la anotación en cuenta se hace por cambio de la cantidad que constaba en cuenta de otro titular, se dice que el abonaré corresponde a una *transferencia*

321.—Warrant.—El warrant es un resguardo de depósito de mercancías en almacenes llamados generales de depósito y que por constar de dos partes semejantes puede servir de garantía a un crédito o préstamo. Por esta circunstancia puede incluirse entre los efectos de comercio aunque no aparezca así en nuestro cuadro de clasificación.

322.—Timbre de los efectos—Los efectos de comercio, como riqueza circulante están sujetos al impuesto del timbre, con diferentes tarifas según la clase del efecto, las cuales se detallan en la tabla **XXXVII**.

EJERCICIOS *números* **530** al **535.**

XXXI

OPERACIONES DE BANCA

323.—Definición de los Bancos.—Es difícil hallar una definición que comprenda todas las operaciones de banca y sea lo bastante precisa para que satisfaga al espíritu de los Bancos, por las múltiples y variadas operaciones, tan variadas como las manifestaciones de la vida económica moderna.

Definiendo el Banco como la clase de comercio especial del dinero dejan de comprenderse en ella todas las operaciones en que sólo interviene el crédito, y definiéndolos como los establecimientos que se encargan de concentrar y regular las operaciones de crédito faltaría en lo que comprende la definición las operaciones de compraventa de metales preciosos y monedas; luego es indudable que a la vez que el comercio del dinero ejercen los Bancos el comercio de los títulos de crédito, y hasta de ciertas manifestaciones especiales de crédito, cuales las de depósitos de valores.

324.—División de los Bancos.—No hay ninguna división absoluta porque tampoco existe ningún Banco que se limite a efectuar las operaciones propias de su tipo, y así vemos que los Bancos de crédito territorial, por ejemplo, además de las operaciones propias de préstamo con la garantía de fincas, realizan operaciones de descuento, de compraventa de monedas y valores y otras que corresponden a los Bancos de crédito ordinario, y que son las que más principalmente deben ser objeto de nuestro estudio.

Teniendo en cuenta que más importante es para los efectos del cálculo el conocimiento de cuáles sean las operaciones

bancarias que efectúan toda clase de Bancos que el hacer una clasificación de estos establecimientos prescindimos de tal división ya que todas las que se hacen tienen por fundamentos las operaciones de crédito especiales, diferentes de las comerciales, y de las que por tanto no nos hemos de ocupar por ser operaciones a plazo largo y cuyo estudio matemático corresponde al Cálculo Financiero.

En nuestro estudio, por consiguiente, comprenderemos aquellas operaciones que son las de Bancos de depósito y descuento, llamados también Bancos de crédito ordinario, o de crédito simplemente, y designados como Bancos puros.

325.– Operaciones de los Bancos. Examinando las personas que hacen operaciones con los Bancos, inmediatamente aparecen dos grupos claramente definidos.

El primero de dichos grupos lo constituyen aquellos que conceden el crédito a los Bancos, los capitalistas que proveen de dinero a estos establecimientos, independiente del capital propio de los Bancos, y que permiten a éstos conceder a su vez crédito a otras personas y anticiparles valores, formando estas nuevas personalidades el segundo grupo de los que hablamos. El grupo de capitalistas entrega a los Bancos los capitales inactivos y los Bancos les entregan después a los comerciantes y productores para darles actividad, señalándose así el carácter de intermediarios que tienen los Bancos.

De esos dos grupos nacen también dos naturalezas para las operaciones de los Bancos, y así se clasifican en operaciones pasivas las del primero y operaciones activas las del segundo, hallándose todas comprendidas en el cuadro de clasificación general de la página siguiente.

326. Relación de las diferentes operaciones.—Por la clasificación de operaciones bancarias del cuadro de la página siguiente puede apreciarse que para el cálculo que pueden originar las hay idénticas en el activo y en el pasivo, por lo que se hace necesario adoptar otra división que permita el estudio de las operaciones matemáticas a que dan origen, relacionando las del activo con las equivalentes del pasivo y aún de las de varias clases de dicho cuadro.

Podríamos establecer la primera relación entre operaciones

Operaciones de los Bancos

- **Pasivas...**
  - PRINCIPALES
    - Directas o propias.
      - Depósitos de ahorro.
      - Depósitos en c/c bajo cualquier forma.
      - Servicio de caja por cuenta de terceros.
      - Emisiones de bonos con interés.
    - Indirectas o accidentales.....
      - Redescuentos.
      - Reports y Pignoraciones pasivas.
    - Intermedias o de relación.....
      - Aperturas de crédito en otros establecimientos.
      - Giros a cargo de corresponsales.
      - Aceptaciones por cuenta de terceros.
      - Diversas de correspondencia (cobro de efectos condicionales, cobros de intereses de depósitos, venta de valores por cuenta de terceros, transferencias, etc.)
  - ACCESORIAS.....
    - Depósitos de valores en custodia o en administración.
    - Efectos recibidos para su cobro.
    - Administraciones de valores u otros bienes de terceros.
    - Estudios y consultas por cuenta de terceros.
- **Activas...**
  - PRINCIPALES
    - Directas .....
      - Descuento de efectos de comercio.
      - Compraventas de monedas extranjeras (divisas). Arbitrajes.
      - Reports activos.
      - Anticipos con garantía de títulos.
      - Anticipos sobre warrants y sobre depósitos de mercancías.
      - Aperturas de créditos con o sin garantía real.
      - Participaciones en empresas.
    - Indirectas.....
      - Garantías concedidas.
      - Operaciones de comisión (ducroire).
    - Intermedias.....
      - Adquisición de títulos y valores por cuenta de terceros.
      - Pago de cupones de intereses y dividendos.
      - Efectos remitidos para cobro, y vencidos.
      - Transferencias.
  - ACCESORIAS .....
    - Remesa de efectos condicionales para ser cobrados por los corresponsales.
    - Depósitos en custodia fuera de las cajas del establecimiento.
    - Administraciones concedidas a corresponsales.

del activo y del pasivo para las de compras o ventas de valores en las Bolsas, que por ser objeto del cálculo bursátil reservamos para la parte correspondiente. Inmediatamente resalta la relación del resto de operaciones bursátiles que ejecutan los Bancos y éstas y las de pignoración deberán ser estudiadas con las que versan sobre los valores pignorados, por razones didácticas que exigen el conocimiento de dichos valores.

Pasando ahora a relacionar las operaciones exclusivamente bancarias, se harán agrupaciones nuevas, debiendo hacerse el estudio, primero de las operaciones de descuento de efectos con la indicación del redescuento; después el cobro de efectos de terceros que no tienen con la anterior otra diferencia que el momento en que necesita del cálculo, completando estas dos clases de operaciones con la situación especial de efectos impagados o protestados; más tarde la cesión de efectos a los clientes de los Bancos y que son los giros, que se completan con las transferencias, órdenes de entrega y apertura de créditos, todos casi idénticos como diferentes modalidades del movimiento de fondos.

Relacionadas íntimamente con las anteriores operaciones, que son todas en monedas nacionales, aparecen las de compraventa de monedas extranjeras con sus variedades de descuentos, ventas, giros y demás modalidades antes enumeradas, y teniendo también naturaleza de operaciones de pasivo y de activo.

Las operaciones activas y pasivas principales dan origen a multitud de anotaciones formando cuenta con esas terceras personas, tanto proveedores como clientes de los Bancos, y guardando por consiguiente relación con las operaciones antes estudiadas hemos de ocuparnos de esas cuentas.

Completarán estas relaciones las que tengan las operaciones accesorias de activo y de pasivo, que deberán estudiarse simultáneamente, como complementarias que son a su vez unas de otras, hasta el punto de que muchos depósitos dan origen simultáneo a operaciones tanto de pasivo como de activo.

XXXII

DESCUENTO BANCARIO

327.—Concepto. —El *descuento bancario* o *descuento de efectos de comercio* es la operación que consiste en anticipar el pago de dichos efectos, y como todos los no vencidos son riqueza no disponible, al hacerse el pago antes de su vencimiento deberá entregarse como valor en cambio una suma de dinero menor de la que consta escrita como nominal del efecto.

La diferencia entre la cantidad escrita en el efecto *(nominal)* y la que se entrega *(efectivo)* debe ser la disminución que hemos definido como descuento del capital (**201** y **230**). Además de esa rebaja en el valor del efecto, por razón del descuento que corresponde a su capital por la falta de disponibilidad, existen otros conceptos por los cuales también disminuye el efectivo del documento descontado por los Bancos, y que consisten en la remuneración de los gastos que para éstos representa el tener que encargarse del cobro de los efectos en el lugar y fecha de su vencimiento.

328.—Clases de efectos descontables.—Para proceder al estudio ordenado del descuento bancario es preciso que nos fijemos antes en la diferente consideración que tienen en los Bancos los efectos de comercio sobre que versa la operación, pues de esa diferente consideración dependen los elementos de cálculo con que hemos de determinar el valor efectivo de los documentos.

En primer lugar, interviene la seguridad de que al vencimiento haya de ser pagado el efecto, pues a una mayor o menor probabilidad de perder su importe, corresponderá también

una mayor o menor medida de la cantidad rebajada, junto con el descuento, por el riesgo de pérdida.

Según este aspecto de los efectos, podemos distinguir el papel de *complacencia*, que proviene de la simulación de débitos respectivos por dos o más personas, para obtener fondos de los Bancos por el descuento de los efectos necesarios para el cobro de los respectivos débitos; el papel *de crédito*, que consiste en letras que garantizan un préstamo concedido con la garantía de las firmas que en las letras aparecen; y el papel *comercial*, que proviene de operaciones reales de compraventa mercantil y para cobrar los débitos que éstas originan.

El papel comercial admite en la técnica bancaria otra división por razón de la importancia de las casas mercantiles que en él tienen intervención, y así es papel *ordinario* el que crea el pequeño comercio o la industria modesta; papel *de primer orden* el de los grandes establecimientos mercantiles o industriales; papel *de primísimo orden* el de cualquiera de las dos clases anteriores que además tenga el endoso de un Banco de notoria solvabilidad, y papel *de alta banca* el creado por los grandes establecimientos financieros para aprovechar circunstancias favorables del mercado del dinero en lo que los franceses llaman *marché hors-banque* ([a]).

El otro elemento que rebajaba el valor de los efectos descontados, dijimos era el gasto que para el Banco pueda representar el cobro de dichos efectos y que por consiguiente variará con los diferentes lugares de pago. Por este aspecto los efectos se denominan *negociables* si son pagaderos en la misma plaza, *bancables* ([b]) si lo son en plaza en que tenga sucursal el Banco nacional, y *desplazados* ([c]) si el lugar del pago es cualquiera en que no haya establecimiento del Banco nacional. En España se llaman efectos y plazas *semibancables* aquellas en que existe un Banco o banquero privado que esté inscrito en la Comisaría regia de la Banca privada, siendo por tanto efectos de clase intermedia entre los bancables y desplazados.

([a]) Estas son las *best bills* o *fine bank bills* de los ingleses.

([b]) También se llama papel *bancable* el que reune las condiciones de admisión a descuento en el Banco nacional, sobre cualquiera plaza o lugar del pago.

([c]) Suele conocerse más bien este papel como efectos *sobre pueblos*.

En el extranjero habrá que tener en cuenta para esta clasificación las plazas en que pueden cobrarse los efectos por medio de las Administraciones de Correos, si bien sólo para los efectos condicionales.

329. Tanto de descuento bancario.—Siendo la operación de descuento de efectos una venta de crédito y su precio el tanto de descuento (**201**), claro está que éste, como todos los precios de mercado, puede variar al infinito, pero el desarrollo y difusión de la Banca ha regularizado de tal modo este precio, que sólo aparecen dos tipos en cada mercado.

El tipo de tanto de descuento más generalizado es el *tipo oficial* que corresponde a las operaciones del Banco nacional, y que en la mayoría de los Estados se fija con intervención del Gobierno, como sucede en España según precepto de la Ley de Ordenación Bancaria; y el otro tipo de descuento es el que corresponde a la Alta Banca para las operaciones de descuento entre ella, en la clase de papel especial de que antes hemos hablado. Este segundo tipo de descuento existe únicamente en los países de crédito muy desarrollado y se designa con el nombre de *tipo libre* o *privado*. Es casi siempre más bajo que el tanto oficial, y por la mayor libertad de su mercado preceden sus oscilaciones a las del tanto oficial.

Correspondiendo al tanto oficial se gradua el tanto de descuento para las operaciones de la Banca privada sobre efectos comerciales, y además existe el *tanto de favor* por parte del Banco nacional, que en España es de 1 % para la Banca inscrita en la Comisaría de la Banca Privada y Sociedades agrícolas que gocen de los beneficios de la Ley de Sindicatos. Este favor se reduce cuando el tanto oficial es menor del 5 % de modo que represente la quinta parte de dicho tipo oficial. El tanto de la Banca privada para los demás efectos casi siempre excede en 1 % al tanto oficial.

330.—Costo del descuento.—El tanto de descuento bancario como precio de venta de capitales por parte de los Bancos está sujeto a un mínimo determinado por el costo del descuento, que se halla formado por diversos elementos, como los intereses que el Banco paga por los capitales que tiene en depósito, el riesgo de no cobrar los anticipos hechos, el riesgo de que los depositantes reclamen sus depósitos por cantidades mayores que sus disponibilidades y el coeficiente de gas-

tos generales de la administración del Banco que correspondan a esta especie de operaciones.

Para calcular el interés que corresponde a los depósitos hay que atender al tanto que se paga a los depositantes y a la relación entre el total de sumas en depósito y la cantidad de que se puede disponer para operaciones activas.

Si, por ejemplo, un Banco puede emplear en operaciones activas el 60 % de los depósitos a la vista sin que corra el riesgo de desatender las peticiones de los depositantes en tiempos normales, y abona el 2 % de interés anual, este elemento del costo del descuento sería:

$$\frac{100 \times 2}{60} = 3\ ^1/_3\ \%$$

y como a medida que el empleo de sumas de depósito en operaciones activas vaya siendo mayor, también aumenta el riesgo de la banca, bastará siempre el cálculo anterior para determinar el costo del dinero por pago a los depositantes.

Al resultado anterior se deberá añadir el seguro de partidas fallidas cuya medida ha de dar siempre la contabilidad de cada empresa y si resultase ésta de 1 por 10000 y el coeficiente de gastos se calculase en $^1/_6$ % tendríamos para costo del descuento el 3'5001 %, de cuyo tipo no podrá descender sin pérdida para el Banco. A este resultado se añadiría además el coeficiente de gastos generales (**54**) referido a tanto por ciento.

331. – Condiciones del descuento. - Según el Banco de que se trate y de la clase de efectos que se descuenten así varían esas condiciones, por lo que hemos de hacer un estudio separado de cada clase de efecto y cada clase de banca para determinar la formación de las tarifas en que constan esas condiciones.

332. - Descuentos en plaza. – Los efectos que hemos llamado negociables y el papel de crédito se admiten a descuento al tipo que rija en la plaza, del que ya hemos dicho las modalidades que presenta.

El Banco Nacional de emisión no puede admitir efectos a mayor plazo de 90 días y aunque otros los admiten hasta 120, siempre estará comprendido ese plazo dentro del límite que señalamos para el tiempo cuando hubiera de calcularse el

descuento comercial (**224**), luego, debe ser admitida esta clase de cálculo, contando el tiempo como ya dijimos (**205** al **207**).

Por lo tanto, el cálculo de las cuestiones de descuento de efectos pagaderos en la misma plaza es el mismo que hemos estudiado como descuento de capitales.

Si el descuento se hace con intervención de corredor, cosa muy poco frecuente, será necesario determinar el corretaje, siempre referido a tanto por mil y cuyo cálculo ha de hacerse por separado del descuento, y en la forma conocida (**14**).

Ejemplo: Hallar la cantidad efectiva al descontar en 6 de febrero una letra de 8450 pesetas al 5 de mayo, al 5 °/₀ anual, con intervención de corredor cuya remuneración es del 1 °/₀ sobre el efectivo.

El descuento del Banco será durante 87 días

$$\frac{8450 \times 87}{7200} = 102'10 \text{ pesetas}$$

que da por efectivo 8450 — 102'10 = 8347'90 y el corretaje sería de 8'35, con lo cual el resultado pedido habría de ser

$$8450 - (102'10 + 8'35) = 8339'55 \text{ pesetas.}$$

333.—Descuentos de efectos de fuera de plaza.—Los efectos pagaderos en plaza distinta de aquella en que reside el establecimiento de crédito se admiten a descuento con arreglo a las tarifas especiales de cada Banco, las cuales contienen los siguientes elementos:

1.° *Cambio.*—El cambio representa la pérdida que por desplazamiento sufren los efectos negociados y comprende a la vez los gastos de cobro y el descuento durante un plazo mínimo, si bien en ciertos casos sólo forma parte de la tarifa los gastos de cobro. El cambio es diferente para cada plaza y la disposición de las tarifas suele ser por comarcas y por orden alfabético. El plazo mínimo más general es el de 8 días vista (**311**) aumentado para el cálculo de la tarifa en las fechas que pierde el Banco en el reembolso.

2.° *Descuento.*—Cuando el plazo de los efectos excede al de la tarifa, entonces además del cambio se cobra el descuento que corresponda por los días que exceda un plazo de otro. Este descuento se calcula al tipo oficial en el Banco Nacional, y a este mismo tipo aumentado en ½, 1, 1½ °/₀ etc. en los demás Bancos, dependiendo este aumento de la calidad de los

efectos descontados (**328**); y expresándose en las condiciones de descuento por la fórmula «$TB + x\,^{0}/_{0}$» algunas veces aumentada con las palabras «*mínimun* $z\,^{0}/_{0}$» lo que quiere decir que si de la fórmula anterior resultase un tanto menor que el mínimo adoptado se calcularía el descuento a este mínimo, que se establece teniendo en cuenta el costo del descuento antes calculado.

3.° *Comisión.*—Este elemento de disminución del valor de los efectos representa el riesgo de la banca por falta de pago y se expresa a un tanto por ciento o por mil. Algunas veces va incluida en el cambio y nunca tiene límites mínimos como lo tienen los otros dos elementos anteriores.

4.° *Cobro y domiciliación.*—Esta comisión es también un tanto por ciento o mil en compensación de la materialidad del cobro fuera del Banco, representativa del gasto de los cobradores. En España la tarifa oficial de operaciones de Banca señala esta comisión como de efectos no domiciliados en Banco o banquero, y puede calcularse separadamente o incluída en el cambio, lo mismo que se haría con la *comisión de extrarradio* que tienen algunos efectos en grandes plazas bancables.

5.° *Gastos diversos.*—Representa este concepto los gastos accidentales que pueden originar algunos de los efectos que se descuentan, como correo certificado en las letras aceptadas y documentarias (**562**), aviso de cobro, remesas a la aceptación, etc., y además los timbres que haya sido preciso agregar a los efectos que lo necesitasen.

También ahora puede haber gasto de corretaje, calculado de igual modo que la comisión.

334. — Cálculo de estos descuentos. - Para deducir el procedimiento de cálculo hemos de considerar que de los cinco elementos considerados hay tres referidos a tanto por ciento, otro independiente del importe del efecto y otro que constituye el descuento del nominal del efecto durante cierto número de días; éste y los primeros serán por consiguiente los que exijan el cálculo.

Para este cálculo lo mejor será emplear el *procedimiento analítico,* hallando primero las cantidades a rebajar y haciendo después la resta total de ellas, del nominal del efecto.

Ejemplo: Calcular el líquido que se recibirá por un efecto a un mes fecha sobre Manresa, de pesetas 16850, si el cambio de tarifa para dicha plaza es de 0'80 °/₀ para efectos a ocho días vista, debiendo pagar además la comisión de 0'15 °/₀ y el certificado, y siendo el tanto de descuento el 4 °/₀.

Será completamente idéntico que hagamos el cálculo por separado para el cambio y comisión o que sumando los dos tantos °/₀ tengamos:

Cambio y comisión 0'80 + 0'15 = 0'95 °/₀ sobre 16850 pesetas.	160'07 ptas.
Descuento al 4 °/₀ durante 19 días (*)	35'57 »
Correo certificado	0'30 »
Total a descontar	195'94 »

Líquido del descuento 16850 — 195'94 = 16654'06 pesetas.

EJERCICIOS *números* **536** al **541; 545; 547; 556; 558; 560; 561; 544; 1428;** y **1431.**

Otro procedimiento es por medio de una fórmula, cuya aplicación nos daría directamente el valor efectivo de la operación, y de la que podríamos despejar cualquier otro elemento para calcularle, si fuese preciso.

Para establecer la fórmula basta que expresemos literalmente las operaciones que acabamos de hacer por el procedimiento analítico, así que representando por a el cambio, por c las comisiones y por g los gastos fijos, y calculando el descuento por los divisores fijos, el total a descontar sería, llamando N al nominal del efecto:

$$d = \frac{N(a+c)}{100} + \frac{Nn}{D} + g = N\left(\frac{a+c}{100} + \frac{n}{D}\right) + g$$

fórmula en la que sólo podríamos establecer simplificaciones reduciendo al mismo denominador los dos quebrados, y como entonces tendríamos una fórmula cuyo cálculo es incomparablemente más engorroso que el cálculo directo, nos abstenemos de su deducción, recomendando a nuestros lectores que sólo cuando quieran hallar alguno de los elementos de cálculo antes considerados a, c, g, o para deducir el nominal del efecto, se sirvan de la fórmula.

De estos cálculos inversos derivados de la fórmula última sólo tiene importancia práctica el del nominal del efecto, y aún entonces suele quedar simplificada la fórmula por la desaparición del descuento fuera de tarifa, y siempre se dice que éste cálculo forma la operación llamada *por apunte* que hemos de estudiar en el capítulo siguiente, al que remitimos al lector.

(*) Teniendo en cuenta que por correo y trámite tenga el plazo vista tres días de correo **(311)** que son los de la tarifa oficial española.

EJERCICIOS *números* **542; 549; 554; 555; 559; 562; 563** y **546** para cálculo del nominal y **550; 557** y **1428** para el vencimiento.

De este cálculo se deriva el problema del *tanto real de descuento* equivalente al conjunto de rebajas que sufren los efectos de comercio en su negociación. Este tanto es el que resultará según la fórmula del interés **(218** y **223)** tomando como descuento el total rebajado del efecto y siendo el capital y tiempo para esa fórmula el nominal y plazo del efecto.

EJERCICIOS *números* **543; 544; 548; 551** al **553.**

335.—Error teórico de estos cálculos.—Los mismos que combaten el cálculo del descuento comercial también ahora pretenden que el descuento durante los días de plazo excedentes del de tarifa se calcule, no sobre el nominal como hemos hecho nosotros, sinó sobre el efectivo que resulta después de aplicar los tantos por ciento de cambio y comisión. Haciendo ésto, y considerando cambio y comisión solamente, sería el efectivo

$$E = N - \frac{N(a+c)}{100} = \frac{N[100-(a+c)]}{100}$$

y calculando el descuento del valor del último miembro,

$$d = \frac{N[100-(a+c)]}{100} \times \frac{n}{D}$$

de la que hallaríamos para valor efectivo

$$E = \frac{N[100-(a+c)]}{100} - \frac{N[100-(a+c)]}{100} \times \frac{n}{D} =$$

$$= \left(\frac{N[100-(a+c)]}{100}\right)\left(1 - \frac{n}{D}\right)$$

del que sólo quedará restar los gastos fijos, que nunca pueden quedar incorporados a la fórmula.

Ejemplo: Si aplicásemos la fórmula al ejemplo anterior, hallaríamos un resultado de 16654'70 pesetas de líquido, cuya diferencia proviene de haberse calculado el descuento sobre una cantidad indudablemente menor.

Los que pretenden se siga este procedimiento quieren que exista un error donde sólo hay falta de examen de la naturaleza de los elementos que han de calcularse. Efectivamente, la tarifa constituye un descuento comercial por el plazo a que se refiere y por ser un descuento comercial ha de calcularse sobre el nominal; pero el descuento posterior al cambio de tarifa es también un descuento comercial durante la continuación del plazo y por los días que no pudieron incluirse al calcular la tarifa, luego cambio de tarifa y descuento por diferencia de plazos no son sinó dos partes de un mismo elemento y como tales no es posible pretender que se calculen cada una sobre cantidades diferentes, porque entonces tendríamos un descuento fraccionado **(202)** y lo que constituye la naturaleza contractual de la cesión de crédito a que se

aplica ese cálculo es la misma del descuento comercial **(231)**, por consiguiente, sólo el método primeramente estudiado es el racional y *no puede existir ese error teórico que da a conocer la fórmula* de este párrafo.

336.—Los mínimos en las tarifas.—Hemos hecho referencia a limitaciones que suelen contener las tarifas de cambios de la Banca, respecto a las cuales creemos necesario insistir por la modificación que producen en los cálculos, haciéndolo por el orden de cada limitación mínima.

1.° *Mínimo de plazo.*—Cuando los efectos descontados son a vista o tienen un vencimiento muy próximo, no compensaría el trabajo y riesgo del Banco el descuento por tan poco tiempo, y por esta causa se tienen los llamados *días de banca*, que suelen ser los correspondientes al plazo de 8 días vista para todos aquellos efectos que comprende el cambio referido a ese plazo, y por virtud del cual se tomará el descuento que resulte del cambio de tarifa para todos los efectos cuyo plazo sea inferior a 8 dias vista, o al de fecha que de éste resulte al considerar el correo.

Cuando el cambio de tarifa se refiere a plazo vencido, es decir, que en él no se comprende descuento durante ningún día, cosa que suele estar limitada a las plazas que se dice se descuentan o negocian a la par, como son en el Banco de España las bancables, entonces el descuento debería ser por todos los días que falten al vencimiento del efecto, más los *días de banca*, que oscilan entre 3, 5, 8 o 10 según plazas y establecimientos, salvo que el correo sea mayor como sucede con las plazas de Canarias en España. Cuando los días que faltan para el vencimiento no lleguen a los días de banca se descontarán los efectos por esos días.

2.° *Mínimo por efecto.*—Por la misma razón del trabajo y gastos que a la Banca proporciona el descuento y cobro de los efectos, contienen las tarifas estas limitaciones, expresándose que si los efectos no llegan a cierto nominal se cobrará el cambio correspondiente a este límite lo que es el *límite de nominal*; así, si por ejemplo, se establece que por todo efecto menor de 100 pesetas se cobrará un descuent ocomo si tuviere este nominal, el descuento será el tanto de la tarifa.

Más frecuente es el establecer en las tarifas el *mínimo por cantidad a rebajar* apareciendo por ejemplo en la tarifa «*Pla-*

za X... 0'60; mín. 1'25» con lo que se expresa que de todo efecto al que corresponda menor rebaja se descontará esa 1'25 pesetas.

Las dos formas de expresar este mínimo son equivalentes, pués están ligadas por la expresión

$$d = \frac{Nc}{100}$$

en la que cada letra representa la cantidad de que es inicial en descuento o daño, nominal y cambio.

3.° *Mínimo por plaza.* Este límite se expresa en la tarifa del mismo modo que el anterior y en la mayoría de los casos son una misma cosa.

Lo mismo que antes, puede ser ahora necesario conocer el nominal menor que corresponde al mínimo de las tarifas y que deberán tener los efectos para evitar el aumento en el cambio por causa de esos mínimos, lo que conseguiremos teniendo en cuenta que la fórmula que antecede es la misma que la del tanto por ciento **(6)**.

337.—Facturas de descuento. Llámase *factura de descuento* a la nota detallada de los efectos que deben ser descontados, completada por los cálculos necesarios para determinar los daños y gastos, y cerrada por el producto neto de la negociación.

Las facturas de descuento, también llamadas boletines, suelen denominarse no pocas veces *facturas de negociación* si sólo comprenden efectos que sean todos al vencimiento que expresa el plazo de las tarifas bancarias, y que por consiguiente no exigen más cálculo que el de los cambios, y se denominan *facturas de negociación y descuento* cuando comprenden efectos sobre los que han de calcularse cambios y además descuentos por diferencia de plazos.

La factura de descuento, de cualquiera de las tres clases, comprende dos partes: el encabezamiento y el cuerpo de la factura, en la primera de las cuales consta el nombre del Banco y del cliente, la fecha de presentación y a veces las condiciones de negociación y un resumen de la factura; y en la segunda parte es donde aparecen el detalle de los efectos y el cálculo necesario.

El cálculo empleado en las facturas consiste en determinar

para cada efecto el quebranto que le corresponde según los cambios de tarifa, sumando luego los quebrantos de todos para hacer una sola deducción del nominal total, a fin de hallar el líquido producto; y para los descuentos que hayan de tener los efectos se emplean los procedimientos estudiados al tratar de varios capitales (capítulo XXIV), dándose preferencia al de números comerciales o cualquiera de los de tantos bases, que permiten hacer el cálculo lo más rápido posible, determinando de una sola vez el descuento de todos los capitales descontados. Para facilitar aún más los cálculos, hay en algunos modelos de facturas doble columna para los capitales, para poder sumar éstos por igualdad de vencimientos de los efectos y hacer de una vez el cálculo del número comercial de todos los que vencen en la misma fecha.

Ejemplos: Sirven de tales los tres siguientes, que a la vez pueden ser modelo de las tres clases de facturas.

A)—*Factura de descuento.*

FACTURA de seis efectos que D. Alejandro Reinoso presenta al Banco Mercantil para su descuento y abono del líquido en la cuenta corriente del mismo

NÚM.	IMPORTE		PLAZAS	Vencimiento		DIAS	Números	Timbres	
3815	1247	10	Esta	Junio	16	15	1870		
6009	3062	00	»	Julio	1	30	91860	0	60
8645	864	25	»	»	2	31	26792		
8644	1900	00	»	»	10	39	74100		
9001	630	05	»	»	15	44	27722	0	30
9710	2000	00	Bilbao	»	21	50	100000		
Sumas.	9703	40					322344	0	90
	53	72	Descuentos al 6 % s/ núms. 322344						
	0	90	Timbres agregados.						
	9648	78	Líquido.						

Oviedo 1.º de junio de 1931.

B)—*Factura de negociación.*

Factura de los efectos presentados al Banco Sevillano por D. Lorenzo López para su negociación.

NUMS.	IMPORTE	PLAZAS	Vencimiento.	Cambio	DAÑO	Timbres	OBS.
614	3465 05	Aranjuez.....	8 d/v	0'40	13 85		A
702	83 15	Miranda.....	» »	Mín.	0 75		
739	624 00	Torrelavega.....	» »	0'30	1 90		
746	1392 —	Villalba.....	» »	0'90	12 55	0 30	A
888	1074 20	Belmonte.....	» »	1'10	11 80	—	D
1623	8436 50	Medina del Campo...	» »	0'50	42 20	1 20	A
1654	119 25	Pravia.....	» »	Mín.	1 25		
Sumas	15194 15				84 30	1 50	
		Comisión 1/2 °/00.....			7 60		
		Timbres.....			1 50		
		Cuatro certificados.....			1 20		
	94 60	Total a descontar.....			94 60		
	15099 55	Líquido de la factura.....					
		Oviedo 6 de mayo de 1931.					

C) Factura de negociación y descuento.

Efectos presentados por Gómez, López y Comp. para su negociación y descuento en el Banco Español de Jaén, en 7 de abril de 1931.

Plazas de pago	CAMBIOS °/o	Daño	Mín.	Timbres	Cantidades	Vencimientos	Días	Números	
Córdoba.....	Par			60	2680 20	12 abril	10	26800	A
Sahagún	0'80	5 80			725 15	8 d/v			
Avilés.....	0'50	1 —	1'00	15	60 —	15 »	7	420	
»	0'50	3 60		30	1200 —	1 mayo	12	14400	
Badajoz.....	Par				3000 —	30 mayo	55	159000	
		10 40		1 05	7665 55			200620	
Descuento 4 °/o		22 30							
Timbre.....		1 05							
Certificado.. .		30							
Total a rebajar.		34 05			34 05				
Líquido de la factura.....					7631 50				

Como puede observarse por la primera factura, no es requisito indispensable el que todos los efectos sean pagaderos en la misma plaza, sino que

el cálculo comprende a todos los que sean a descontar sin rebaja por cambio de plaza.

Puede apreciarse también que el orden de las columnas es dato tan secundario que cada casa hace la modelación de una forma diferente; y lo mismo en la primera que en las otras dos suele haber una columna de capitales o importes doble para sumar los efectos por orden de plazas o de vencimientos, según se desee calcular de una sola vez para varios efectos el daño o el número de descuento.

Las letras *A* y *D* que aparecen en la columna de observaciones y en el margen respectivamente en las dos facturas, es la indicación de que esos efectos son letras aceptadas o documentarias que deben remitirse al cobro por correo certificado, que después se incluye en las deducciones de la factura, con tantos certificados como letras tengan esa inicial. Hay también modelos de facturas que contienen columna especial para estos gastos lo mismo que para los timbres.

Puede así mismo apreciarse en las dos últimas facturas las dos formas de señalar los mínimos de cambios, así como el mínimo de días de la última factura que corresponden al primer efecto, que sólo había de ser descontado sin cambio y tiene calculados 10 días cuando sólo faltan para vencer 5, así como también la diferencia de días que resultan por diferencia del plazo a que se refiere el cambio y según que el plazo sea a vista o a fecha.

EJERCICIOS *números* **564** al **589** y también puede servir el **662.**

338.—Descuento de cupones.—Los cupones son los pequeños documentos que acreditan el derecho del portador a cobrar los intereses de los empréstitos públicos o de las grandes Sociedades, y como cada cupón corresponde al pago de esos intereses en una fecha determinada, puede obtenerse el pago anticipado por los Bancos mediante el descuento, cuyo cálculo se hará por las fórmulas del descuento comercial, sin más limitación que fijar cada Banco un mínimo de días para descuento y un mínimo de descuento por cada factura.

339.—Operaciones bancarias sobre los efectos en moneda extranjera. -Los efectos pagaderos en moneda diferente que la nacional pueden ser objeto de las mismas transacciones que los de moneda nacional, y además la especial de compraventa del valor que representan, y que ya dijimos constituía la operación bancaria de comercio de divisas.

En cuanto a las operaciones que no son de compraventa, los efectos pagaderos en moneda extranjera deben ser considerados como de moneda nacional y a la vez como de opera-

ciones verificadas en el país en que la moneda es nacional, así por ejemplo, un efecto pagadero en francos debe ser negociado como si la operación se realizase en Francia o en el país a que se refieran los francos (Suiza, Bélgica o Albania).

340.—Efectos sobre la nación.—Los efectos librados en moneda distinta que la del país en que han de ser pagados, ya vimos **(313)** los diferentes modos en que se podían cobrar, y por su circunstancia aleatoria en unos y condicionada en otros nunca se admiten a descuento por los Bancos, sino que se toman para encargarse de su cobro y después que éste se ha efectuado se liquidan con arreglo a tarifas especiales, en todo iguales a las de los cambios que ya nos son conocidas. Por consiguiente, el cálculo que originan estos efectos será el mismo que los de moneda nacional antes examinados.

341.—Efectos sobre el extranjero.—Estos efectos son los pagaderos en el país en que es nacional la moneda del pago en que está extendido el efecto.

También podrían comprenderse en este grupo aquellos efectos que siendo pagaderos en moneda nacional, el lugar del pago es el extranjero; pero estarán mejor incluídos en el grupo anterior y con arreglo a lo que allí decíamos serán liquidados.

Los efectos sobre el extranjero pagaderos también en moneda extranjera deben clasificarse en *papel comercial*, girado a plazo o a fecha fija larga; y *papel bancario*, constituído por cheques o letras a la vista.

Los efectos comerciales se negocian en las mismas condiciones que los de moneda nacional, es decir, se descuentan con arreglo al tipo de descuento oficial en el Banco nacional del país en que el efecto ha de ser pagado, aumentado en una pequeña cantidad, casi siempre el 1 %, o sea que se descontarán en la forma «TBN + x %», lo mismo que los nacionales **(333)**. Además de este descuento pueden sufrir la pérdida por cambio de plaza y los gastos de timbre, todo con igual trato que si la negociación se hiciese en el país del pago.

Ejemplo: Véase la siguiente factura de efectos sobre Inglaterra.

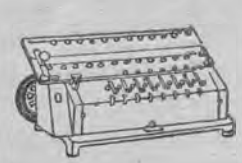
Plaza de pago	Daño	Timbres	Cantidades	Vencimiento	Días	Núms.	Cambio
Londres.....		4 0	325 3 2	30 d/v	40	130	Par
Birmingham..	5 2	3 0	260 0 0	25 febrero	18	47	1 °/₀₀
Manchester....	3 6	2 0	175 18 0	ch/			1 °/₀₀
Portland.....	5 0	2 0	200 0 0	30 d/v	40	80	1/8 °/₀
	13 8	11 0	961 1 2			257	
Timbres.....	11 0						
Intereses 5 °/₀..	3 10 6		4 15 2				
Líquido £...			956 6 0				

Los efectos Bancarios que provienen de operaciones de cobro y pago diferentes de las compras de mercancías, se negocian como efectos sobre la misma plaza o sobre otra sin descuento, tomando a veces también daños de plaza.

En cualquiera de las dos clases de efectos sobre el extranjero es preciso tener en cuenta que el correo ha de contarse por los días que realmente son necesarios, habida cuenta de la plaza en que se hace la negociación y no los que se necesitarían en el país del pago; es decir, que mientras un efecto en florines pagadero en Holanda se calcula con arreglo a las condiciones de Amsterdam, el correo que haya de contarse para los plazos vista o para la diferencia entre éstos y los de fecha, será el que se necesite desde el país de la negociación.

El líquido que resulta en los efectos o facturas de efectos de la clase que nos ocupa, puede, posteriormente a su cálculo, ser considerado como moneda extranjera para anotar en cuentas de la misma moneda, o bien para venderse o reducirse a moneda diferente de la que están extendidos los efectos, en la forma que estudiaremos en las operaciones de cambio.

Ejercicios *números* **624; 627** al **630** además de que pueden servir didacticamente los **653** al **655; 661; 693** al **699; 711** y **712**.



XXXIII

GIROS Y REMESAS

342.–Cobros y pagos por medio de los Bancos.– Puede decirse que las operaciones que dan origen al descuento de efectos comerciales, que ya hemos estudiado, constituyen el medio de cobro con intervención de los Bancos, y ahora vamos a ocuparnos de los pagos que se hacen valiéndose de los mismos Bancos.

Todas estas operaciones son un servicio prestado por los Bancos siendo su esencia la misma; poner a la disposición del cliente una suma determinada en lugar y fecha también determinados, y por tal servicio los Bancos cobran una comisión variable según la clase de operaciones, pero siempre referida a un tanto por ciento o por mil, y a veces por diez mil.

343.—Definición de estas operaciones.–Como son varias según acabamos de ver estas operaciones, hemos de dejar sentado lo que cada una constituye.

1.° *Giros*. Girar es crear un efecto de comercio para hacer un cobro o pago. Los Bancos giran a cargo de sus corresponsales y sucursales ya letras o ya más comunmente cheques.

Para facilitar estas operaciones existen los *listines de corresponsales* en los que por orden alfabético de plazas aparece el nombre del Banco o banquero a cuyo cargo se librará el cheque o letra y a continuación del nombre una cantidad que expresa la comisión que ha de pagarse por el giro. Como no todos los Bancos han de tener corresponsales en cualquier plaza en que se les pida un efecto, se cambian entre sí estos listines de corresponsales y hacen los giros por medio *indirec-*

to, es decir, valiéndose de un corresponsal suyo que tenga corresponsalía en la plaza pedida, así, si, por ejemplo, a un Banco de León se le pide un cheque pagadero en Jerez de los Caballeros, si dicho Banco no tiene relaciones directas con ninguno de esta última plaza, pero sí con otro Banco de Badajoz en este caso interviene como plaza auxiliar Badajoz y el giro es indirecto, pudiendo suceder que en vez de una plaza auxiliar hubiese dos o más, ya que teóricamente nada impide que llegasen a ser innumerables.

2.° *Órdenes de banca*. Estas operaciones son simplificaciones del giro, y consisten en ordenar al librado que entregue cierta cantidad al beneficiario mediante la firma de un recibo, duplicado o triplicado según los casos.

Esta modalidad de los giros se denomina *órdenes de entrega*, pudiendo ser también directa o indirecta como el giro con documento, y es la forma que afectan los giros hechos por medio de las oficinas postales o telegráficas.

Puede la orden bancaria quedar limitada a la anotación de la misma cantidad en la cuenta del beneficiario que habría de cobrar, con lo que la simplificación es todavía mayor, en cuyo caso recibe el nombre de *transferencia* y puede emplearse hasta para pagos dentro de la misma plaza, como en realidad se hace en las Cámaras de compensación.

3.° *Aperturas de crédito*. Son órdenes de entrega condicionadas al cumplimiento de otra operación, o bien en la forma de cartas de crédito.

4.° *Aceptaciones*. Consiste esta operación en convertirse el Banco en librado de las letras que habría de pagar su cliente y por consiguiente es un medio de pago para la misma plaza cuando el que ha de cobrar reside en otra diferente.

5.° *Entregas para abonos en cuenta*. Son una variedad de las transferencias, que consisten en entregar una cantidad en una plaza para que sea acreditada la cuenta que en sucursal del mismo Banco en otra plaza tenga el beneficiario.

344.—Cálculos que originan esas operaciones.—Todas las operaciones anteriores hemos dicho que se aprecian a razón de tantos por cuantos, luego por las fórmulas ya conocidas (**6**) deduciremos el valor de la comisión y cuando trate-

mos de hallar el efectivo habremos de tener en cuenta los *gastos* que siempre originan estas operaciones, de timbre, correo o telegramas, que no siendo proporcionales al importe de la operación intervendrán en la fórmula con independencia.

El valor del efectivo que ha de cobrar el Banco será

$$E = N\left(1 + \frac{c}{B}\right) + G$$

en la que c representará la suma de comisiones cuando sea más de una, como sucede en las operaciones indirectas; B será el cuanto a que la comisión se refiere y que ya dijimos era 100, 1000 y a veces 10000, y G el conjunto de esos gastos fijos.

Ejemplo: Averiguar cuánto costará el remitir a Barcelona 20000 pesetas por medio de un cheque por el que el Banco cobrará el 0'60 por mil y el timbre proporcional.

Procediendo por análisis tenemos:

Importe del nominal del cheque.....	20000 — Ptas.
Comisión del Banco... (20000 × 0'60) : 1000....	12 — »
Timbre del cheque (*).....	30 — »
Coste de la operación.....	20042 — »

Por aplicación de la fórmula anterior tendremos igualmente

$$\text{Efectivo del cheque comprado..... } 20000\left(1 + \frac{0'60}{1000}\right) + 30 = 20042$$

Cuando se ceden a la vez varios efectos o se efectúan varias operaciones de las que ahora examinamos, y con un mismo cliente, se hace una relación de todos en forma igual a las facturas de negociación **(337, *B*)** sin más variación que las comisiones y gastos, que allí se restaban del nominal y deben ser sumadas ahora.

345.—Giros y remesas de moneda extranjera.— Cuando las remesas y giros en moneda extranjera hayan de tener su anotación y cumplimiento sólo en la moneda en que se extienden o hacen, en nada difieren de las mismas operaciones estudiadas en la moneda nacional, aunque siempre considerándose hechas en el país de la moneda.

Ejemplo: Calcular los francos que costará un efecto de 7800 francos sobre París cobrándonos el Banco 1 % de comisión y el timbre francés.

(*) En España este timbre sólo se paga en el momento de cobrar el cheque, pues si este cobro se hace por compensación estaría el cheque exento de tal impuesto, y así desaparece este concepto en el cálculo.

Suponiendo que el efecto sea un cheque al que corresponde timbre de 0'20 francos tendremos:

$$E = \frac{7800 \times 101}{100} + 0'20 = 7878'20 \text{ francos.}$$

EJERCICIOS *números* **596** al **599; CXLVII** al **CL; 625** y **626** y para FACTURAS los **593** al **595; 600; 607** y **608.**

346.—Operaciones por apunte.—Los giros, remesas, cobros y pagos por apunte son aquéllos que han de efectuarse de modo que su cumplimiento cause o produzca un efectivo pre-establecido, es decir que se trata de calcular el nominal por qué ha de hacerse la operación conociendo el efectivo y los gastos.

Por la gran facilidad con que se refieren todos los tantos a tantos por ciento, vamos a despejar el valor de N en la fórmula del párrafo **344** por medio de la base 100. Haciendo ésto y poniendo en forma de quebrado todo el paréntesis, la fórmula se transforma en ésta:

$$E = N\left(\frac{100 + c}{100}\right) + G$$

de donde se deduce para el valor del nominal buscado

$$N = \frac{(E - G)100}{100 + c} \qquad [1]$$

La operación que acabamos de considerar es el caso correspondiente al envío de un efecto al acreedor para que cobre el inporte de su crédito y por eso se llama *remesa por apunte.*

Tenemos por consiguiente que la *remesa por apunte* es el pago de una cantidad en otra plaza distinta de la en que se opera, por cualquiera de los procedimientos bancarios y de forma tal, que el costo de la operación sea una cantidad determinada de antemano

Pero además de la remesa por apunte hemos de considerar la llamada *trata o libranza por apunte.* Esta operación consiste en el cobro de una cantidad en plaza diferente de aquélla en que se opera, por medio de la negociación de un efecto de comercio a cargo del deudor y de forma que el líquido de la negociación sea una suma anteriormente determinada.

También en este segundo caso de operaciones por apunte

el problema de cálculo consiste en determinar el nominal que haya de tener el efecto.

Para ésto partiremos de la fórmula que da la cantidad que debe ser descontada en la negociación (**334**) y reduciendo en ella la suma de los elementos percentuales a una sola cantidad *c*, nos da para valor del efectivo

$$E = N - d = N - N\left(\frac{c}{100} + \frac{n}{D}\right) - g$$

de la que sacando factor común N y reduciendo al mismo denominador los términos del paréntesis tenemos:

$$E = N\left(1 - \frac{Dc + 100n}{100D}\right) - g$$

y de aquí todavía hemos de efectuar la operación indicada en el paréntesis para despejar el nominal y así resultará:

$$E = \frac{N\,[100D - (Dc + 100n)]}{100D} - g$$

y de aquí

$$N = \frac{100D\,(E + g)}{100D - (Dc + 100n)} \qquad [2]$$

Esta fórmula admite una simplificación, pues en la práctica se hacen estos giros al mismo plazo del cambio de tarifa, con lo que desaparece el elemento de cálculo del descuento; y siendo entonces

$$E = \frac{N(100 - c)}{100} - g$$

resultará para el nominal de la trata

$$N = \frac{100(E + g)}{100 - c} \qquad [3]$$

Comparando ahora esta fórmula con la correspondiente a la remesa, apreciaremos que tienen los signos de suma y resta en orden inverso como que corresponden respectivamente, a compra de efectos la de remesa, y venta de efectos la de trata, y de las dos puede obtenerse la siguiente *fórmula general*

$$N = \frac{100(E \mp G)}{100 \pm c} \qquad [4]$$

en la que hemos de tomar los signos superiores en caso de compra (remesa) y los inferiores en caso de venta (trata).

Ejemplos: 1). *Remesa por apunte.*—Calcular el nominal que podemos remitir a nuestro corresponsal en Ponferrada en cheque, por el que debemos pagar al Banco el 1'20 °/₀ de comisión, gastos de timbre proporcional del cheque y el correo certificado, siendo todos los gastos por cuenta de dicho corresponsal y ascendiendo nuestro débito a 6850 pesetas.

Debiendo pagar el corresponsal los gastos de nuestra remesa, el cálculo del nominal ha de hacerse por apunte, y como los gastos fijos son 6 pesetas de timbre y 0'60 pesetas de correo se tendrá:

$$N = \frac{100(6850 - 6'60)}{100 + 1'20} = 6762'25 \text{ pesetas}$$

según resulta de la aplicación de la fórmula [1]:

2). *Giro o trata por apunte.*—Por qué nominal giraremos una letra a cargo de nuestro corresponsal de Arévalo para reembolsarnos del importe de una operación hecha por su cuenta, si hemos de negociar la letra en un Banco que nos cobra por cambio 0'60 °/₀ una comisión del ½ por mil y el timbre correspondiente al giro y al recibí, siendo el débito de nuestro corresponsal 12400 pesetas.

Por tratarse de operación de su cuenta, el líquido producido por la negociación de la letra han de ser las 12400 pesetas, y siendo el timbre que corresponde a dicha cantidad de 30 pesetas por el efecto y 1'2 por el recibí, reuniendo comisión y cambio en una sola cantidad por referirse los dos conceptos al nominal, aplicando luego la fórmula [3] resulta:

$$N = \frac{100(12400 + 31'20)}{100 - 0'65} = 12512'53 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **590** al **592; 601** al **606; CLI** al **CLIII,** y además podrán utilizarse los **542; 549; 554; 555; 559; 562; 563** y **546.**

Suelen también ser hechos *por apunte* giros y remesas en moneda extranjera para pagar o reembolsarse de cantidades en la misma moneda sobre que versan los cálculos y en que se hacen las operaciones, ateniéndose siempre al aplicar la fórmula a la circunstancia de haberse de tener en cuenta las condiciones del país en que la moneda es nacional.



XXXIV

IMPAGADOS

347.—Efectos impagados.—Ya hemos dicho anteriormente (**315**) que la falta de aceptación y pago de una letra, o de cualquier otro efecto se hacía constar por medio del protesto, y cuando contenía la cláusula «sin gastos» era costumbre práctica no hacer el protesto; pero en uno u otro caso los efectos que no son pagados dan lugar al procedimiento de reclamación de su importe y gastos originados, de las personas responsables del pago, que son todas las que intervienen como creadores o endosantes del documento.

La organización bancaria actual ha sustituído el procedimiento legal del giro de un nuevo efecto que debe acompañar al impagado, por la devolución al librador del efecto impagado acompañado de la nota de gastos, por el orden inverso de los endosos. Estos efectos tienen en los Bancos su sección especial de impagados.

348.—Nota de gastos.—Los efectos que llevan la indicación «sin gastos» se devuelven en la forma dicha, acompañados de una nota de gastos, que se reduce a una comisión del Banco que debió hacer el cobro, más los gastos de correo por devolución del efecto.

Los cálculos que origina esta nota, se reducen al tanto por ciento de la comisión de devolución, que ya conocen nuestros lectores cómo se efectúa.

Por su gran sencillez prescindimos de ejemplo resuelto.

349.—Resaca y su cuenta.—El efecto que por falta de pago es protestado adquiere por esta operación legal la fuerza

ejecutiva para la reclamación judicial del importe y gastos; y como reclamación extrajudicial, autoriza la ley al portador de una letra de cambio u otro efecto protestado a girar a cargo del librador o de uno cualquiera de los endosantes otra letra que recibe el nombre de *resaca*, a la que deberá acompañar la letra original, el testimonio del protesto y la *cuenta de resaca*; pero ya dijimos antes que esta nueva letra resaca no se gira en la práctica, sinó que se devuelven los tres documentos que debieran acompañarla.

La cuenta de resaca ha de contener las partidas siguientes:

1.° Capital de la letra protestada.
2.° Gastos del protesto.
3.° Derechos del sello para la resaca.
4.° Comisión de giro a uso de la plaza.
5.° Corretaje de la negociación.
6.° Gastos de la correspondencia.
7.° Daño del recambio.

350.—Cálculo de la cuenta de resaca. —La letra resaca debe tener un nominal igual al del efecto protestado más todas las otras partidas antes enumeradas, por consiguiente nos encontramos con el cálculo de un *giro por apunte* de que antes nos hemos ocupado

Para facilitar el cálculo del nominal hemos de hacer la distinción de los gastos en dos clases: *fijos*, que son los del protesto, el timbre de la resaca y el correo; y *proporcionales;* que son los de comisión, corretaje y recambio, todos los cuales hacen referencia al nominal de la resaca y no al del efecto protestado, con cuya clasificación el nominal de la resaca estará dado por la fórmula (**346**, [3])

$$R = \frac{100(P + f)}{100 - v}$$

en la que R es el nominal de la resaca, P el nominal de la letra protestada, f la suma de los gastos fijos y v la suma de los tantos por ciento de los gastos variables.

Ejemplo: Calcular el nominal y formular la cuenta de resaca de una letra de cambio de 6400 pesetas, protestada por falta de pago, siendo la comisión de 1 por mil, lo mismo que el corretaje, 1 $^1/_2$ % el recambio, y los demás gastos los correspondientes según tarifa.

Los gastos fijos que corresponden son 7'50 pesetas por derechos del Notario, 5 pesetas de la copia del acta, 12 pesetas del timbre de la resaca, 1'20 del timbre de recibí y 1 por correo, componiendo un total de 26'70 pesetas.

Los tantos proporcionales suman 1'70 °/₀ con lo que el nominal de la resaca será:

$$R = \frac{100(6400 + 26'70)}{100 - 1'70} = 6537'84 \text{ pesetas.}$$

La cuenta de resaca que se formularía en la forma corriente sería:

CUENTA DE RESACA de una..... de cambio de seis mil cuatrocientas pesetas, girada en..... a cargo de..... y orden..... ..... protestada por falta de pago, según testimonio del Notario D.....

Principal del efecto protestado.....	Ptas.	6400 —
Gastos del protesto.....	»	12'50
Timbre para la resaca.....	»	13'20
Correo.....	»	1 —
Comisión de banca, 1 °/₀₀ s/ 6537'84 pesetas...	»	6'53
Corretaje » » » » » ...	»	6'54
Daño del recambio 1 1/2 °/₀ s/ » » ...	»	98'07
Nominal.....	»	6537'84

351.—Variaciones en el cálculo de la resaca.— 1.° Los *gastos variables* o proporcionales no siempre se toman sobre el nominal de la resaca, sinó que también puede referirse la *comisión al nominal* del efecto protestado, en cuyo caso se incluirá con los gastos fijos para aplicar la fórmula, y así el ejemplo anterior daría

Gastos fijos.....	Ptas	26'70
Comisión de 1 por mil s/ 6400 pesetas.....	»	6'40
Total gastos fijos para la fórmula.....	»	33'10

Hallando ahora el nominal de la resaca encontraríamos

$$R = \frac{100(6400 + 33'10)}{100 - 1'60} = 6537'70 \text{ pesetas.}$$

2.° Otras veces esa *comisión* se toma *sobre el importe* del nominal de la protestada más los gastos fijos, debiendo entonces ser también considerada la comisión como gasto fijo al aplicar la fórmula.

El ejemplo anterior en este caso sería:

Nominal del protesto y gastos.....	Ptas.	6426'70
Comisión de 1 por mil s/ el anterior.....	»	6'43
Total efectivo de la negociación.....	»	6433'13

y aplicando la fórmula tendríamos para el nominal de la resaca

$$R = \frac{6435'15 \times 100}{100 - 1'60} = 6537'75 \text{ pesetas.}$$

3.° Como el *corretaje* se cobra por la negociación de la resaca, o mejor dicho por la certificación que al pie de la resaca pone el corredor o agente de Bolsa, hay quien pretende que debe cobrarse *sobre el efectivo* que según el recambio resultase de dicha negociación.

Consiste este procedimiento en calcular el tanto por ciento que corresponde sobre el nominal de la resaca en equivalencia del 1 por mil sobre el efectivo, calculando el 1 por mil de la expresión $100 - c$ en la que c es el recambio.

En el anterior ejemplo resultaría:

Valor de la diferencia anterior: 100 — 1'50 = 98'50.

Corretaje por ciento, el 1 por mil de 98'50 = 0'0985.

Con esta alteración los tantos por ciento sumarían 1'6985 y el nominal que correspondería a la resaca

$$R = \frac{100(6400 + 26'70)}{100 - 1'6985} = 6537'74 \text{ pesetas.}$$

4.° Es necesario advertir que el corretaje tiene por mínimo 5 pesetas, así que siempre que el nominal de la letra no llegue a las 5000 pesetas, debe ser incluído el *corretaje entre los gastos fijos* para aplicar la fórmula.

La formación de la cuenta de resaca por cualquiera de los procedimientos de cálculo del nominal es idéntica, pues se reduce a ir consignando las partidas, calculando cada tanto por ciento sobre la cantidad que le corresponda y debiendo siempre resultar por suma de todas las partidas de la cuenta, un nominal igual al encontrado por el cálculo directo mediante la aplicación de la fórmula.

EJERCICIOS *números* **609** al **623.**



XXXV

ESTUDIO GENERAL DEL CAMBIO

352.—Definición.—El cambio es el trueque de una cosa por otra y pudiera admitir tantas variaciones como cosas sean susceptibles de cambiarse, pero siempre que no se indica otra cosa la palabra cambio se refiere al llamado *cambio de banca*, que es el único que ahora puede interesarnos

El *cambio de banca* es el conjunto de operaciones a que dan origen los cobros y pagos, teniendo por consiguiente dos significados o variedades principales según que el pago haya de hacerse en la misma plaza o en otra diferente de aquella en que se tratan las operaciones

El cambio en la misma plaza se denomina *cambio sobre plaza* y también *manual* o *real* porque consiste en la entrega de una clase de monedas para recibir otras diferentes.

El cambio de *plaza a plaza* se llama *cambio trayecticio* y consiste en la negociación de efectos de comercio.

También se llama cambio al precio que sirve de base a la negociación de efectos (**333**).

353.—División del cambio trayecticio.—Siendo esta clase de cambio la negociación de efectos de comercio pagaderos en otras plazas, lo mismo puede ser la plaza en que ha de hacerse el pago nacional que extranjera, y así el cambio trayecticio admite la división en nacional y extranjero, pero en las condiciones de desarrollo en que hoy se encuentra la Banca la negociación de efectos en moneda nacional ha quedado reducida al descuento bancario de dichos efectos.

Queda pues, a considerar solamente el cambio extranjero,

y así vemos que los que tratan cuestiones de cambio siempre que a él se refieren lo hacen para el cambio extranjero, hasta el punto que un sabio maestro de cuestiones bancarias (*) define el cambio como «*la potencia que tiene la moneda de un país para adquirir la moneda de otro país*» y añade que «hoy la palabra *cambio* va entendida con referencia a todas aquellas operaciones, en las cuales la moneda que se quiere adquirir está representada por efectos cambiarios girados sobre el extranjero, los cuales permiten la transferencia de sumas de un Estado a otro sin el transporte difícil, peligroso y costoso del numerario».

El cambio (ya sólo nos referiremos siempre al *cambio extranjero*) se distingue en directo e indirecto; es *directo* aquel en el que no son necesarias para el cumplimiento de la operación más plazas que aquella en que se opera (plaza calculadora) y la en que se ha de hacer el cobro o pago (plaza calculada); y es *indirecto* cuando además de las dos plazas principales del directo intervienen otras auxiliares, de un modo semejante a los giros indirectos del cambio nacional (**343**, 1.º).

El cambio manual, para el cálculo es sólo una forma del cambio directo.

354.—Precio del cambio. – El precio o *curso* del cambio es la cantidad de monedas de un Estado que son necesarias para adquirir en cierto momento un número determinado de monedas de otro Estado, bajo la forma de billetes, cheques, órdenes de banca o cualquier otro efecto de comercio.

El curso de los cambios puede ser *a la par, sobre la par* o *bajo la par*; es a la par cuando corresponde el precio al valor intrínseco (paridad) de la moneda cotizada con relación a aquella en que se cotiza (**171** y **172**), y está bajo o sobre la par cuando son diferentes el curso y la paridad.

355.—Expresión del precio de los cambios.—La expresión del cambio se llama *cotización* y para su conocimiento tendremos en cuenta la definición del precio, según la cual puede expresarse por una igualdad del tipo siguiente:

(*) Pasquale D'Angelo, *Trattato di Tecnica Bancaria* pág. 267, subrayado por nosotros.

a unidades de la moneda A a n días $<>$
$<> b$ » » » » B » n' »

Ejemplo:

154 dollars a 15 días $<>$ 400 pesos argentinos a 1 mes.

En la expresión general anterior del precio de los cambios queda en absoluto libre la voluntad para hacer variar uno o varios de los elementos con relación a los demás, e inmeditamente se ve el sinnúmero de combinaciones a que esta libertad pudiera dar origen, por lo que en la práctica las cotizaciones han establecido tipos perfectamente definidos para los plazos de las monedas y además se ha determinado que sólo una de las dos cantidades de moneda de la expresión pueda variar, permaneciendo la otra fija.

Ejemplo: Si se trata del cambio de los francos suizos en España, para cualquiera de los tipos de plazo siempre será fija la cantidad de francos y variará la cantidad de pesetas a que dichos francos equivalen, y diremos que en una fecha el cambio de los francos suizos es de 127 pesetas por 100 francos, y que en otra fecha es de 132'50 también pesetas por los mismos 100 francos.

Esos dos *términos monetarios de referencia del cambio* reciben los nombres de *cierto* e *incierto* respectivamente según que se trate del término fijo o del variable, y así en el ejemplo anterior los francos suizos son el término fijo o cierto y las pesetas el término incierto o variable.

La *forma de cotizar en cada plaza* las monedas que le son extranjeras hace que se diga que en ella se da el cierto cuando el término fijo es su moneda nacional, y que da el incierto cuando la moneda nacional de dicha plaza constituye el término variable de la expresión del cambio.

Ha de advertirse que siempre las denominaciones cierto e incierto, sinónimas de fijo y variable, se refieren a la moneda nacional en la plaza que se hace la cotización.

Se da el nombre de *base del cambio* al término fijo de la expresión del cambio y por consiguiente, con relación a ella diremos que da el cierto cuando la base del cambio se expresa en su moneda nacional y que da el incierto si dicha base corresponde a la moneda extranjera de la misma plaza.

Ejemplo: Las plazas españolas dan el incierto para el cambio con Suiza

porque es la peseta la moneda que varía de unas cotizaciones a otras; pero al decir que en Londres el cambio de los dollars es de 4'2945 por libra esterlina en una fecha, y que en otra ese mismo cambio es de 4'5206 dollars por una libra también, vemos que Londres da el término cierto en el cambio con los Estados Unidos.

356.—Vencimiento de los cambios—Las múltiples combinaciones a que pueden dar origen los plazos de las monedas cotizadas se reducen en la práctica a plazos típicos, de los cuales *el plazo que se refiere a la moneda nacional es de entrega inmediata*, es decir que siempre la moneda nacional de la plaza en que se opera se paga al contado, quedando sólo esos plazos tipos para la moneda extranjera.

Los *plazos tipos* a que se refieren las cotizaciones de moneda extranjera es el que se llama *vencimiento del cambio*, pues al tratarse de precio de un efecto de comercio es necesario dejar bien determinado ese vencimiento a causa de la diversidad de los mismos, habiéndose adoptado universalmente los de vista, orden bancaria telegráfica y plazo.

La cotización *a vista* suele expresarse haciendo referencia al cheque, tanto por ser éste el documento único cuyo vencimiento es siempre a la vista, cuanto por ser el más comunmente empleado para los giros por mediación de los Bancos. El plazo a que corresponde esta cotización en la expresión general es el que tarde el correo desde la plaza en que se opera a la extranjera a que se refiere el cambio.

La cotización por *orden telegráfica* sólo tiene de plazo el día que el Banco precisa para hacer la entrega o transferencia (**343**) a que se refiere la orden. El origen de esta cotización moderna está en evitar el retraso que originaba para los cobros y pagos la remesa de efectos a vista, particularmente para plazas de ultramar o muy distantes.

La cotización *a plazo* presenta dos modalidades según que haya de contarse desde la fecha, o sea plazo vista. El vencimiento de la cotización en cualquiera de las dos formas es el que corresponde al efecto en la forma conocida (**311**).

Prácticamente la diferencia de las dos cotizaciones a plazo es insignificante cuando se trata de plazas del mismo continente, y entonces se prefiere la cotización a plazo fecha; pero cuando la plaza cotizada es de diferente continente que la que

cotiza, entonces la diferencia de ser plazo vista a ser plazo fecha es de gran importancia y suele preferirse el plazo vista, para evitarse que por causa del correo pudiera vencer el efecto antes de llegar a la plaza pagadora. La cotización a plazo vista es la que suele emplearse entre Europa y los países de la América del Sur, Indias, China, Japón, Africa y Oceanía.

357.—Bases del cambio. —Las bases del cambio varían con las costumbres de cada plaza, pero el desarrollo del comercio y la facilidad de los cálculos que pueden originar las cuestiones de cambio han ido reduciendo a los menos tipos posibles estas bases, y hoy puede formularse la regla de que *para valores de la unidad monetaria con poca diferencia entre dos países, la base del cambio es 100, y cuando la diferencia de valor de las dos unidades monetarias es grande, entonces la base del cambio es una unidad.*

Esta regla no es ni puede ser absoluta, aunque las excepciones a la misma son las de comparar los valores monetarios modificados en estos últimos años, pues como la base de cotización se estableció con los valores de las antiguas monedas se ha conservado la misma base establecida antes. Como consecuencia de la segunda parte de la regla, tenemos que la gran mayoría de las cotizaciones unitarias tienen en los dos países como base del cambio la moneda de más valor, y por tanto, el país a que corresponde dicha moneda dará el cierto al otro país, como sucede con las cotizaciones inglesas referidas a la libra esterlina, que por ser esta moneda la de más valor Londres da el cierto a los otros países.

358.—Reducción de cotizaciones. —Muchas veces es necesario comparar las cotizaciones con el valor intrínseco de las monedas cotizadas y referir a cotización percentual otra unitaria, para que se exprese el sobreprecio o la depreciación de una moneda respecto de otra, problema que en ambos casos es una aplicación sencilla del tanto por ciento (**6**), si es que la cotización no fuere percentual, pues en ésta el mismo precio del cambio indica el tanto de pérdida o de premio.

Ejemplo: El peso argentino se cotiza en Londres a 38 peniques por peso. Hallar la depreciación de la moneda argentina sabiendo que la paridad es de 5'045 pesos por libra esterlina.

Refiriendo la paridad a peniques por peso, para que sea igual a la base de cotización, resulta un peso equivalente a

$$240 : 5'045 = 47'57 \text{ peniques}$$

lo que dará para cotización percentual del peso

$$\frac{100 \times 38}{47'57} = 79'88$$

siendo la depreciación de $100 - 79'88 = 20'12\ \%$.

EJERCICIOS *números* **631** al **638.**

359.—Listines.—Los listines son unos documentos en los que se leen los precios de los cambios cotizados en una fecha determinada, y pueden ser oficiales o privados, según que sean publicados por las Bolsas en donde se hace diariamente la cotización de los cambios o por Bancos y banqueros que los distribuyen a sus clientes.

Los listines indican diferentes especies de precios, como el *precio medio* que resulta en el día para todas las operaciones de cada clase de papel y moneda cotizado; el precio *máximo o mínimo* en iguales circunstancias; el precio que quieren los vendedores *(Papel)* y el que ofrecen los compradores *(Dinero)*; el precio de *apertura* o primero cotizado; el de *cierre* o último del día; el último anterior o *precedente*, y en todo caso con encabezamiento que facilite la lectura del listín. Estos precios no son indicados todos en los diferentes listines, sino que unos prefieren tales o cuales cambios y otros los de otra clase.

El cambio de cierre es el más importante, porque por él se rigen las transacciones de fuera de la Bolsa y es el que más suele estar indicado en los listines privados.

Puede apreciarse en las cotizaciones de los listines que en ellos aparecen los cambios expresando únicamente el término incierto y sin decir cuál sea el término cierto, porque las bases del cambio son conocidas por los que han de consultarles y como siempre son las mismas, no hay por qué reproducirlas, una vez que en los mismos listines ha sido anunciada cada base al tiempo de establecerla y después sus modificaciones.

360 -Usos de cotización en diferentes plazas.—En cada plaza se hacen las cotizaciones de modo también diferente, y como no en todas se cotizan todas las monedas, de ahí que sea conveniente y en muchos casos indispensable el conocimiento de las formas de cotización de una plaza, cuyo detalle se encuentra en la *tabla* **XXXVIII**.

361.—Causa de las variaciones del cambio.—El precio de los cambios, como todos los de mercado, sufre alteraciones en sentido de ascenso y descenso, cuyas causas más importantes son:

1.ª La *relación del movimiento comercial* entre las dos plazas, o sea la medida respectiva entre las cantidades que una plaza tiene que cobrar de otra y de las que tiene que pagar, si bien estas relaciones en la situación actual no se refieren a plazas sino a países. Esta relación está expresada por la

oferta y demanda de moneda extranjera; así, si Francia debe hacer muchos pagos a Holanda y es pequeña la cantidad que Francia ha de cobrar de Holanda, resultará que la moneda de este último país tendrá un exceso de valor con respecto a la francesa por causa de esa diferencia.

2.ª Del *tipo de descuento* de una plaza con relación a otra, pues si como sabemos el descuento de los efectos se hace al tipo de la plaza pagadora **(341)**, siempre se buscaría una mayor oferta a plazo corto con relación al plazo largo en la plaza de tipo alto, y este mayor tipo de descuento retrae la oferta de moneda del país en que el tipo es más elevado, modificando el cambio que resultaría según la causa que antes consideramos

3.ª La *relación entre las monedas efectivas y la circulación fiduciaria* de billetes en el país pagador, pues a medida que el billete aumenta en circulación con relación a la moneda efectiva disminuye el valor de la moneda, y más disminución sufre si el billete tiene curso forzoso.

4.ª La *situación del país pagador* en todos los aspectos de su economía influye también en las variaciones del cambio, pues cuanto más próspera es esa situación, mayor es también el valor de su moneda en relación a las de los demás países.

5.ª Los *gastos y dificultades del transporte de numerario*, pues como todos los cobros y pagos se refieren indirectamente a la cantidad de oro que puede obtenerse **(135)**, una modalidad de los pagos internacionales consiste en suplir el medio bancario por la remesa de lingotes y monedas, y cuando este medio resultase más barato que el otro es indudable que se preferiría, y aumentando los gastos y dificultades de este transporte aumentará en la misma proporción el valor de la moneda de la plaza acreedora.

362.—Puntos de oro. - Con el nombre de *punto del oro* y más comunmente con el inglés de *gold-point* se designa el límite de las oscilaciones del precio de los cambios, determinada por el coste de la remesa de numerario, que comprende las partidas siguientes:

a) El valor de las monedas que se remesan o de los lingotes metálicos si se envían éstos, valor que será el comercial **(141)** y que se halla integrado por la paridad de las monedas **(171)**, la comisión del comerciante de cambios o Banco, y el premio que pueda tener la especie metálica deseada sobre el medio de pago —metálico o de billete—.

b) Los gastos especiales del embalaje, que en la moneda exigen un mayor cuidado para tener mayor seguridad del buen fin de la remesa.

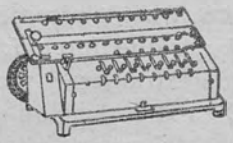
c) Los gastos de transporte y de seguro de la remesa.

d) La pérdida de intereses del capital remitido durante el tiempo que dura la remesa, pues en él, dicho capital carece de disponibilidad para la producción.

Antes se consideraba también el punto de la plata (*silver point*); pero al perder la plata su valor como medio de pago internacional dejó también de ser este punto tope de los cambios.

363.—Paridad práctica.—Es una variación del punto del oro sin más que considerar la paridad intrínseca en vez del valor comercial de las monedas que se remesan.

Podemos pues, decir que la *paridad práctica* es igual a la paridad intrínseca que corresponde a la base del cambio aumentada de los gastos del embalaje, transporte y seguro y de los intereses que se pierden cuando se trata de comprar la moneda extranjera, y disminuída de esos mismos gastos y de los intereses que se ganan cuando se trata de vender moneda extranjera, ya que con la venta no es preciso aguardar a la llegada de la remesa de metálico para tener disposición del valor.



XXXVI

CAMBIO DIRECTO

364.—Cálculo del costo y derivados.—Los cálculos sobre los cambios tienen por objeto principal la valoración en moneda nacional de cierta cantidad de moneda extranjera, y como objetivos derivados el conocimiento de los demás elementos que intervienen en estas operaciones.

Debe entenderse siempre, que hay que tomar como nacional la moneda de la plaza en que se considera efectuada la operación, o sea la de la plaza calculadora (**353**).

Consideraremos primero el caso de compraventa de moneda extranjera sin gasto ninguno para la operación, comprendiendo en este caso al cambio manual o de monedas efectivas, y después pasaremos a considerar los casos en que haya gastos inherentes a la operación.

Para cualquiera de esas dos distinciones se tendrá siempre la variación que puede determinar el que la cotización sea dando el cierto o el incierto, y así tendremos:

1.° *Cálculo en plazas que dan el incierto.*—Representando por M_e la moneda extranjera y por M_n la moneda nacional y llamando C a la cotización o término variable del cambio y B a la base del mismo o término fijo, el valor de una unidad de moneda extranjera estará dado por $\frac{C}{B}$, al cual podemos llamar siempre el *curso unitario* y el valor de todas las M_e monedas extranjeras compradas o vendidas será:

$$M_n = M_e \times \frac{C}{B} \qquad [1]$$

de cuya expresión podemos decir que *para hallar el valor de*

cierto número de monedas extranjeras en monedas nacionales cuando en las cotizaciones se da el incierto, se multiplica el nominal de moneda extranjera por la cotización unitaria.

Ejemplo: Hallar el valor de 36800 liras que se han comprado a un Banco de Zaragoza, donde el cambio con Italia es de 31'45 %.

La cotización unitaria en este caso es de 31'45 : 100 = 0'3145, luego el valor del total de liras compradas será:

$$36800 \times 0'3145 = 11573'60 \text{ pesetas.}$$

2.º *Cálculo en plazas que dan el cierto.* Continuando con igual representación que antes, el valor del curso unitario será $\frac{B}{C}$ y el que tratamos de encontrar

$$M_n = M_e \times \frac{B}{C} \qquad [2]$$

sirviendo para este caso la misma regla que para el anterior, pues lo único que varía es la forma de determinar el curso unitario que es inversa en uno respecto del otro caso.

Ejemplo: Cotizándose las pesetas en Londres a 30'50, se desea saber que cantidad de £ costarán en dicha plaza 25000 pesetas sobre Barcelona.

Como la cotización de la peseta en Londres es a base del cierto libra esterlina por el incierto pesetas, el curso unitario será $\frac{1}{30'50}$ y el valor de pesetas compradas o vendidas

$$25000 \times \frac{1}{30'50} = \frac{25000}{30'50} = 819'672 \text{ £} <> 819\text{-}13\text{-}5 \text{ (*)}$$

3.º *Cálculo de los otros elementos de la fórmula.* – De cualquiera de las dos fórmulas anteriores podemos deducir el valor de los demás elementos y tendremos:

PLAZA INCIERTA		PLAZA CIERTA	
[3]	$M_e = M_n : \frac{C}{B}$	$M_e = M_n : \frac{B}{C}$	[4]
[5]	$C = \frac{BM_n}{M_e}$	$C = \frac{M_e B}{M_n}$	[6]
[7]	$B = \frac{M_e C}{M_n}$	$B = \frac{CM_n}{M_e}$	[8]

(*) En esta forma se escriben las libras esterlinas, chelines y peniques de una misma cantidad.

de donde podemos establecer las reglas siguientes:

a) El valor de la moneda extranjera que puede adquirirse o se necesita vender, para que su coste o producto sea una cantidad determinada de moneda nacional, es igual al cociente de esta moneda nacional por el curso unitario.

b) El cambio a que se ha efectuado una operación de compra o venta de moneda extranjera, es igual al producto de la base del cambio por el valor de la operación en la moneda en que se expresa el cambio, y dividido por el valor de la operación en la moneda a que se refiere la base.

c) La base del cambio entre dos países está dada por el cociente que resulta al dividir por una cantidad de moneda nacional, el producto de la cantidad de moneda extranjera equivalente a dicha moneda nacional por el cambio a que se ha hecho la operación, aunque esta regla no tendrá ninguna utilidad práctica, pues que la base de los cambios es un elemento invariable que nunca necesitará calcularse, por lo que en adelante prescindiremos de su deducción.

Ejemplos: 1). Hallar la cantidad de francos suizos que se podrán comprar en Madrid con 6000 pesetas siendo la cotización sobre Zurich de 128 %.

Como Madrid es plaza incierta hemos de servirnos de la fórmula [5] y encontraremos para valor del curso unitario 128 : 100 = 1'28 lo que nos dará para el valor buscado

$$6000 : 1'28 = 4687'50 \text{ francos suizos.}$$

2). Calcular la cantidad de florines que deberán venderse en Londres para obtener un producto de £ 950-12-4 al cambio de 11'90.

Siendo la cotización de los florines en Londres en base a 1 £, la cotización unitaria es $\frac{1}{11'90}$ y porque Londres es plaza cierta aplicaremos la fórmula [4] y tendremos:

Valor en fracción decimal de las libras efectivas, 950'61$\widehat{6}$.

Florines que deben venderse

$$950'61\widehat{6} : \frac{1}{11'90} = 11312'54 \text{ florines.}$$

3). Averiguar el cambio de una venta de 6470 pesos argentinos en Madrid para que el producto obtenido ascienda a 15851'50 pesetas.

Deberemos valernos de la fórmula [5] porque Madrid es plaza incierta, y como el peso argentino se cotiza en base a 1 tendremos:

Cambio de la operación: $\frac{15851'50}{6470} = 2'45$

4). Calcular el cambio que corresponde en Buenos Aires a los francos

franceses sabiendo que la compra de un efecto de francos 18000 ha costado en dicha plaza 3050 pesos.

Como la plaza de Buenos Aires da el cierto a las plazas europeas nos corresponde aplicar la fórmula [6] y prescindiendo del factor *B* por tratarse de cotización unitaria tenemos:

$$C = \frac{18000}{3050} = 5'90 \text{ francos por peso.}$$

EJERCICIOS *números* **639** al **642; 644** al **646; 648; 649; 664; 665** y **667** (1.° y 2.°); y **CLXIII** al **CLXVII**.

PROBLEMAS Y FACTURAS, los *números* **647; 652; 669; CLVI** al **CLXII**.

365.—Gastos en las operaciones de cambio.—Las operaciones de cambio extranjero originan gastos idénticos a las de la negociación de efectos en moneda nacional, cuales son los de timbre (**322**), de correo, pérdidas por desplazamiento, y hasta corretaje, pero ya hemos dicho que todos estos gastos se calculaban en las respectivas facturas de los efectos en moneda extranjera (**341**) y siempre será necesario tener en cuenta en cuál de las dos clases de moneda han de ser pagados, si en la de la plaza calculadora o en la de la plaza calculada.

De todos los gastos que pueden ocurrir sólo merece especial consideración el de corretaje, que siempre habrá de pagarse en la moneda de la plaza calculadora, puesto que en ella se hará la negociación de la moneda y en ella cobrará el intermediario su remuneración. El corretaje es un gasto que varía sobremanera de una a otra plaza aún dentro del mismo país y que además en la mayoría de los casos de compraventas de monedas del comercio internacional se hace por los Bancos a un cambio que se denomina *franco tout* y que quiere decir que en él se hallan comprendidos los gastos de la operación, y como aunque así no fuese en las transacciones directas de Banco a Banco de plaza diferente se suprime el intermediario corredor, tampoco habrá el gasto que a él corresponde, quedando únicamente este gasto para pocas operaciones que se hagan cuando las dos partes contratantes residan en la misma plaza. Por esta causa sólo diremos que el tipo mundial de los corretajes oscila entre $^1/_2$ y 1 por mil, siendo para España de 1 por mil sobre el nominal en moneda extranjera a cobrar de cada parte

contratante cuando la cotización sea por bajo de la par y $1\frac{1}{2}$ por mil sobre el efectivo en igual forma si la cotización es superior a la par.

366. - Relación entre los cursos de diferente plazo. —La relación que debería existir entre dos cambios que en la misma plaza tiene una moneda determinada para plazos diferentes, debiera ser siempre igual a la diferencia que corresponde al descuento del cambio a plazo corto según el tanto por ciento de la plaza pagadora.

Efectivamente, si por ejemplo, la libra esterlina se cotiza en Barcelona a 30'60 al plazo vista es indudable que al plazo de 90 días vista habría de valer menos, puesto que la compra de libras a este segundo plazo no permite disponer de ellas hasta pasados esos 90 días de diferencia o sufriendo de otro modo el descuento de las libras por esos 90 días, y este descuento es equivalente en sus resultados refiriéndole ya al nominal de la moneda extranjera o ya al cambio.

Si representamos el cambio al plazo corto por C y la base del cambio por B según lo que decíamos del descuento de efectos sobre el extranjero (**341**) y descontamos la base B para luego multiplicar el líquido resultante por el cambio al plazo corto, el líquido que en moneda extranjera tendremos será (**279**)

$$\frac{B(D - n)}{D}$$

y como este líquido es el que hemos de multiplicar por el cambio para hallar el valor en moneda nacional, tenemos

$$\frac{B(D - n)}{D} \times \frac{C}{B} = \frac{B(D - n)C}{DB} = \frac{(D - n)C}{D} \qquad [1]$$

cuya última expresión nos dice que puede quedar invariable la moneda extranjera siempre que se opere sobre el cambio descontando éste en vez de la moneda extranjera.

Si la cotización se hubiese referido a plaza que diera el cierto la expresión que relacionaría entonces a los dos cambios no podría ser la misma anterior, puesto que al descontar la moneda extranjera no es la base del cambio lo que descon-

tamos sino el término variable que es el denominador de la fórmula, por consiguiente, el líquido

$$\frac{B(D-n)}{D}$$

al multiplicarlo por el curso unitario, tratamos de hallar la variación de C para no descontar la moneda total del efecto, permaneciendo igual el resultado de la fórmula, así que el resultado en cualquier caso tendrá que ser

$$\frac{B(D-n)B}{DC}$$

y separando el valor moneda extranjera B

$$B \times \frac{(D-n)B}{DC}$$

en donde hemos de pasar al denominador todos los elementos del descuento para que afecten al cambio y nos den a conocer la variación que éste experimenta, con lo cual resulta

$$B \times \frac{B}{\frac{DC}{D-n}} = \frac{B}{\frac{D}{D-n}C} \times B \qquad [2]$$

diciéndonos este denominador que la relación en caso de plaza cierta es la inversa de la de la plaza incierta.

Las expresiones anteriores sirven por consiguiente para referir un cambio cualquiera a otro de plazo más largo mediante el descuento durante los días de diferencia, descuento que se hace según decíamos sobre el cambio de plazo corto, pues que en las fórmulas del párrafo **364,** [1 y 2] obtendremos el mismo resultado descontando el factor M_e que si el descuento le hacemos en el factor C.

Cuando se trate de hallar la relación entre un cambio y otro de plazo menor, entonces deberíamos emplear, no la fórmula del valor efectivo del descuento que antes hemos utilizado, sinó la del valor nominal (**279**), y tendremos para la relación de los cambios en su elemento variable de plaza incierta.

$$\frac{CD}{D-n} \qquad [3]$$

Para la plaza cierta también ahora sería la relación la inversa de la anterior como no podía menos teniendo.

$$\frac{(D-n)C}{D} \qquad [4]$$

Ejemplos: 1). Hallar el precio del cambio para 3 meses en la plaza de Bilbao sobre la de Lisboa, si en esta última el descuento es de 5 °/₀ y el cambio en Bilbao a vista es de 0'26 pesetas por escudo.

La diferencia de los dos plazos es de 90 días menos los que correspondan al correo, para el que consideraremos 5 fechas, y aplicaremos el descuento de TBN + 1 °/₀ o sea el 6 °/₀ y resultará:

$$\text{Cambio a 3 meses } \frac{(6000 - 85) \times 0'26}{6000} = 0'2563 \text{ pesetas por escudo.}$$

2). Determinar el cambio que corresponderá a 60 d/v en Londres sobre Nueva York siendo el descuento en esta plaza 4 °/₀ y el cambio a vista en Londres de 4'60 dollars por £.

Nos encontramos con plaza cierta, por lo que hemos de servirnos de la relación que indica el denominador de la expresion [2] y siendo los dos plazos de vista no hay que considerar el correo, con lo cual el valor del cambio pedido será:

$$\frac{4'60 \times 7300}{7300 - 60} = 4'6381$$

pues es indudable, que al tardar más en disponer de la cantidad de moneda extranjera comprada, hemos de poder adquirir mayor cantidad con la moneda nacional.

3). ¿Qué cambio corresponderá a la orden cablegráfica sobre Habana para la plaza de Madrid donde el dollar se cotiza a vista a 7'15 debiendo considerar por correo 18 días y siendo el tipo de descuento en Cuba el 5 °/₀?

Por la aplicación de la relación [3] tendremos para el cambio de la orden cablegráfica:

$$\frac{7'15 \times 6000}{6000 - 18} = 7'1715$$

4). Hallar el cambio a vista que correspondería al de 70 °/₀ para 4 meses en una moneda cuyo tipo oficial de descuento en el país que es nacional es de 4 °/₀, el correo tarda de una a otra plaza 10 días y la cotización se hace dando el cierto.

Deberemos servirnos de la relación [4] obteniendo el resultado siguiente, por tener una diferencia de 120 — 10 = 110 días el plazo cotizado y el plazo vista que se calcula.

$$\text{Cambio a vista } \frac{70 \times (7200 - 110)}{7200} = 68'93\ \%$$

EJERCICIOS *números* **670** al **675; CLXXII** al **CLXXVI.**

367.—Efectos a diferente plazo que el de cotización. —Los efectos en moneda extranjera que no se hallan extendidos al mismo plazo que el de la cotización, se descuentan o añaden intereses por los días de diferencia, al tipo de la plaza pagadora con el aumento de la banca privada (**341**), y después el líquido de este descuento o el valor acumulado es el que se considera como moneda extranjera sobre la que se hacen los cálculos por las fórmulas conocidas (**364**); pero este procedimiento es solamente aplicable a las *letras hechas*, que son las que se presentan al Banco para su negociación extendidas por el importe de otras operaciones que hay que cobrar o pagar, pues si se trata de *efectos de puño*, que son los que se extienden en el momento de la operación por el nominal que se pida o resulte de los cálculos, es necesario modificar las fórmulas conocidas por causa de este nuevo elemento, advirtiendo que en los casos de efectos de puño casi siempre se refieren los cálculos y las operaciones mercantiles a un sólo efecto, y para los efectos hechos lo mismo se refieren a uno sólo que a un número diverso e ilimitado.

Una vez que conocemos la relación que guardan dos cambios de diferente plazo, bastará que en las fórmulas sustituyamos el cambio cotizado por el correspondiente al plazo del efecto, y tendremos las fórmulas que en los dos casos pueden resultar.

1.° *Plazo del efecto más largo que el de cotización.*— La sustitución ha de hacerse, poniendo en lugar de C

$$\frac{(D-n)C}{D} \qquad \text{o el} \qquad \frac{CD}{D-n}$$

según se trate de plaza incierta o cierta respectivamente, con lo que se tiene:

PLAZA INCIERTA	PLAZA CIERTA
$M_n = \frac{M_e C(D-n)}{BD}$	$M_n = \frac{M_e BD}{C(D-n)}$
$M_e = \frac{M_n BD}{C(D-n)}$	$M_e = \frac{M_n C(D-n)}{BD}$

con cuyas fórmulas podremos determinar la moneda nacional a que equivale una cantidad determinada de moneda extran-

jera o viceversa, según indica la respectiva incógnita, pues los demás elementos de las fórmulas no se necesitan determinar en la práctica, sinó es para reducir cambio a diferente plazo, que fué lo que hicimos en el párrafo anterior.

Ejemplos: 1) Hallar el valor que obtendremos en la negociación de un efecto de 25000 francos sobre París, a 45 días fecha, siendo el cambio de nuestra plaza de 40'60 °/₀ para los cheques y el descuento en París 4 ½ °/₀.

Las plazas españolas son todas inciertas por lo que se trata de un caso que resuelve la primera fórmula de estas plazas y calculando cinco días de correo resultará:

$$M_n = \frac{25000 \times 40'60(6545 - 40)}{6545 \times 100} = 10087'968 \text{ pesetas (*)}$$

2). ¿Qué cantidad de coronas dinamarquesas podremos comprar a 30 días vista en Barcelona si el cambio a vista en esta plaza sobre Copenhague es de 140 °/₀, el tipo de descuento en esta última plaza es de 5 °/₀ y disponemos de 20000 pesetas?

Hemos de servirnos de la segunda de las fórmulas para plaza incierta y encontraremos:

$$M_e = \frac{20000 \times 100 \times 6000}{140(6000 - 30)} = 14357'50 \text{ coronas.}$$

3). ¿Cuánto costarán en Londres 5000 $ en un efecto a 40 días vista sobre Nueva York si el cambio a vista para esta clase de moneda es de 4'80 y el tipo de descuento en Norteamérica es el 4 °/₀?

Por tratarse de una plaza que da el cierto nos serviremos de la fórmula del grupo correspondiente teniendo en cuenta que en Nueva York se considera el año y los meses por sus verdaderas duraciones y con ellos tendremos para el valor buscado:

$$M_n = \frac{5000 \times 7300}{4'80(7300 - 40)} = £\ 1047 - 8 - 1'4$$

puesto que operando en Londres la moneda nacional han de ser las libras esterlinas.

4). Calcular el número de rupias a 15 d/v sobre Bombay, que podremos adquirir en Tokío con 10000 yens, si el cambio a vista en la plaza calculadora sobre Bombay es de 96 °/₀ y el descuento en esta última es de 5 ½ °/₀.

Para este caso nos serviremos de la última fórmula y emplearemos el divisor fijo entero, despreciando el error porque el objeto principal ahora es aclarar el procedimiento de que nos ocupamos, y el lector ya conoce el modo de subsanar el error que pudiera resultar. Con ello el resultado sería:

$$M_e = \frac{10000 \times 96(5615 - 15)}{100 \times 5615} = 9574'55 \text{ rupias.}$$

(*) En estos cálculos aumentamos el tipo de descuento en 1 °/₀ **(341).**

2.° *Plazo del efecto más corto que el plazo de cotización.* — Según las relaciones que hallamos en el párrafo anterior para los cambios cuando se tratase de reducción de uno cualquiera a otro de plazo más corto, los factores que en las fórmulas fundamentales (**364**) se han de introducir son respectivamente

$$\frac{D}{D-n} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{D-n}{D}$$

según se trate de plaza incierta o cierta.

Fijándonos ahora en estos factores y en los que introdujimos en el caso anterior podemos apreciar que el que ahora corresponde a la plaza cierta correspondía entonces a la incierta y viceversa, lo que indica que son aplicables a este caso las fórmulas del anterior, cambiando las plazas a que se refieren; es decir, que ahora utilizaremos para las plazas españolas y todas las demás inciertas, las que antes dábamos para plazas ciertas y viceversa.

Por consiguiente la resolución de ejemplos ahora no sería sinó una repetición de los anteriores, por lo que dejamos de hacerlo.

También pudiéramos haber deducido las fórmulas anteriores valiéndonos del factor de descuento correspondiente al descuento racional, pero ni en la práctica se necesitará su empleo, ni establecen más alteración que la sustitución de la diferencia $D - n$ por la suma $D + n$, y conservando siempre en las fórmulas respectivamente en el numerador el término del factor de descuento que corresponda según que el resultado haya de aumentar o disminuir.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, las fórmulas fundamentales por medio del descuento racional para los efectos de que nos ocupamos, serían:

$$M_n = \frac{M_e CD}{B(D+n)}$$

para plaza incierta y plazo del efecto más largo que el de cotización y

$$M_n = \frac{M_e B(D+n)}{CD}$$

para plaza cierta y la misma variación en los plazos. De estas fórmulas se deducirían todas las demás resolviendo las ecuaciones que las constituyen, no haciéndolo nosotros por su falta de utilidad práctica.

368. — Procedimientos para el cálculo de los efectos

con plazo diferente al de cotización.—Suele decirse por los que tratan estas cuestiones que son tres los procedimientos que se pueden seguir para los cálculos de esta clase de efectos sobre el extranjero; procedimientos que son sólo momentos diferentes en la aplicación del factor de descuento cuando se hacen los cálculos por el método analítico.

Como este método analítico es el que hemos empleado nosotros para la deducción de las fórmulas, señalando las diferentes operaciones que es preciso hacer para llegar al resultado final, pero dejándolas indicadas como correspondía para hacer nuevos cálculos y obtener la fórmula fundamental; habiendo seguido pues, nosotros este método analítico, esos tres momentos diferentes de aplicación del factor de descuento corresponden a la determinación de la cantidad de moneda extranjera que se compra o vende, (no debe olvidarse que nos referimos a la operación directa fundamental), a la determinación del cambio que haga referencia al nuevo plazo, o a la modificación del resultado que se obtendría de no existir la diferencia de dichos plazos. Todos estos tres momentos han sido perfectamente considerados por nosotros en el mismo orden en que ahora los enumeramos.

Cuando se aplica el factor de descuento al nominal del efecto se dice que se *nivela el efecto*, y éste es el procedimiento seguido en el párrafo **341** y que se utiliza en la práctica para el caso en que fuesen varios los efectos sobre el mismo país, porque facilita los cálculos por la aplicación una sola vez del factor de descuento para todos los efectos.

El segundo momento de aplicación del factor de descuento es el que hicimos en el párrafo **366** al cambio, el cual en las obras suele llamarse *rebatimiento o nivelación del cambio*, sirviendo en la práctica para tener en cuenta el beneficio o quebranto que puede resultar por la diferencia de este rebatimiento con la que hay entre dos cotizaciones simultáneas de plazos diferentes, y cuyo estudio cae dentro del campo de la especulación.

Por fin, la aplicación del factor de descuento al resultado de la operación si no hubiese diferencia de plazos, se dice que es método de *operar sobre el efectivo*, y que ya dijimos en el párrafo anterior para qué casos prácticos convenía seguirlo.

EJERCICIOS *números* **676** al **678; 680; 681; 683; 684; 686; 687** y **689** con un sólo plazo y los **701; 702; 705** y **706** con dobles diferencias de plazos.

PROBLEMAS Y FACTURAS, los ejercicios *números* **679; 703; 690; 691; 693** al **695; 697; 704; CLXXXIV** y **CLXXXV**.

369 - Fórmulas con gastos. — Decíamos al tratar de los gastos que puede haber en las operaciones de cambio (**365**), que solamente merecen ser tenidos en cuenta los gastos de corretaje que deben ser siempre pagados en la moneda de la plaza calculadora, pero que pueden referirse a un tanto por cuanto de la moneda nacional o de la moneda extranjera, con lo que al hacer intervenir este elemento en las fórmulas para el caso de plaza incierta tendremos como fundamental

$$M_n = M_e (1 \pm g) \frac{C}{B} \qquad [1]$$

después de haber reducido a tanto por uno el gasto que se refiere a la moneda extranjera; y para el caso que se refiera a la moneda nacional resultará:

$$M_n = M_e \times \frac{C}{B} (1 \pm g) \qquad [1']$$

ya que los dos primeros factores de la expresión son el valor en moneda nacional según la fórmula fundamental.

Puede apreciarse que el elemento gastos cuando se refiere al nominal o al efectivo es siempre un factor que lo mismo puede aplicarse a uno que a otro elemento de las fórmulas, sucediendo con él lo mismo que con el descuento según vimos en el párrafo anterior.

Además del gasto proporcional que acabamos de hacer intervenir, pudiera haber otros gastos independientes del nominal de la operación a los que representaremos por G y los cuales intervienen en este caso lo mismo que en las operaciones de moneda nacional (**346,** [4]), con lo que las fórmulas quedan comprendidas en la siguiente:

$$M_n = M_e \times \frac{C}{B} (1 \pm g) \pm G \qquad [2]$$

en la que los signos aditivos corresponden al caso de compra

de moneda extranjera y los sustractivos pertenecen al caso de venta para hallar el producto líquido de la misma.

Para cuando se trate de plaza cierta los dos nuevos elementos intervienen en igual forma que para la plaza incierta, teniéndose como fórmula general

$$M_n = M_e \times \frac{B}{C}(1 \pm g) \pm G \qquad [3]$$

en la que los signos tienen el mismo significado y también se hallan reducidos a tanto por uno los gastos proporcionales.

Queda por considerar el *caso en que además de haber gastos haya diferencia entre los plazos de la cotización y del efecto*, y entonces también los gastos proporcionales se harán intervenir como en los casos anteriores, multiplicando al resultado según esas diferencias de plazos (**367**), y en cuanto a los gastos independientes siempre constituyen un sumando o sustraendo del resultado con lo que tendremos las dos fórmulas generales fundamentales

$$M_n = \frac{M_e C(D-n)(1 \pm g)}{BD} \pm G \qquad [4]$$

para la plaza incierta, y

$$M_n = \frac{M_e BD(1 \pm g)}{C(D-n)} \pm G \qquad [5]$$

para la plaza cierta.

Ejemplo: Hallar el valor producido por la venta de 125000 francos en Madrid al cambio de 41'30 %, si el efecto es una letra a 15 d/v debiéndose pagar el corretaje oficial y una comisión de 0'20 %.

Se trata de un efecto a distinto plazo que el de cotización con diferencia de 15 días (**360**) en el que los gastos que hay que pagar deben hacerse intervenir con el signo negativo porque disminuyen el producto, y después de reducir a tanto por uno la comisión tomada por el Banco sobre el efectivo de la negociación y luego el corretaje, y considerando que el tanto de descuento a aplicarse habría de ser de 6 %, tendremos:

$$\frac{125000 \times 41'30\ (6000 - 15)(1 - 0'005)}{100 \times 6000} = 51341'45 \text{ pesetas.}$$

Al mismo resultado que por la fórmula llegaríamos por medio del método analítico, como puede apreciarse en la siguiente comprobación:

Valor nominal del efecto vendido	Francos	125000
Descuento durante 15 días al 6 °/₀ $\frac{125000 \times 15}{6000}$	»	312'50
Líquido en moneda francesa.....	»	124687'50
Valor del líquido anterior al cambio cotizado $\frac{124687'50 \times 41'30}{100} = 51495'94$ Ptas.....		51495'94
Comisión sobre el efectivo, 2 por mil		102'99
Corretaje, 1 °/₀₀.....		51'50
Líquido producido, de acuerdo con el resultado de la aplicación de la fórmula.....	Pesetas.	51341'45

Hay que tener en cuenta siempre que de estas operaciones se trate que la determinación del líquido en moneda extranjera se ha de hacer en la forma que decíamos en el párrafo **341,** siendo siempre sobre ese líquido sobre el que aplicaremos luego las fórmulas en que intervienen los gastos.

EJERCICIOS *números* **643**; **650**; **651**; **663**; **685**; **688**; **714** y **715.**

PROBLEMAS, los *números* **667** (3.°); **668**; **707** y **713.**

FACTURAS, los *números* **653** al **662**; **692**; **696**; **698** al **700**; **708**; **709**; **711** y **716** al **719.**

Lección 39

370.—Operaciones por apunte. — Las operaciones que se verifican interviniendo monedas extranjeras ya decíamos (**346**) que podían dar origen a remesas y giros por apunte, pero entonces sólo hacíamos referencia al caso en que el líquido resultante de la operación estuviese también expresado en moneda extranjera. Nos resta por consiguiente estudiar el caso de *giro o remesa por apunte en que el líquido deba expresarse en moneda nacional*

El problema de cálculo se reduce a determinar el valor de la moneda extranjera que interviene en las fórmulas cuando hay gastos.

Partiendo de las fórmulas [2] y [3] del párrafo anterior obtenemos las dos siguientes que nos dan a conocer el importe de la moneda extranjera equivalente a la nacional en que se expresa el apunte:

$$M_e = \frac{(M_n \mp G)B}{C(1 \pm g)}$$

para cuando la plaza que cotiza dé el incierto, y

$$M_e = \frac{(M_n \mp G)C}{B(1 \pm g)}$$

para cuando la plaza dé el cierto.

Después de hallar en esta forma la moneda extranjera se aplicaria la fórmula que correspondiese, como si se tratase de una operación nacional en la plaza pagadora (**346**).

Ejemplo.—Determinar los dollars por que debe girarse un cheque en Lima para cobrarse de una deuda de 1456 libras, si la operación causa corretaje de 1 por mil y timbre de 4 soles, siendo la cotización del dollar en el Perú de 4'70, debiéndose además pagar por correo 0'40 soles y descontándose el giro en Nueva York por 10 días al 4 %.

Separaremos las dos operaciones que respectivamente deben hacerse en Lima y en Nueva York y nos encontramos para la primera que se trata de un giro por apunte en plaza cierta que cotiza a la vista, con gasto de corretaje que es proporcional, y timbre y correo que son gastos fijos, siendo de 0'001 el corretaje por 1, y así tendremos al aplicar la fórmula segunda de las anteriores con los signos inferiores

$$Me = \frac{(1456 + 0'44)4'70}{1 - 0'001} = 6852'12 \text{ dollars}$$

y hallando ahora el nominal que debe tener el efecto para que resulte un líquido vendible de esa cantidad de dollars tendremos

$$Me = \frac{6852'12 \times 9125}{9125 - 10} = 6859'64 \text{ dollars}$$

Ejercicios *números* **666**; **682**; **710**; **712**; **720; CLXXVII** al **CLXXX** y **CLXXXIII**.

Problemas, los *números* **DLVI** y **DLVII.**

371. - Cambio medio.—El cambio medio es una media aritmética que puede hacer referencia a dos cuestiones:

1.° Es el *cambio medio de una cotización* la media aritmética (**27**) entre los diferentes precios que en una fecha cualquiera tienen las monedas de una plaza en otra diferente, y en este sentido hemos hablado de él en el párrafo **359**.

2.° También puede ser *cambio medio de varias operaciones*, que es el promedio a que resultan adquiridas varias partidas de una moneda determinada, y siempre se tiene este promedio en la práctica valiéndose del saldo de la cuenta correspondiente a la moneda de que se trate y con sólo dividir el saldo en moneda nacional por el mismo en moneda extranjera, pero bajo el aspecto en que hemos de tratarle hemos de

prescindir de dicho saldo, tanto porque en la mayoría de los casos se comprenden en él más operaciones que las de que se trata de determinar el promedio, cuanto porque aún no conocerán la mayoría de nuestros lectores lo que esos saldos representan.

Cualquiera de los dos aspectos del cambio medio se resuelven como aplicación de los promedios que ya conocen nuestros lectores: el primero con sólo dividir la suma de las cotizaciones del día por el número de ellas, y el segundo dividiendo el valor total de las diferentes partidas por la suma de nominales extranjeros a que se refieren como promedio ponderado **(33).**

Ejemplos.—1). ¿Cuál es el cambio medio de las coronas checoeslovacas en Madrid en una fecha en que se cotizaron a 27'20; 26'90; 27 y 27'40 %?

$$\text{Cambio medio} = \frac{27'20 + 26'90 + 27 + 27'40}{4} = 27'125\ \%$$

2). Hemos adquirido tres cheques sobre Buenos Aires de 1000, 800 y 750 pesos respectivamente, a los cambios de 2'44, 2'48 y 2'50 y deseamos conocer el cambio medio a que resultan las tres operaciones.

Debiendo dividir los valores de las tres adquisiciones por el importe total de las mismas en moneda extranjera, tendremos según la disposición práctica de la operación para facilitar el cálculo:

1000 $	a 2'44 =	2440 pesetas.
800 $	a 2'48 =	1984 »
750 $	a 2'50 =	1875 »
2550 $		6299 »

$$\text{Curso medio} = \frac{6299}{2550} = 2'47.$$

Si la plaza en que se hizo la adquisición de la moneda extranjera diese el cierto, entonces en vez de dividir la moneda nacional por la extranjera como hemos hecho en el ejemplo que antecede, tendríamos que proceder a la inversa, pues siempre habrá que calcular el término variable del cambio, y como antes éste se hallaba expresado en moneda nacional servía como dividendo la cantidad de moneda nacional, pero como en plaza cierta el término variable es la moneda extranjera deberá ponerse como dividendo también la moneda extranjera.

Ejercicios *números* **746** al **753.**

372.—Cambio recíproco.—*Se llama cambio recíproco entre dos plazas al que resulta en una de ellas teniendo en cuenta el que se cotiza en la otra.*

Si el cambio recíproco es idéntico a la cotización en la primera plaza se dice que entre los dos hay *paridad recíproca.*

Así por ejemplo, será el cambio recíproco entre Barcelona y Praga el que debería cotizar Barcelona para las coronas checoeslovacas equivalente al que tuviese en Praga la peseta, y viceversa.

Cuando las dos plazas entre las cuales se desea hallar el cambio recíproco dan una el cierto y otra el incierto no es preciso hacer cálculo ninguno, puesto que si Madrid cotiza la libra esterlina a 32, este mismo número debería ser el cambio de las pesetas en Londres, ya que los dos cambios se refieren a la base libra esterlina.

Si las plazas son las dos ciertas o las dos inciertas, entonces será preciso resolver una sencilla regla de tres simple para determinar ese cambio recíproco, siendo la proporción que resuelve estas cuestiones la siguiente:

$$C_c : B_c :: B_r : C_r$$

en la que la letra subíndice que acompaña a los cambios y a las bases representa respectivamente el cotizado y el recíproco que se busca.

Ejemplo: Hallar el cambio recíproco entre París y Nueva York si en esta última plaza se cotiza el franco francés a 9'40.

Se trata de dos plazas que respectivamente dan el incierto en sus cambios a base de un dollar y 100 francos, luego la proporción será:

$$9'40 : 100 :: 1 : x$$

de la que obtenemos para el cambio que deben tener en París los dollars:

$$100 : 9'40 = 10'638 \text{ francos por un dollar.}$$

EJERCICIOS *números* **754** al **764.**



XXXVII

CAMBIO INDIRECTO

373. – Objeto del cambio indirecto.—Ya hemos dicho (**353**) en qué consiste el cambio indirecto, y en él la existencia de una plaza o varias intermedias para los cobros y pagos internacionales puede ser forzada o voluntaria.

La existencia de plazas intermedias es *forzada* cuando no hay relaciones entre la plaza acreedora y la deudora o habiéndolas no tienen cotización las monedas de una de ellas en la otra, como sucedería si en España hubiere de cobrarse o pagarse una suma en Yokohama, pues como las relaciones mercantiles nuestras con el Japón son escasas no hay, cotización en España para los yens ni en el Japón para las pesetas.

La existencia de la plaza o plazas intermedias es *voluntaria* cuando se eligen con objeto de hacer alguna especulación por las diferencias que pueda haber en los cambios cotizados en todas las que intervienen, como sucedería si, por ejemplo, la cotización de París en Londres fuese más alta que la que resultaría según los cambios en Madrid para la libra y el franco francés, pues, a causa de ese mayor valor, las ventas de francos en España no se harían directamente sinó que se vendería en Madrid moneda inglesa y en Londres se venderían los francos, obteniendo con ello un beneficio.

El estudio completo de las especulaciones daría una extensión demasiado grande a nuestro trabajo, por lo que nos limitamos a dar unas ideas sobre los arbitrajes en la última parte de esta obra, pero más que como medios de especulación como de elección en el momento de efectuar una operación.

Cuando el cambio indirecto está causado por falta de co-

tización, se dice que las plazas no tienen *cambio abierto* y entonces se elige como intermedia otra plaza que tenga cambio abierto con las otras dos pagadora y acreedora.

Resulta pues, que el cambio indirecto tiene dos objetos:

1.° *Dar posibilidad a los cobros y pagos entre dos plazas que carecen de relación cambiaría.*

2.° *Especular con las diferencias de cambios en los diferentes mercados.*

374.—Medios indirectos de cobro y pago.—Para cobrar o pagar una cantidad por un medio indirecto son infinitas las combinaciones, y así también son innumerables los casos de especulación; pero limitando nuestro estudio al cambio indirecto forzado que prácticamente está reducido a una sola plaza intermedia las combinaciones son:

1.ª *Dos remesas.*—El deudor envía un efecto sobre la plaza intermedia y el corresponsal en esta última plaza remite otro al acreedor.

Este procedimiento se simplifica en la práctica en la misma forma que el giro indirecto en moneda nacional (**343**), pues si se tratase de un cobro de yens que deba hacer un comerciante español, el deudor del Japón puede adquirir en un Banco de su país un efecto de pesetas, quien le girará a cargo del corresponsal español de un Banco londinense y el Banco del Japón pagará después las pesetas al de Londres.

2.ª *Dos tratas.*—El acreedor gira a cargo del corresponsal de la plaza intermedia y éste a cargo del deudor.

3.ª *Una remesa y una trata.*—El deudor remite un efecto al corresponsal de la plaza intermedia y el acreedor gira a cargo de dicho corresponsal, quien atiende al pago del giro con la remesa que le hizo el deudor.

4.ª *Una trata y una remesa.*—El corresponsal de la plaza intermedia gira a cargo del deudor y con el producto de la negociación de este giro, toma un efecto que remite al acreedor.

Al parecer son iguales las dos últimas combinaciones, las que no obstante se diferencian en el momento en que han de tener cumplimiento las operaciones en la plaza intermedia, pues es indudable que el corresponsal de ella ha de necesitar cobrar la remesa antes de pagar la trata, si es que la ha de pa-

gar con el producto de la misma remesa; y en la última, antes debe hacer la trata para con el producto de la negociación poder remesar. Además en el tercer caso son el deudor y el acreedor los que intervienen de modo activo, quedando el corresponsal intermediario limitado a una parte secundaria, mientras que en el último caso es el corresponsal intermediario el que ejecuta la parte activa de la operación y deudor y acreedor son elementos pasivos de su cumplimiento.

Para la ejecución de estas operaciones se pasan órdenes al corresponsal, quien a veces necesita cálculos especiales de arbitraje que estudiaremos más adelante como órdenes de Banca (**590**).

375.—Cálculos que origina el cambio indirecto.— Los problemas del cambio indirecto pueden y deben resolverse por su descomposición en los dos de cambio directo que les constituyen; y con varias plazas intermedias la descomposición sería en tantos como plazas intermedias haya más uno.

Suelen aconsejar los tratadistas y los prácticos, el resolver estas cuestiones, y todas las de cambio, lo mismo directo que indirecto, nacional que extranjero, mediante la formación de una conjunta que no es más que la descomposición de las fórmulas, con la grande probabilidad de cometer errores si no se tiene extraordinaria práctica en el planteamiento. Por esta gran probabilidad de errores ni nosotros hacemos uso de las conjuntas ni aconsejamos que nadie las utilice, pues siempre son más claras, fáciles y exactas las fórmulas.

Ejemplo: Un comerciante de Barcelona es acreedor de uno de Calcuta por 24.000 rupias con vencimiento de 10 de octubre y para cobrar su crédito o antes posible ordena a un Banco de Londres haga trata sobre Calcuta y con su producto tome letra a la vista sobre Barcelona y se la remita. El Banco de Londres hace el giro en 1.° de agosto y le negocia al cambio de 1sh 6'20d para vista, descuento del 5 %, gastos varios 1 ½ ‰ y timbre indio de 15 rupias. Con el producto de la negociación adquiere un cheque sobre Barcelona al cambio de 50'60 y gastos de 1 ‰ más 1sh 2d.

Este ejemplo constituye un caso de la cuarta combinación, que empieza por negociación del giro a plazo diferente que el de cotización, con gastos proporcionales en la moneda nacional,— en este momento del cálculo la moneda nacional es la inglesa,—y además en la extranjera, por lo que empezamos por calcular el líquido negociado (**369** y **341**) aplicando después la fórmula para el caso en que haya gastos (**369**) y tendremos:

Nominal negociado	Rupias.	24000—
Timbre del país pagador (*).....	»	15 —
Líquido de la moneda extranjera negociada..	»	23985—

Ahora para aplicar la fórmula interviniendo el descuento hemos de tener en cuenta el correo, que consideraremos de 20 días, y así la diferencia entre el plazo vista y el del efecto será de 70 — 20 = 50 días, y en la fórmula tomaremos los signos sustractivos por tratarse de venta obteniendo:

$$M_n = \frac{23985 \times 18'20\,(7300 - 50)(1 - 0'0015)}{7300} = 452886'78 \text{ peniques (**)}$$

y reducido el resultado a complejo de £ dará £ 1805 — 13 — 10'78. También puede observarse que los gastos proporcionales pudieran referirse al nominal no descontado, en cuyo caso habrían de incluirse con el timbre antes restado o bien considerarse como gastos independientes expresados en moneda nacional.

Una vez que hemos obtenido el líquido en moneda inglesa que ha producido la trata, hemos de hallar el nominal en pesetas que podríamos comprar por apunte en Londres en la forma que expresa el problema y aplicar la fórmula correspondiente **(370)**, teniéndose:

Valor disponible para la adquisición.....	Ltg.	1805 — 13 — 10'78
Gastos fijos a restar según el paréntesis del numerador de la fórmula **(370)**.....	»	1 — 2
Líquido disponible.....	»	1805 — 12 — 8'78

las que reducidas a fracción decimal para facilitar los cálculos, da para valor del paréntesis del numerador de la fórmula 1805'637 Ltg. y se tiene por fin para líquido producido al acreedor de Barcelona

$$M_e = \frac{1805'637 \times 30'60}{1 - 0'001} = 55246'53 \text{ pesetas.}$$

De modo semejante al que hemos empleado en el problema anterior se descompondrían todos los del cambio indirecto resolviendo parcialmente cada uno de los que resultasen.

EJERCICIOS *números* **725** al **745; CLXXXI; CLXXXII** y **CLXXXVI** al **CLXXXIX.**

376.—Paridad del cambio.—Se llama *paridad del cambio, par proporcional* y también *par política* al cambio que resulta para dos plazas que no tienen cambio abierto, por mediación de la plaza o plazas que pueden ser intermedias en el cambio que se trata de establecer.

(*) Incluimos este gasto como posible, y que sea ejemplo de cálculo e indique el procedimiento para cantidades de moneda extranjera a deducir **(341).**

(**) La cotización de la rupia se hace en peniques y por consiguiente, a peniques se refiere el cálculo.

La paridad indirecta se calcula en la misma forma que si se tratase de una operación de cambio indirecto, si bien los cálculos no se referirán al nominal de la operación, puesto que no existe, sinó que se toma como nominal la misma base del cambio. Así por ejemplo, en la paridad del cambio entre Barcelona y Calcuta del ejercicio anterior, hallaríamos el valor de una rupia en pesetas, puesto que si en España se cotizase esta moneda lo haría teniendo como base la unidad (**357**).

Ejemplo. - Calcular el cambio que resultaría en Madrid para los pesos chilenos, si el cambio de Nueva York sobre Valparaíso es de 41'60 a vista y el de Madrid sobre Nueva York 7'05.

Considerando que no existen gastos y teniendo en cuenta que la diferencia del correo de Madrid a Valparaíso, y de Madrid a Nueva York y luego a Valparaíso pueda ser de 5 días, deberíamos descontar el cambio de la plaza intermedia durante este tiempo; pero como en la situación actual este correo debe despreciarse porque no hay medio más rápido de adquirir o ceder moneda chilena, dejamos de hacer este descuento y nos encontraremos que el valor en pesetas de los 100 pesos chilenos que valen 41'60 dollars sería igual a $41'60 \times 7'05 = 295'28$ y por consiguiente el cambio de España con Chile sería de 2'95 pesetas por peso aproximadamente.

Del examen de la anterior resolución podemos sentar una regla para determinar la paridad política entre dos plazas sin cotización mútua. Efectivamente, vemos que *si las dos plazas dan el incierto se multiplican los dos cambios* (el de la plaza calculadora y el de la intermedia) reduciendo después el resultado a la base que debiera tener el cambio que se busca; y *si las plazas dan una el cierto y otra el incierto se dividen los cambios cotizados, sirviendo siempre como dividendo el de la plaza calculadora y como divisor el de la plaza intermedia*.

Ejemplo.—Hallar el cambio que correspondería en Lima a la peseta, si en esta plaza se cotiza Londres a 95 para 90 d/v, en Londres el cambio sobre Madrid es de 30'40, y el descuento en Madrid el 5 %.

Como las dos cotizaciones se refieren a plazo diferente deberemos ante todo reducirlas a igual plazo aplicando la fórmula [δ] del párrafo **366** para el cambio cotizado en Lima y tendremos,

$$\text{Cambio a vista: } \frac{95 \times 7300}{7300 - 90} = 96'18585$$

y aplicando ahora el segundo caso de la regla anterior,

$$\text{Paridad} = \frac{96'185}{30'40} = 3'164$$

lo que quiere decir que 100 pesetas valdrían en Lima 3'164 libras peruanas.

EJERCICIOS *números* **721** al **724; 765** al **769** y **CXC** al **CXCII.**

377.—Empleo de las reglas y cilindros de cálculo.— Una de las mayores y más frecuentes aplicaciones de estos instrumentos en las oficinas mercantiles es en la sección de cambios extranjeros, en las que en todo Banco importante existen varios cilindros calculadores, porque mediante ellos se pueden obtener a la vez muchas paridades indirectas del cambio con una sola colocación de la reglilla y mediante sencillas lecturas auxiliadas por el índice.

Para hallar la paridad indirecta a que ahora nos referimos, en plazas en que sean las dos inciertas, o sea que la calculadora y la intermedia sean inciertas, bastará hacer coincidir el 1 de la escala fija con la cotización que en la plaza intermedia tiene la moneda de la plaza calculadora, y en tal posición tendremos que leyendo en la escala móvil las cotizaciones de la plaza intermedia para las monedas deseadas, se tiene en la escala fija coincidiendo con estas últimas, las paridades indirectas que para la plaza calculadora tendrían todas las monedas.

Así si por ejemplo, tomamos a Madrid como plaza calculadora y como intermedia Ginebra, cuando en esta plaza se cotizan las pesetas a 57'25, tomando este número en la escala móvil superior, la *T* de la fig. 52, y haciéndole coincidir con el 1 de la escala fija *Z*, para conocer la paridad indirecta

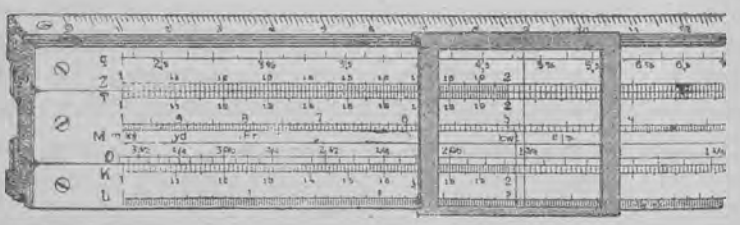


Fig. 52. Regla de cálculo para cambios.

de Madrid con cualquier otra plaza por medio de Ginebra, buscaremos la cotización que aquí tenga la otra moneda, y si fuere por ejemplo la de 71'28 para el belga, este número de la escala móvil *T* coincidirá con el 124'50 de la escala *Z* siendo los 124'50 la paridad buscada o número de pesetas que valdrían los 100 belgas por medio de Ginebra.

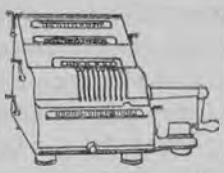
Si queremos hallar varias paridades indirectas para una misma moneda y por mediación de la misma plaza, bastará

que hiciésemos coincidir con el 1 de la escala fija el cambio que en la plaza intermedia tiene la moneda calculada, y buscar luego en la escala móvil los cambios de la plaza intermedia para la moneda de la plaza calculadora, y para cada cambio podremos tener una paridad sin cambiar la posición de la reglilla.

En el ejemplo que examinamos hubiera sido así cuando haciendo coincidir con el 1 de la escala *Z* el cambio de 71'28 tomado en la escala *T* hallaríamos que frente al cambio de 57'25 no tendríamos coincidencia alguna, por estar este punto fuera de la regla, por lo que deberíamos hacer coincidir el 71'28 con el 1 final de la escala *Z* y entonces veríamos que coincide con el 57'25 de la escala *T* el 124'50 de la *Z* igual que antes, pero ahora además sin variar la posición de la reglilla tendremos en la escala *Z* las paridades indirectas para cualesquiera cotización de las pesetas en Ginebra leída sobre la escala *T*.

Cuando una de las plazas fuera cierta, como lo es Londres en la mayoría de los casos, deberemos sustituir la escala *T* por la escala de los inversos que aparece en el centro de la reglilla, leyendo en estos inversos los números que hubieran de leerse en la escala *T* y correspondiendo a ellos los de la escala *Z* en la forma dicha.

El uso de los cilindros de cálculo es igual al que dejamos indicado, sin más que la mayor exactitud que da el mayor tamaño y la ventaja de no tener que cambiar la posición de la reglilla, a causa de que el 1 está en el punto central de las escalas del cilindro, y todavía la grande ventaja de poder obtener al mismo tiempo paridades indirectas para varias plazas o monedas en diferentes escalas del cilindro, sin necesidad de hacer más que una colocación de la parte móvil.



XXXVIII

OPERACIONES DE CAMBIO A PLAZO

378.—Objeto de las operaciones a plazo.—El mismo nombre de las operaciones nos indican perfectamente su naturaleza, que no es otra que *la compraventa de moneda extranjera fijando una época para su cumplimiento.*

Las operaciones de cambio a plazo se conocen más bien con la denominación de *seguros de cambio* y son casi indispensables en el comercio internacional, pues por medio de ellas el importador que adquiere una mercancía en el extranjero y que debe satisfacer en un plazo determinado, en vez de aguardar al vencimiento de su deuda, para entonces adquirir la moneda extranjera en que debe satisfacerla, contrata con un Banco esa compra al plazo que necesita, para evitarse el riesgo de las oscilaciones de los cursos del cambio, quedando así *asegurado* contra ese riesgo; y del mismo modo el exportador que también quiere tener seguridad en la cantidad que ha de cobrar por sus ventas, hace el seguro de cambio vendiendo a plazo sus créditos en moneda extranjera.

Vemos pues, que el objeto principal del cambio a plazo es la eliminación del elemento aleatorio en las compraventas de mercaderías en el extranjero. Por medio de estas operaciones, el importador puede conocer el verdadero coste de sus compras sin aguardar al momento del pago y el exportador sabe también el resultado de la venta efectuada, y con esa seguridad se facilitan las transacciones del verdadero comercio, que nunca ha de buscar otras causas de ganancia o pérdida que las provinientes de las mismas riquezas en que comercia.

También se efectúan operaciones de cambio a plazo por

los especuladores en forma técnica igual a las de Bolsa sobre valores, a las que remitimos al lector, pero cuyo cálculo principal es idéntico al que ahora nos ocupa, teniendo además el cálculo del resultado de la especulación que estudiaremos junto con los de valores en las operaciones de Bolsa a plazo.

379.—Formas del seguro de cambios.—La clasificación que podríamos hacer de los seguros de cambios será diferente según que tomemos por base la época de su cumplimiento, las plazas entre las que deba tener cumplimiento, o las condiciones acordadas entre las partes contratantes, siendo en general las formas las que ahora vamos a detallar.

Puede suceder que la época sea fija o que sólo se determine un plazo dentro del cual haya de tener cumplimiento la obligación contractual. En el primer caso la operación a plazo es *ordinaria* y en el segundo se dice que es *operación con preaviso*, pudiendo lo mismo en un caso que en otro hacerse en firme o con facultad en una de las partes para rescindir el compromiso mediante una indemnización a la otra. Cuando existe esta facultad se dice que la operación es a *voluntad*, y sin ella la operación es *en firme*.

En cuanto a las plazas que intervienen en la operación, será el seguro de cambio directo si sólo intervienen dos plazas y será indirecto si en la operación intervienen más de dos, aun cuando prácticamente el seguro indirecto casi puede decirse que no tiene realidad por causa de que los elementos aleatorios que en un seguro intervienen son tantos como plazas, y sería una especulación muy arriesgada la del asegurador del cambio indirecto.

380.—Cursos a plazo.—Los cursos del cambio en las operaciones de seguro se expresan en la misma forma que los de las operaciones al contado hasta ahora estudiadas; pero el importe de estos cambios a plazo tiene siempre una diferencia que en sí misma lleva incluídos el premio del seguro por las oscilaciones y los intereses o descuentos por la duración de los plazos de cumplimiento del seguro.

De estos elementos modificativos, los intereses o descuentos son independientes de la naturaleza de la operación y por consiguiente serán los mismos para la venta y para la compra

a plazo, y el premio de seguro deberá considerarse en aumento o disminución del cambio según que se trate de compra o venta referidas al asegurado, del mismo modo que los gastos de otro carácter estudiados en las operaciones al contado.

Para todos los efectos de nuestro estudio referiremos las compras y ventas al asegurado, que siempre es un cliente de la Banca, pues cuando la misma Banca asegura sus posiciones se convierte en cliente de otro Banco.

381.—Cálculo de los cursos a plazo.—Las operaciones de cambio a plazo sólo se diferencian de las cotizaciones a un plazo contado desde la vista, en que en el seguro de cambio no se hace la entrega de la moneda nacional hasta el vencimiento de la operación, es decir, que en el caso de que nos ocupamos los dos términos, moneda nacional y moneda extranjera, se difieren al plazo cotizado, mientras que en las cotizaciones a plazo sólo se difiere la moneda extranjera.

Para la reducción de las cotizaciones a plazo diferente, hemos visto (**336**) que se hacía intervenir el factor del descuento, pero referido al tanto corriente en la plaza pagadora, y ahora al diferir el pago de la moneda nacional deberíamos tener en cuenta los intereses que produciría el mismo cambio que se descontaba, durante el mismo tiempo, que es el del plazo de la operación. Estos intereses y aquellos descuentos se compensarían como correspondientes a un mismo capital si los tantos fuesen los mismos; pero si el descuento ha de calcularse al tanto de la plaza pagadora, el interés corresponderá al tanto que rija en la plaza que cotiza, y por causa de ésto los tantos serán diferentes y no habrá compensación, lo que origina una *cotización teórica* para el seguro de cambio distinta de la que corresponde al plazo vista. Esta cotización teórica es la que deberemos calcular para modificarla después con el premio del seguro, y tomamos como base para este cálculo la cotización a vista, porque en el seguro de cambio se contrata la compra o venta de cheques en moneda extranjera o, en vez de cheques, anotaciones en cuentas que también se llaman de cheques y que son equivalentes en plazo.

Para el cálculo de que nos ocupamos utilizaremos las fórmulas generales del interés o descuento en vez de las del divisor fijo, porque éstas no permiten hacer simplificación a causa

de no ser iguales los divisores fijos.

También hemos de distinguir entre las plazas ciertas y las inciertas con lo que resultarán dos casos:

1.° *Plaza que dé el incierto.*—El cambio a plazo para estas plazas nos es ya conocido por medio de los divisores fijos (**366**, [1]) y empleando la fórmula fundamental (**226**) tendremos para ese cambio a plazo que representaremos por C_p

$$C_p = C\left(1 - \frac{tn}{100k}\right)$$

pero como además de ese elemento de descuento debe tenerse en cuenta la modificación de ese cambio por el interés que puede producir durante el mismo tiempo n y al tanto t' de la plaza en que se calcula, el verdadero valor teórico del cambio a plazo estaría dado por la expresión:

$$C_p = C\left(1 - \frac{tn}{100k} + \frac{t'n}{100k}\right) = C\left(1 - \frac{(t-t')n}{100k}\right)$$

a la cual se añadiría o restaría el premio del seguro de cambio, el que representado por s nos dá como valor teórico del cambio a plazo:

$$C_p = C\left(1 - \frac{(t-t')n}{100k}\right) \pm s$$

2.° *Plaza cierta.*—Lo mismo que para las plazas inciertas conocemos ya el cambio a plazo por medio de los divisores fijos (**366**, [2]) pero utilizando la fórmula fundamental y haciendo referencia al curso unitario (**364**, 2.°) tendríamos:

$$\frac{B}{C_p} = \frac{B}{C}\left(1 - \frac{(t-t')n}{100k}\right) \pm s$$

fórmula que nos prueba una vez más que los cálculos para plazas ciertas son siempre los inversos de las plazas inciertas.

Es necesario hacer notar que en los cálculos que se refieran a estas cotizaciones teóricas no emplearán los banqueros los tantos de descuento e interés oficiales en las plazas calculadora y extranjera, sinó que utilizarán para sus cálculos los tantos reales de sus colocaciones en moneda extranjera, los cuales varían con los corresponsales y con la clase de cuenta que con esos corresponsales se tenga. Así por ejemplo, pudiera suce-

der que en un país extranjero cualquiera el tipo de descuento sea el 4 °/₀ y que en las cuentas de moneda extranjera el Banco de la plaza nacional sufra un descuento de 3 ½ °/₀ y entonces será este tanto del que deberá valerse para sus cálculos; considerando como tipo de interés solamente la diferencia entre el de colocación de sus disponibilidades y el que paga a sus depositantes por las cantidades en cuenta corriente.

Ejemplo: Hallar el tipo de cotización en Madrid de un seguro de cambio a 3 meses sobre Buenos Aires, si el cambio a vista en la primera plaza es de 2'45 pesetas por peso, el Banco asegurador sufre un descuento de 4 °/₀ en sus remesas de papel argentino y paga el 1 °/₀ a sus depositantes, siendo el tipo de colocación del dinero en Madrid para dicho Banco el 6 °/₀ y el premio de seguro se calcula en 0'10 pesetas.

Se trata de una plaza incierta por ser Madrid la plaza en que operamos, y los valores de los diferentes elementos de la fórmula son:

$$C = 2'45 \qquad t = 4, \qquad t' = 6 - 1 = 5, \qquad n = 3,$$
$$100k = 1200, \qquad s = 0'10$$

Con estos elementos tendremos para valor del cambio que buscamos

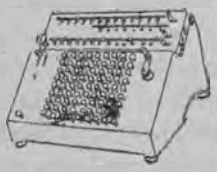
$$C_p = 2'45\left(1 - \frac{(4-5)3}{1200}\right) \pm 0'10 = 2'4561 \pm 0'10$$

y según se trate de cesión del Banco o de compra por el Banco, así el cambio a plazo sería 2'5561 o bien 2'3561.

Puede apreciarse la poca importancia que este estudio teórico tiene, porque la modificación que por él experimenta el cambio es muy pequeña, y por ello suele indicarse en la técnica bancaria que las cotizaciones a plazo se modifican por el premio de seguro, relativo a la base del cambio.

Cuando en los cálculos anteriores no tengamos cambio a vista puede emplearse cualquier otro cambio, siempre que demos al tiempo n el signo que por tal causa le corresponda, y teniendo siempre en cuenta, como hemos tenido en el ejemplo resuelto, la significación de todos los signos que afectan a las cantidades de las fórmulas.

Ejercicios *números* **770** al **780.**



XXXIX

ESTUDIO GENERAL DE CUENTAS CORRIENTES

382.—Definición de la cuenta corriente.—La cuenta corriente es un estado en que se detallan las operaciones que han tenido lugar entre dos personas, en forma tal, que pueda determinarse en cualquier momento la situación respectiva en que se encuentran. Esta situación se establece por compensación de los valores que respectivamente se han ido entregando y como suma algebraica de todos ellos.

383.—Partes de las cuentas corrientes.—En toda cuenta corriente intervienen dos personas, las cuales se llaman *tenedor de la cuenta* y *cuentacorrentista.*

El tenedor de la cuenta es la persona que hace las anotaciones, y el cuentacorrentista es la otra persona, con cuyo nombre se halla encabezada la cuenta en los libros del tenedor. Resulta, pues, que el carácter de tenedor y cuentacorrentista es solamente relativo, ya que según se consideren los libros de la contabilidad de uno u otro, así resultará también tenedor o cuentacorrentista.

Las partidas de la cuenta pueden tener carácter positivo o negativo, siendo preciso determinar claramente que son cantidades positivas las correspondientes a los débitos del cuentacorrentista y cantidades negativas las de los créditos del mismo.

Las dos partes que por consiguiente hay que considerar en toda cuenta, *siempre con referencia al titular o cuentacorrentista,* se denominan DEBE y HABER. El Debe corresponde a las cantidades positivas y el Haber a las negativas.

384. Situación de la cuenta. Como resumen de las

dos partes anteriores o situación de la cuenta a que hacíamos referencia en la definición, debemos considerar el *saldo*, que podrá ser deudor si la suma algebraica de las cantidades es positiva, y acreedor si dicha suma fuese negativa.

Según lo que acabamos de decir, si representamos por C_1, C_2, C_3, ... C_m, las cantidades que correspondan al Debe de la cuenta, por C'_1, C'_2, C'_3, ... C'_m, las otras cantidades que corresponden al Haber, y deseamos hallar el saldo o situación de la cuenta, éste le tendríamos determinado por la expresión:

$$S = (C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_m) - (C'_1 + C'_2 + C'_3 + ... + C'_m) = \\ = \Sigma C_m - \Sigma C'_m$$

y según sea positivo o negativo el resultado, así será el saldo S deudor o acreedor.

Para los efectos de buena presentación de las cuentas, se acostumbra a escribir el saldo en la parte de la cuenta donde la suma haya sido menor con objeto de terminar la cuenta y poder empezarla de nuevo con el saldo que antes de esa terminación resultaba. El saldo que se escribe para terminar la cuenta se llama *balance*, el acto de terminar la cuenta se denomina *cerrarla*, y el restablecimiento de la situación constituye lo que se llama *reapertura* de la cuenta.

385.—Clasificación de las cuentas corrientes.—Teniendo presente que después hemos de ir estudiando las distintas clases de cuentas, bajo los diferentes aspectos en que éstas pueden considerarse, sólo indicamos ahora los grupos de estas cuentas sin entrar en más detalles para evitar las repeticiones. Estas clasificaciones pueden ser:

1.°—*Según el carácter de productividad de los capitales.* Las cuentas corrientes se denominan *simples* si los capitales o partidas de la cuenta no han de producir interés, y se denominan *cuentas con interés* si además de los capitales anotados en la cuenta es preciso tener presente los intereses o descuentos causados por la diferencia de disponibilidad, lo que da origen a una subclasificación, y así las cuentas se denominan a *interés recíproco* cuando es el mismo tanto el que corresponde al Debe y al Haber de la cuenta, y a *interés diferencial* o *no recíproco* si el tanto es distinto para el Debe y para el Haber. Además, cabe admitir que ese tanto o tantos permanezcan invariables durante el tiempo en que se conside-

ra la cuenta, en cuyo caso la cuenta es a *interés constante*, o bien que el tanto recíproco, uno cualquiera, o los dos no recíprocos, sufran alteraciones durante el período en que se considera la cuenta, diciéndose entonces que ésta es a *interés variable*.

2.°—*Según la clase de moneda en que se hacen las anotaciones en la cuenta.* Son cuentas en moneda nacional o a *una sola moneda* y cuentas en monedas extranjeras o *de dos monedas*. Las cuentas en monedas extranjeras siempre son cuentas de dos monedas porque se considera la moneda extranjera como medida de una cantidad de la que es preciso a la vez expresar el valor para que esté de acuerdo con todas las anotaciones de la contabilidad de que forma parte, y de ahí el que siempre sea necesario que en la cuenta en moneda extranjera figuren las cantidades en esta moneda y los correspondientes valores de cada partida en moneda nacional.

3.°—*Según la parte a quien corresponden los gastos que origina la cuenta.* Bajo este aspecto se dice que las cuentas corrientes son cuentas *mías* o *nuestras* si el tenedor de la cuenta es quien ha de pagar los gastos, cuentas *suyas* si es el cuentacorrentista el que pagará dichos gastos, y cuentas *mútuas* o *mixtas* si los gastos han de satisfacerlos las dos partes pagando cada una los que a sí mismo se le originen.

386.—Carácter de las cuentas corrientes en las operaciones bancarias.—Las cuentas corrientes constituyen la recopilación de todas las operaciones que verifican los Bancos, pues que todas ellas dan origen a relaciones de débitos y créditos que se anotan en cuentas; pero el verdadero carácter debe encontrarse en la naturaleza del contrato que representa la cuenta y con sólo repasar el cuadro de operaciones bancarias de la pág. 351, vemos que entre las operaciones pasivas se encuentra la que ahora nos ocupa, indicando varias formas basadas en la disponibilidad que para el cuentacorrentista tienen las cantidades que resultan a su favor en la situación o saldo de la cuenta. Así tenemos las *cuentas a vista*, también llamadas *cuentas de cheques*, en que la disponibilidad del cuentacorrentista es inmediata, es decir, que en cualquier momento puede retirar todo o parte del saldo de la cuenta, y para facilitar esta disponibilidad entrega el Banco talonarios de cheques; *cuentas de vencimiento fijo* si el cuentacorrentista no puede disponer de las cantidades de la cuenta sinó después de pasado algún tiempo, que suele ser de una quincena; *cuentas a plazo*, que son aquellas en las que el término para adquirir la disponibilidad por el cuentacorrentista es de lo menos un trimestre y se renueva por períodos iguales si antes no se ha rescindido el contrato por algunas de las

partes; y *cuentas con preaviso*, que son las que teniendo siempre la disponibilidad del saldo por parte del cuentacorrentista, exigen sin embargo que el giro para disponer de él tenga un vencimiento posterior en varios días a la fecha en que el Banco reciba aviso de que se dispone de todo o parte del mismo. Todas las cuentas anteriores son cuentas que representan las adquisiciones de fondos hechas por los Bancos para su comercio y siempre son *cuentas del cliente*, quien deberá pagar los gastos de la misma.

Las cuentas corrientes además de ser operaciones pasivas, como son las antes detalladas, pueden ser operaciones activas de los Bancos y entonces tendremos las *cuentas de crédito*, que consisten en poner a la disposición del cliente de una cantidad de la que pueda disponer como si se tratase de un saldo a su favor en una cuenta a vista; y por razón del modo de conceder el crédito pueden ser *al descubierto* si no hay más garantía que la personal y los débitos a favor del Banco son exigibles a vista, o *con garantía*, constituyendo una forma de pignoración, si la garantía es mueble. Son cuentas del grupo de operaciones activas las cuentas con *corresponsales* a las que pertenecen todas las nuestras cuentas en relación a la Banca, y las cuentas mútuas.

Completan el grupo de cuentas corrientes las cuentas *de ahorro*, que son las que anotan las entregas de los pequeños clientes de los Bancos para la Sección Caja de Ahorros y cuya disponibilidad está limitada en cantidad y tiempo.

Vemos pues, que las cuentas corrientes en la Banca tienen un carácter mixto, tanto por la naturaleza de las operaciones que representan, como por las monedas a que se refieren, pues todas las clases de cuentas anteriores pueden ser lo mismo en moneda nacional que en cualquiera de las monedas extranjeras, aunque las cuentas de ahorros no suelen ser sinó en moneda nacional.

387.—Condiciones de cuenta corriente.—Es preciso fijar en las cuentas corrientes ante todo si la cuenta ha de ser con interés o sin él; las limitaciones en la disponibilidad en la forma que antes hemos detallado, o en el importe de los saldos y hasta de cada operación en particular, si bien esto último pueda decirse que ha desaparecido; el momento en que cada partida haya de empezar a devengar intereses, y los gastos de correo, comisión, etc., que origine la cuenta y quién haya de satisfacerlos en el momento de la liquidación. En ciertas cuentas también se determina cómo haya de restablecerse el límite del saldo cuando sea traspasado y de quién partirá la iniciativa para el restablecimiento.

Todas estas condiciones motivan variaciones y cálculos que es indispensable conocer para que el estudio matemático de las cuentas sea completo, y ahora lo haremos con el detalle necesario.

388.—Interés de las cuentas.—Ya dijimos que podía ser recíproco o no, restándonos ahora el estudio del tipo que en cada caso haya de servir de base al cálculo.

No hay ni puede haber un tipo uniforme para los intereses

de las cuentas corrientes, pero siempre estos tipos guardan relación con el que puede ser obtenido por los Bancos en las colocaciones de fondos, tanto en descuentos como en cualquiera otra clase de operaciones, y así tenemos varias condiciones de interés según las clases de cuentas como sigue:

1. *Cuentas de operaciones pasivas de los Bancos.*— Siempre en estas cuentas el tipo de interés es diferente para el Debe y para el Haber, siendo el que se paga por el Banco al cliente cuentacorrentista menor en algunas unidades al de descuento del Banco Nacional y por tanto con fórmula inversa a la que dimos en el tipo de descuento (**333**, 2.º); y para los saldos que resulten a favor del Banco, bien accidentalmente o bien por descubiertos concedidos, se aplica el mismo tanto que para los descuentos.

Si en las condiciones se fijan esos tipos de interés por medio de la fórmula en función del tanto de descuento oficial, entonces variarán en el momento en que éste varíe, en otro caso permanecerán constantes durante la duración de la cuenta, o variarán por acuerdo especial.

2.º *Cuentas de crédito.*—Los tipos de interés varían con la naturaleza de la garantía y suelen estar comprendidos entre el tipo que para estas operaciones rija en el Banco nacional y el que se aplica a los descubiertos de las cuentas anteriores. Si en estas cuentas hubiera situaciones a favor del cliente hay Bancos que no calculan interés sobre ellas y otros (casi todos los Bancos privados) que calculan intereses al mismo tipo que en las cuentas pasivas. La variabilidad del tipo de interés es idéntica al grupo anterior.

3.º *Cuentas de corresponsales.*—Si las cuentas son nuestras cuentas para el Banco tenedor de ellas, les son aplicables en forma inversa los tipos del primer grupo; y si son cuentas mútuas entonces el interés es recíproco a un tipo intermedio entre el que sirve para los saldos a favor de los clientes en las cuentas pasivas y el de descuento oficial en la plaza.

Las cuentas de corresponsales por comisiones de cobro de efectos, tienen tipos iguales a las cuentas de clientes.

4.º *Cuentas en monedas extranjeras.*—El tipo de interés para los saldos a favor de los clientes es inferior en ½ o 1 % al que el Banco obtiene en las mismas monedas en el extran-

jero y el tipo para los saldos a favor del Banco es el mismo de descuento que correspondería a efectos pagaderos en la moneda de la cuenta.

389.—Valoraciones.—La valoración en cuentas corrientes es la fecha a partir de la cual empiezan a devengar intereses las partidas de la misma.

Las valoraciones se calculan según la clase de operaciones y cuentas, y así para las cuentas de clientes, tanto activas como pasivas, todas las operaciones que motivan un cobro para el Banco tenedor de la cuenta se valoran al día siguiente al de la operación, bien sean cobros efectivos, descuentos, etc. Algunas veces los efectos de comercio no se descuentan por el Banco, sinó que se toman valor al vencimiento si es un sólo efecto o valor al vencimiento medio (**293**), en cuyo caso la valoración de la partida corresponderá en la fecha siguiente a la que por esa convención resulte.

Si la operación motiva un desembolso del Banco la valoración de la partida será en la misma fecha en que se practica el desembolso o se hace la anotación en la cuenta.

Para las cuentas de corresponsales por operaciones de comisión de cobro de efectos, la valoración suele ser a varios días a contar desde la fecha en que sale por correo la remesa de los efectos, contándose dos o tres días más que los días de banca (**336,** 1.º), y para las operaciones en que el Banco resulta deudor de su corresponsal la valoración será en la fecha en que dicho corresponsal haga el pago o la anotación.

Las cuentas mútuas tienen para cada operación la valoración que la correspondería si se dividiese la cuenta mútua en las dos que la constituyen (una mi cuenta y otra su cuenta).

Para las cuentas en monedas extranjeras la valoración de los cobros del Banco en vez de prorrogarse un día como para la moneda nacional, se prorroga tantos más uno de los que tarde el correo a la plaza tipo a que se refieren las cotizaciones de cada moneda, así una entrega en un Banco para cuentas de liras se valorarán cinco días después por tardar cuatro fechas el correo a Milán, Génova o Roma.

EJERCICIOS *números* **781** al **785.**

390.—Limitaciones y reembolsos.—Para evitarse los Bancos el ries-

go de grandes peticiones de sumas en cuentas corrientes por parte de sus cuentacorrentistas limitan algunas veces la importancia del saldo, haciendo que a partir de cierta suma deje de producir intereses o los produzca a un tanto menor, pudiendo ser esta limitación lo mismo máxima que mínima, y en este último caso en vez de tener por objeto el evitar el riesgo, su fin sería limitar el costo de ese depósito para el Banco por causa de la parte de gastos generales que corresponden a cada cuenta.

Cuando existen estas limitaciones es necesario tenerlas muy presentes porque convierten en interés variable el que sin ellas sería constante.

391.—Gastos.—Los gastos a que dan origen las cuentas corrientes son los de correo y la comisión.

Los *gastos de correo* se calculan teniendo en cuenta las cartas que han motivado la cuenta, por lo que bajo el punto de vista que a nosotros interesa constituyen una partida que añadir en el momento en que se cierra la cuenta, pero partida igual a la de cualquiera operación que anotar en ella.

La *comisión* es un tanto por ciento o por mil y puede tener dos aspectos: *comisión de cuenta* que se calcula sobre el movimiento que haya tenido la cuenta en el período de que se trate, es decir, sobre la columna que dé mayor suma, deduciendo de ella al tiempo de calcular la comisión el importe del saldo de cuenta anterior si ese saldo es del mismo signo que la mayor suma; y *comisión de descubierto*, cuyo cálculo se hace también por un tanto por ciento o mil, pero tomando el mayor descubierto que la cuenta tenga durante el período a que la comisión se refiere. Los cálculos de estas dos comisiones pueden verse en los ejemplos de los números **410** y **411.**

La comisión de cuenta es única durante toda la duración de ella, o sea desde un cierre a otro, y la comisión de descubierto puede referirse a un período más corto como de un mes o quincena, en cuyo caso es necesario calcular tantas veces la comisión como períodos haya desde un cierre a otro; así en una cuenta que se liquida y cierra cada trimestre, la comisión de descubierto quincenal se calcularía seis veces sobre otros tantos saldos diferentes, pues siempre se hará el cálculo sobre el descubierto de cada período.

Las comisiones de cuenta constituyen verdaderos gastos, ya que son una remuneración que cobra el Banco por los que le origina la propia cuenta, como talonarios de cheques, servicios, etc., y tiende a que el depositante en cuenta

corriente proporcione otras operaciones al Banco, las cuales producirán a éste alguna utilidad, por cuyo motivo deja de cobrarse la comisión de cuenta sobre las partidas que ya lleven en sí alguna comisión o utilidad para el Banco.

Las comisiones de descubierto constituyen un seguro contra el riesgo de la banca por la falta de garantía real de tales anticipos, y por esa causa son periódicas y de un tanto bastante pequeño (½ por mil quincenal o mensual).

Es necesario tener muy presente estas comisiones que deben ser calculadas en el momento en que se procede al cierre de la cuenta y liquidación de los intereses producidos por las diferentes partidas.

392.—Métodos de cálculo en las cuentas corrientes. —Cuando se trata de los cálculos que pueden originar las cuentas corrientes con interés, es preciso distinguir entre el procedimiento de hacer las anotaciones en ellas, (en el que no podemos entrar por no pertenecer a la materia que tratamos); el modo de determinar los días de interés de las diferentes partidas de la cuenta y con estos días los intereses parciales, y el cálculo de los intereses totales de la cuenta. Además, claro está, deben separarse los cálculos de comisiones y cualquier otro gasto independiente de los intereses.

Los cálculos de intereses, tanto parciales como totales, se pueden hacer por cualquiera de los procedimientos estudiados en los capítulos XVI al XXVIII, sin que pueda decirse que el modo de calcular los intereses constituya método de liquidación de las cuentas, pues éstos se hallan expresados por las consideraciones que ahora hacemos para la determinación de los tres elementos de tales intereses, a saber: días de interés, intereses parciales y capitales sobre que se calculan éstos, y resumen de intereses para hallar el total de la cuenta.

Para *calcular los intereses parciales* de cada partida existen dos procedimientos: por el primero de ellos se considera que deben producir intereses las partidas o capitales que se anotan en la cuenta, y por el otro son los saldos o situaciones de la cuenta los que producen el interés, y cada vez que esta situación se modifica, se tiene un capital del que deben calcularse los intereses. Este último procedimiento es el que está

más en armonía con la naturaleza del contrato de cuenta corriente, además de ser el único posible cuando los tipos de interés no son recíprocos.

Los métodos para *determinar los días* también son diferentes según se adopte el sistema de partidas o el de saldos como productores de interés, pero siempre admitiendo como fundamental que los intereses corresponden a cada partida, sola o incorporada al saldo, desde el día de la valoración o vencimiento (**389**) hasta la fecha de liquidar o cerrar la cuenta.

Considerando la duración de una cuenta comprendida entre los puntos *A* y *L* de la fig. 53, señalando con líneas verticales los vencimientos, los días de interés estarán representados por las longitudes de las líneas horizontales, que puede apreciarse son de varias especies según se tome cada partida independientemente o incorporada al saldo, según indican las letras *P* y *S* que señalan esas líneas.

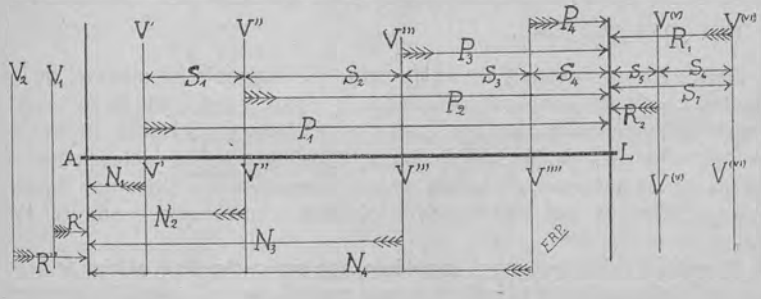


Fig. 55.—Sistemas de contar el tiempo en las cuentas corrientes.

Por fin, *el cálculo de los intereses totales* de la cuenta se puede hacer admitiendo una compensación entre los del Debe y los del Haber como se hace con los capitales para determinar el saldo (**383**) o bien haciendo ese cálculo por separado para los del Debe y para los del Haber. Cuando los intereses son recíprocos es posible la admisión de esa compensación porque no altera el resultado, según veremos; pero si los intereses son diferenciales la compensación no puede hacerse porque se tendría la suma algebraica de cantidades concretas

heterogéneas, ya que heterogéneas son las que expresan números de interés a diferentes tantos (*).

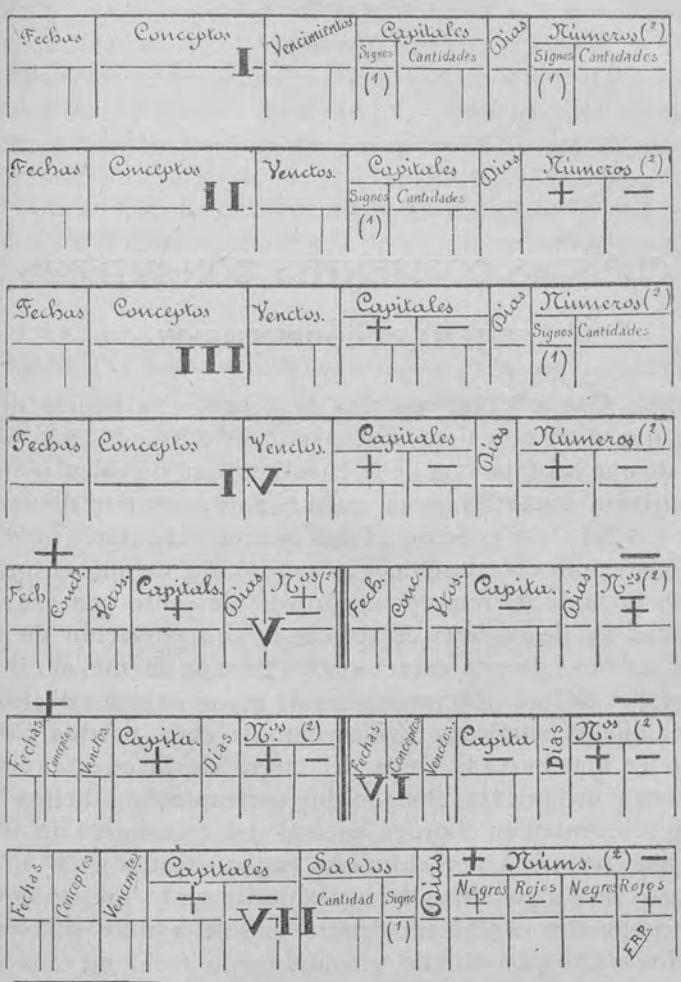
El sistema de cálculo de intereses por partidas siempre supone el cálculo final por compensación, y el sistema de cálculo de intereses parciales por saldos, admite la posibilidad del cálculo final por compensación o sin ella, por lo que es indudable que tendrá una mayor aplicación. Por estas consideraciones que acabamos de hacer es por lo que se dice que las cuentas corrientes con interés pueden llevarse por los dos sistemas *de compensación* y *de saldos*; y fijándose además que los días también admiten el que se calculen hacia el futuro, como los *P* de la fig., o hacia el pasado como los *N* de la fig., resulta una variación que hace que también se diga que el sistema de compensación comprende los dos métodos llamados *directo* e *indirecto*, quedando el sistema de saldos con sólo el método llamado *Hamburgués*; pero repetimos que lo mismo sistemas que métodos son solamente dos y como tales los estudiaremos, pues el mal llamado método indirecto es sólo un caso particular del método directo más difícil, largo y trabajoso que éste.

393.—Disposiciones de la cuenta. - La disposición material de las cuentas corrientes puede ser cualquiera, siempre que en ella haya las columnas indispensables que son: Capitales del Debe y del Haber; Fechas de las operaciones y de las valoraciones; Días durante los cuales hayan de calcularse los intereses; Concepto de las operaciones, y Números comerciales o intereses que correspondan al Debe y que correspondan al Haber.

El orden de esas columnas también puede ser cualquiera, si bien la práctica aconseja que estén lo más próximas posible las columnas de capitales, días de interés y números o intereses, para facilitar así las operaciones numéricas. Cuando hay que calcular comisiones de descubierto es indispensable la existencia de otra columna para saldos con el fin de que se pueda calcular dicha comisión.

Las más frecuentes disposiciones son las que se indican en la fig. 54.

(*) Si se calculan los intereses por medio de los divisores fijos, dichos intereses a tantos diferenciales constituyen quebrados de diferente denominador **(240)** y por el sistema de compensación se admitiría el absurdo de sumarlos sin cambiar de denominador ni reducirlos a uno común.



(1) En vez del signo se acostumbra en la práctica poner las palabras Debe y Haber o sus iniciales.

(2) Si el cálculo de intereses es directo, estas columnas se encabezan con la palabra Intereses.

Fig. 54.—Disposiciones de las cuentas corrientes.

XL

CUENTAS CORRIENTES CON INTERÉS

SISTEMA DE COMPENSACION

394. – Características del sistema.—Ya hemos dicho antes que el sistema de compensación está basado en la admisión de que los intereses de la cuenta se han de calcular sobre las partidas anotadas en la misma, para que por diferencia entre los del Debe y los del Haber se tenga el interés final.

Tiene como características la suposición de que el tipo de interés haya de ser recíproco, porque solamente con esa reciprocidad ha de poderse establecer la compensación de intereses. Además de esta característica tiene la de que el cálculo de los días se hace siempre tomando como origen del tiempo la fecha del vencimiento o valoración de cada partida y contando los días hasta la fecha del cierre de la cuenta, dando como es consiguiente, el signo que corresponda a dichos días según se cuenten en el orden natural del transcurso del tiempo (signo positivo) o en el inverso (signo negativo).

La fecha del cierre de la cuenta puede ser lo mismo la verdadera que otra cualquiera ficticia que se admite solamente para los efectos del cálculo, y cuando esta fecha no es la que en realidad corresponde a la operación de liquidación y cierre se designa con el nombre de *época*.

Para contar los días que median entre las fechas de valoración y de época o cierre, deben seguirse las instrucciones ya conocidas para los cálculos del interés y descuento **(205)**.

395. – Fórmula general del saldo de la cuenta. – La expresión general del saldo de la cuenta corriente con interés en cualquier método que se siga para el cálculo de los intereses es indudable que será (**384**)

$$S = \Sigma C_m - \Sigma C'_m \pm I$$

si es que llamamos I al interés total de la cuenta.

La expresión para cada método es la que nos dé a conocer el valor de este nuevo elemento I, para lo cual hemos de distinguir dentro de cada grupo los capitales que tengan una valoración anterior a la época y los que la tengan posterior; y suponiendo que de los m capitales del Debe o del Haber tengan valoración anterior a la época h y corresponda valoración posterior a k capitales, siendo siempre

$$m = h + k$$

los capitales quedarán diferenciados respecto de su vencimiento por medio de los subíndices a para los de vencimiento anterior y p para los que le tengan posterior a la época, con lo que los capitales del Debe serían:

$$C_{a1}, C_{a2}, C_{a3}, \ldots\ldots, C_{ah}$$
$$C_{p1}, C_{p2}, C_{p3}, \ldots\ldots, C_{pk}$$

y los del Haber tendrían que ser:

$$C'_{a1}, C'_{a2}, C'_{a3}, \ldots\ldots, C'_{ah}$$
$$C'_{p1}, C'_{p2}, C'_{p3}, \ldots\ldots, C'_{pk}$$

Representando ahora los días de intereses por n en igual forma, los intereses o descuentos de cada capital serán

$$\frac{C_m \times (\pm n_m)}{D}$$

si empleamos el procedimiento de los divisores fijos para el cálculo, y según el sentido en que se cuenten los días (**392**).

Resultará por consiguiente que el valor de I será:

$$I = \frac{\sum_1^h C_{ah} n_{ah} + \sum_1^k C_{pk}(-n_{pk})}{D} - \frac{\sum_1^h C'_{ah} n'_{ah} + \sum_1^k C'_{pk}(-n'_{pk})}{D}$$

expresión que puede simplificarse sacando factor común al divisor fijo y tendremos:

$$I = \frac{1}{D}\left(\left[\sum_1^h C_{ah} n_{ah} + \sum_1^k C_{pk}(-n_{pk})\right] - \left[\sum_1^h C'_{ah} n'_{ah} + \sum_1^k C'_{pk}(-n'_{pk})\right]\right)$$

en la que pueden ser cero los segundos términos de cada pa-

réntesis [ ] porque no hubiera partidas con vencimiento posterior al cierre de la cuenta.

Sustituyendo ahora el valor de I encontrado por la fórmula anterior tendremos para el saldo de la cuenta cuando se calcule el interés por el *procedimiento de los divisores fijos*,

$$S = \Sigma C_m - \Sigma C'_m + \frac{1}{D}\left(\left[\sum_1^h C_{ah} n_{ah} + \sum_1^k C_{pk}(-n_{pk})\right] - \left[\sum_1^h C'_{ah} n'_{ah} + \sum_1^k C'_{pk}(-n'_{pk})\right]\right)$$

a la cual deberíamos añadir los gastos de correo, comisión, etc., anotándolos en el lado que corresponda.

Podemos observar que las sumas de productos encerradas entre el paréntesis **( )** constituyen el numerador de la fórmula que daba el vencimiento medio (**293**) y que por consiguiente *el interés de una cuenta corriente por sistema de compensación es el que correspondería al saldo de capitales desde el vencimiento medio hasta el cierre de la cuenta.*

Si en vez de emplear los divisores fijos para el cálculo de los intereses, nos sirviéramos de otro procedimiento cualquiera, hallando directamente dichos intereses, la división de la expresión de la fórmula anterior debería sustituirse por los intereses ya calculados, pero hemos de tener en cuenta que el procedimiento de cálculo directo de intereses aplicable a las cuentas corrientes es el de los tantos bases y especialmente el de los 60 (**257**), por lo que todos los intereses encontrados deberán experimentar la corrección correspondiente (**256**).

Empleando pues, el *procedimiento de los tantos bases* y llamando

$$I_{a1}, I_{a2}, I_{a3}, \ldots, I_{ah}$$

a los intereses de capitales deudores cuyos vencimientos sean anteriores al cierre de la cuenta:

$$I'_{a1}, I'_{a2}, I'_{a3}, \ldots, I'_{ah}$$

a los mismos intereses de capitales acreedores con vencimientos también anteriores al cierre:

$$I_{p1}, I_{p2}, I_{p3}, \ldots, I_{pk}$$
$$I'_{p1}, I'_{p2}, I'_{p3}, \ldots, I'_{pk}$$

a los intereses de capitales vencidos después del cierre, es indudable que a todos aplicaremos la misma corrección, y llamando t_b al tanto base, y t_c al tanto de la cuenta, tendremos para valor de I

$$I = \frac{t_c}{t_b}\left[\left(\sum_1^h I_{ah} - \sum_1^k I_{pk}\right) - \left(\sum_1^h I'_{ah} - \sum_1^k I'_{pk}\right)\right]$$

y por consiguiente la fórmula general del saldo será:

$$S = \Sigma C_m - \Sigma C'_m + \frac{t_c}{t_b}\left[\left(\sum_1^h I_{ah} - \sum_1^k I_{pk}\right) - \left(\sum_1^h I'_{ah} - \sum_1^k I'_{pk}\right)\right]$$

396.—Números e intereses rojos. – Se llaman números rojos aquellos que tienen signo contrario al que les correspondería por razón del lugar de la cuenta a que pertenecen, y en consecuencia el mismo concepto han de tener los intereses rojos si es que para el cálculo nos servimos de los tantos bases.

Podemos observar por cualquiera de las dos fórmulas generales del sistema de compensación anteriormente encontradas que tienen el carácter de números o intereses rojos los correspondientes a capitales cuyas valoraciones son posteriores a la fecha adoptada como época; los números, por contener el factor negativo tiempo, y los intereses, porque representan a esos mismos números.

Haciendo las transformaciones necesarias para convertir todos los números en positivos, la fórmula general se convierte también en la que sigue:

$$S = \Sigma C_m - \Sigma C'_m + \frac{1}{D}\left(\sum_1^h C_{ah} n_{ah} + \sum_1^k C'_{pk} n'_{pk} - \sum_1^h C'_{ah} n'_{ah} - \sum_1^k C_{pk} n_{pk}\right)$$

según la cual *los números* (y los intereses) *rojos corresponden al lado contrario de la cuenta a la que pertenecen los capitales de que se originan*

La denominación de números o intereses rojos proviene de la costumbre práctica de escribirlos con tinta roja para que puedan distinguirse de los de la otra clase.

397.—Modo de operar con los números e intereses rojos.—Es necesario que los números o intereses rojos se traspasen al lado contrario de la cuenta antes de hacer la división por el divisor fijo correspondiente al tanto de la cuenta

o antes también de la corrección del resultado de tantos bases y como esa transposición se puede hacer en cualquier momento, de ahí que siempre que la disposición del rayado lo permite se escriben dichos números o intereses en la columna que corresponde al lado contrario, es decir que el número o interés calculado sobre un capital deudor se escribirá en la columna de números o intereses correspondiente al Haber y viceversa. Este modo de traspasar los números e intereses rojos se halla grandemente facilitado por las disposiciones II, IV y VII de las cuentas corrientes (**393**).

En la práctica se suele traspasar solamente la diferencia entre las dos sumas de dichos números o intereses rojos poniéndola en el lado en que sumen menos, pero este traspaso del saldo de números rojos representa muy pequeña abreviación, si es que hay alguna, pues para evitarse hacer una escritura, es preciso hacer una sustracción y hasta a veces escribir en papel aparte los datos de la sustracción, por lo que juzgamos indiferente el que se traspase el saldo o se traspase cada suma al lado contrario. Empleando los dos procedimientos puede el lector juzgar que no hay abreviación sensible.

398.—Complementos a cero.—Los complementos a cero se aplican en las cuentas corrientes en sustitución de los números e intereses rojos para evitarse el cambio de tinta al escribir dichos números e intereses, y también el cuidado de saltarlos después en las sumas que es necesario hacer cuando ya han sido traspasados al lado contrario, como acabamos de decir. Cuando el traslado se hace en el mismo momento en que se calcula el número por llevarse la cuenta con las disposiciones en que las columnas de números e intereses del Debe y del Haber están una al lado de otra (**393,** II, IV y VII) entonces los complementos a cero son de muy escasa utilidad, porque ese traslado también convierte la resta en suma sin el cuidado de restar la unidad negativa del complemento a cero; pero si a la cuenta se la da la disposición I, III o V, entonces sí que son muy ventajosos los complementos a cero y en el caso de intereses diferenciales se hacen insustituíbles, según veremos en el estudio del caso correspondiente.

Algunos autores, en su gran entusiasmo por los complementos a cero,

llegan a aconsejar su aplicación para hacer la suma algebraica de los capitales y pretenden que en todo caso en que haya números o intereses rojos se sustituyan éstos por sus complementos; pero bien se ve que estos casos de aplicación de los complementos son sólo entusiasmos exagerados que como todo lo exagerado pierde su verdadera utilidad, por lo cual nos atenemos a la aplicación para sólo las columnas de intereses en las disposiciones antes enumeradas y en el interés diferencial.

399.—Método directo.—El método directo es el procedimiento de liquidación de las cuentas corrientes con interés que constituye el sistema de compensación y al que por consiguiente nos hemos venido refiriendo sin nombrarle.

De las fórmulas generales del sistema de compensación (**395**) deducimos la siguiente regla para liquidar una cuenta corriente con interés por el método directo.

1.° Se van haciendo en la cuenta las anotaciones correspondientes en la forma que enseña la Contabilidad, calculando la valoración (**389**) si no estuviera consignada en el documento de donde se hace la anotación en la cuenta.

2.° Se cuentan los días que median desde la fecha de la valoración hasta la del cierre, se calcula con ellos el número comercial (**241**) o el interés a tanto base (**255** y siguientes), escribiendo el resultado en la columna correspondiente. Si el número o interés fuese negativo se escribirá con tinta roja o se trasladará si lo permite la disposición de la cuenta, o bien se sustituirá por su complemento a cero.

Este cálculo se repite para cada uno de los capitales anotados en la cuenta y a medida que se van haciendo las anotaciones correspondientes.

3.° Llegada la fecha en que deba cerrarse la cuenta se trasladan los números o intereses rojos que hubiere, si ya no se trasladaron antes ni se sustituyeron por sus complementos, y se hacen las sumas de números que indican las fórmulas generales.

4.° Estas sumas de números o intereses deben ser divididas por el divisor fijo correspondiente al tanto de la cuenta, o rectificadas según aparece en las fórmulas, pero con objeto de simplificar las operaciones se hace la suma algebraica antes de la división o corrección, lo cual equivale a efectuar estos cálculos de división por el divisor fijo o corrección, sobre el saldo de números.

5.° El interés encontrado se anota como si fuera un capital cualquiera, cuidando de hacer la anotación en el lado que corresponda al signo del saldo de números o intereses, y con el interés se anotan también las comisiones (**391**) y otros gastos que origine la cuenta en la forma que puede verse en el ejemplo de la pág. siguiente.

6.° Se procede a balancear las columnas de números o intereses y la de capitales para reabrir la cuenta con el saldo que resulta según la liquidación (**384**) todo esto igual que se cierra y reabre otra cuenta cualquiera.

Ejemplo: Puede verse el de la pág. siguiente en el que los números rojos van con caracteres más negros para distinguirlos por necesidades tipográficas y en el cual dejamos en blanco la columna de conceptos por simplificación, ya que para nada hacen falta a los efectos del cálculo.

Adoptamos la disposición IV como más adaptable a la impresión.

En las copias de las cuentas o extractos que se remiten a los cuentacorrentistas para su comprobación se hace constar además la fecha en que se liquida y la fórmula S. E. u O. indicadora de que se harán las rectificaciones necesarias si hubiese errores.

Los números comerciales, repetimos que pueden calcularse por cualquiera de los procedimientos estudiados al tratar de los intereses y descuentos, por lo que no podrá considerarse como innovación, el proponer, como alguien ha hecho, hallar estos números por el método de los números diferenciales ni por cualquier otro.

EJERCICIOS sin gastos y sin números rojos, los *números* **786** al **796**; **800**; **803** al **813**; **1433**; **1435**; **1442**; **1453**; **CXCVII** y **CXCVIII**.

EJERCICIOS con gastos y sin números rojos, los *números* **797** al **799**; **801**; **1421** y **DLV**.

EJERCICIOS con números rojos y sin gastos, los *números* **802**; **814** al **816**; **818** al **821**; **823** al **826**; **830**; **831**; **CXCIII** al **CXCVI**.

EJERCICIOS con números rojos y con gastos, los *números* **817**; **822**; **827** al **829**.

PROBLEMAS de cálculo inverso, los *números* **DLI** y **DLII**.

400.—Supresión de los números rojos.—Con el nombre de *procedimiento de saldos vencidos y por vencer* o también con el de *cierre parcial*, se designa el método de liquidación de cuentas corrientes con interés que consiste en considerar como no anotadas las partidas que tengan vencimiento

C/C al 6 % anual recíproco, cerrada en 31-XII-1931

FECHAS		CONCEPTOS	Valoraciones (*)		CAPITALES Debe		CAPITALES Haber		Días.	NÚMEROS (**) Deudores	NÚMEROS (**) Acreedores
Septiembre	3		Septiembre	18	3000 —				104	3120	
»	17		»	18			4500 —		104		4680
Octubre	2		Diciembre	1			2000 —		30		600
»	14		Octubre	14	5000 —				78	3900	
»	27		Noviembre	11			1500 —		50		750
Noviembre	3		»	30	2500 —				31	775	
»	21		Diciembre	1	6200 —				30	1860	
»	29		Noviembre	29	1000 —				32	320	
Diciembre	1		Febrero	1			4000 —		**32**		**1280**
»	12		Enero	11	2800 —				**11**	**308**	
»	28		Diciembre	28			3600 —		3		108
»		Números rojos del Debe.....								1280	308
		» » » Haber.....									
»	31	Intereses deudores.....			80	15					4809
»	»	Saldos de Capitales y Números...					4980	15			
					20580	15	20580	15		11255	11255
Diciembre	31	Saldo anterior.....	Diciembre	31	4980	15					

(*) Las valoraciones son completamente arbitrarias para que sirvan a los cálculos como ejemplos de los más casos posibles.

(**) Hacemos el cálculo con números truncados o reducidos **(245)** para mayor facilidad, y porque así se usa las más de las veces en la práctica.

posterior al cierre efectivo de la cuenta, con lo que desaparecen los números o intereses rojos.

Este procedimiento se funda en el error que se comete al descontar comercialmente un capital por medio de los números e intereses rojos, para que luego en el período siguiente de la cuenta haya de producir intereses vencidos al mismo tanto; además que si se siguiese el procedimiento de sistema de saldos no se conocería el verdadero en fechas posteriores a la del cierre y si también el interés es diferencial, el error puede llegar a ser considerable tanto matemática como prácticamente. Por ello hoy se practica por muchos establecimientos bancarios este método, del que debemos advertir que no tiene nada de moderno, aunque haya autores que en estas fechas pretenden para sí la paternidad del procedimiento, pues ya en 1891 se habla de él sin hacer referencia a quién fuese el que le ideó.

Para el ejemplo anterior, tendríamos:

FECHAS		CONCEPTOS	Valoraciones		CAPITALES Debe		CAPITALES Haber		Días.	NUMEROS D	NUMEROS H
Dicbre...	1		Febrero..	1			4000				
»	12		Enero...	11	2800	—					
»	28		Dicbre...	28			3600	—	3		108
		Cap. no vencidos del D....					2800	—			
		» » » » H....			4000	—					
Dicbre...	31	Ints. deudores.....			63	95					
		Saldos vencidos..... ..					6163	95			3837
					24563	95	24563	95		9975	9975
Dicbre..	31	Saldo ant.....	Dicbre...	31	6163	95					
»	31	De c/ ant.	Febrero..	1			4000	—			
»	»	» » »	Enero...	11	2800	—					

Puede apreciarse que si la cuenta ha de continuar, los intereses que dejaron de calcularse irán incluídos en la nueva liquidación y no habrá perjuicio para ninguna de las partes ya que esos intereses o descuentos no deben ser devengados hasta que la disponibilidad de los capitales no sufra variación por no retirarlos de la cuenta a su vencimiento, y están en la página anterior.

En el ejemplo que antecede, las partes que faltan serían idénticas al caso en que existe el cálculo de números rojos, y que están en la página anterior.

EJERCICIOS *números* **814** al **831**; y **CXCIII** al **CXCVI**.

401. – Variaciones en la fecha del cierre. – Hemos dicho que en el sistema de compensación podía elegirse como fecha del cierre lo mismo la que en realidad sirviera para la liquidación de la cuenta que otra cualquiera (**394**) pero en la práctica no es conveniente que se haga uso de esta arbitrariedad, sinó que siempre debiera tomarse como fecha del cierre la que en efecto hubiera de ser, mas como es indispensable el establecimiento de esta fecha *a priori* para que los cálculos sean factibles, no es posible tener la absoluta seguridad de que haya de coincidir la fecha supuesta con la verdadera, y de ahí la necesidad de generalizar la fórmula al caso en que esa coincidencia no se verifique, o en que habiéndose establecido una fecha de común acuerdo por las dos partes se varíe despues, lo que igual podrá ser por prórroga que por anticipo.

1.° *Prórroga de la fecha del cierre.* – Siendo el saldo que da la fórmula general el capital correspondiente al vencimiento común en la fecha del cierre (**298**), resultará que para todos los capitales se han calculado intereses de menos o descuentos de más, y por un número de días exactamente igual a los que median entre la fecha supuesta y la verdadera, por lo que todos los capitales deberán ser multiplicados por esos días de diferencia para hallar los correspondientes números, o bien deberán calcularse los intereses al tanto base por los días de diferencia; es decir, que llamando n a esos días, la rectificación del resultado según la fórmula general será

$$R = (\Sigma C_m - \Sigma C'_m)n = nS_n$$

si se emplea el método de los números, y

$$R = \sum_{x=C_1}^{x=C_m} I_{nx} - \sum_{x=C'_1}^{x=C'_m} I_{nx}$$

cuando se haga el cálculo directo de los intereses. Hecho ésto, se procede como si las fechas de cierre y época hubieran coincidido.

El ejemplo correspondiente puede verse al tratar del método indirecto (**402**) que es este mismo caso de que ahora nos ocupamos.

2.° *Anticipo de la fecha del cierre.* – Nos hallamos en el caso contrario al anterior, en el que se han calculado intereses

de más y descuentos de menos, por lo que será necesario rebajar el interés de todos los capitales o descontar todos los capitales por los días n de diferencia entre las dos fechas de época y cierre con lo que la rectificación sería:

$$R = (\Sigma C_m - \Sigma C'_m)(-n)$$

para los números, o bien

$$R = \sum_{x=C_1}^{x=C_m} I_{-nx} - \sum_{x=C'_1}^{x=C'_m} I'_{-nx}$$

si es que se utiliza el cálculo directo a tanto base, debiendo procederse después como en el caso en que no haya variación.

Ejemplo: En el resuelto hacemos la misma advertencia que antes respecto de la valoración arbitraria, hecha con objeto de que aparezca el modo de proceder con los números rojos, los cuales en este ejemplo están sustituídos por sus complementos a cero.

C/C al 5 % recíproco calculada al 30-IV y cerrada en 31-III-1931

FECHAS		CONCEPTOS	Valoraciones	Días.	CAPITALES Debe		CAPITALES Haber		NÚMEROS Debe	NÚMEROS Haber
Enero..	1		Dicbre.... 31	120			5420	—		6504
»	7		Enero.... 20	100	10000	—			10000	
»	19		» 19	101			7000	—		7070
»	26		» 28	92	3800	—			3496	
Febrero	4		Febrero.. 19	70			2800	—		1960
»	25		» 25	64	4000	—			2560	
»	27		» 27	62			6500	—		4030
Marzo..	9		Abril..... 9	21			11000	—		2310
»	16		Junio..... 16	47	5600	—			17368	
»	21		Abril..... 18	12	2790	—			334	
»	28		» 8	22	1500	—			330	
		Saldo interino de caps.: 5030—Acreedor.....		30					1509	
		Ints. acreedores.....					87	18		
»	31	Saldos de caps. y números...			5117	18			6277	
					32807	18	32807	18	21874	21874
Marzo..	31	Saldo.....					5117	18		

EJERCICIOS *números* **832** al **844**.

402.—Método indirecto.—El método indirecto para liquidar las cuentas corrientes con interés, es aquél en que se fija como fecha ficticia de cierre de la cuenta, es decir como

época, la correspondiente al primer vencimiento o una cualquiera anterior al mismo, siendo conveniente tomar como tal época la fecha del primer vencimiento para facilitar los cálculos y ahorrarse uno.

Lo que acabamos de decir es el concepto fundamental del método indirecto, pues su objeto es evitar el inconveniente de la existencia de números rojos y los traspasos de éstos; pero nos encontramos con que lejos de desaparecer los números rojos en el método indirecto, serían todos de esta clase, y si pudiese conseguirse que efectivamente fuesen rojos todos los números o intereses, tendríamos algún beneficio, porque nos evitaríamos el traslado de dichos números con sólo considerar los del Debe como pertenecientes al Haber y viceversa; pero tampoco podemos llegar a esta uniformidad de naturaleza en números o intereses porque en la práctica ocurre con mucha frecuencia que no se conoce la fecha del primer vencimiento, algunas veces hasta casi llegada la fecha verdadera del cierre, y con esta falta de conocimiento, ya antes se ha elegido una época posterior y nos encontramos con que en el método indirecto hay números de dos signos en cada lado de la cuenta.

La existencia de esas dos clases de números o intereses con signos contrarios en cada lado puede apreciarse por las líneas R' y R'' y las N de la fig. 53 de la pág. 423 y ésto hace que no podamos evitarnos el traslado ni el inconveniente de los números o intereses rojos.

En el método indirecto, se admite que los números e intereses rojos queden sin trasladar, por medio de la consideración a que antes hicimos referencia de que los del Debe representen valores del Haber y viceversa, y por esta causa se llaman números e intereses rojos a los que no tienen esa significación equívoca y que provienen de capitales con valoración anterior a la época elegida. Resulta, por consiguiente, que los números en el método indirecto representan lo contrario de lo que en realidad indica el lugar en que se encuentran.

Veamos ahora *cómo el método indirecto es sólo un caso particular del sistema general de compensación o sea del método directo.*

Establecida como época la fecha del primer vencimiento si ésta se conoce, o la del primero que se conozca, la fecha ver-

dadera del cierre es posterior a la época y por tanto nos hallamos en el primer caso del número anterior según entonces decíamos. Así pues, la rectificación que ha de hacerse al liquidar una cuenta corriente por el método indirecto, ha de ser como indica la fórmula entonces hallada, la expresada por la *regla* siguiente:

Calcular el saldo de capitales—al que llamaremos *saldo interino*—y multiplicarle por los días que median entre la época y el cierre o calcular los intereses de ese saldo interino por los mismos días. El número o interés así encontrado debería anotarse en el lado de la cuenta que indique el signo del saldo, es decir, que si el saldo es deudor, se anotaría en el Debe, y si acreedor en el Haber; pero en virtud de la situación equívoca de los números o intereses que figuran en la cuenta, deberíamos trasladar luego todos los números o intereses anotados antes en la cuenta, y como es más fácil escribir el número o interés rectificativo en el lado opuesto al que le corresponde, se hace así para abreviar, y se tiene presente que ya todos los números o intereses tienen la significación contraria de que tanto venimos hablando.

Si hay números de capitales vencidos antes de la época se trasladan éstos como números rojos (**397**) y se procede después al cálculo de los intereses verdaderos como en el procedimiento ordinario, pero teniendo presente que los intereses resultantes deberán anotarse en el lado contrario al que indica el saldo de que provienen, o sea, donde las sumas de números o intereses hayan sido menores, y luego se cierra y reabre la cuenta como en el método directo.

Observación importante.—Todas las operaciones de liquidación de la cuenta por el método indirecto, o sea, la rectificación por prórroga de la fecha del cierre, el traslado de números o intereses rojos, el cálculo de los intereses totales sobre el saldo de la columna de números o intereses, y el saldo de la cuenta, *siempre se anotan en el lado donde las sumas hayan sido menores.*

Ejemplo: La cuenta que resolvemos por este método, aparece con las mismas valoraciones arbitrarias que ya hemos hecho observar y empleamos en ella el cálculo por el método de los 60 (**257**) para que sirva de ejercicio variado. También aparece en blanco la columna de los conceptos por las razones conocidas.

En los intereses parciales hemos redondeado aproximando por medias

décimas que es el sistema seguido en la práctica y cuyo error es insignificante porque se compensa entre los diferentes cálculos de la cuenta.

C/C al 5 % recíproco cerrada en 31-III-1928

FECHAS		Conceptos	VALOR		Días.	Capitales D		Capitales H		Ints. D. 6%		Ints. H. 6%	
Enero.	1		Dicbre.	31				5420	—			Epoca	
»	7		Enero..	20	20	10000	—			33	33		
»	19		»	19	19			7000	—			22	15
»	26		»	28	28	3800	—			17	75		
Febr....	4		Febr....	19	50			2800	—			25	35
»	25		»	25	56	4000	—			37	35		
»	27		»	27	58			6500	—			62	85
Marzo..	9		Abril...	9	100			11000	—			183	35
»	16		Junio...	16	168	5600	—			156	80		
»	21		Abril...	18	109	2790	—			50	70		
»	28		»	8	99	1500	—			24	75		
		Saldo interino de capitales. 5030—Acreedor			91					76	30		
»	31	Ints. acreedores						87	75				
		Saldos de c., e ints. 6 %				5117	75					105	30
						32807	75	32807	75	397	00	397	00
Marzo..	31	Saldo.....						5117	75				

EJERCICIOS *números* **786** al **844; 1433; 1435; 1442; 1453; CXCIII** al **CXCVIII** y **DLV**, de los cuales producen números rojos por el método indirecto los números **801; 803** al **806; 816; 822; 823; 828; 829; 825** si en ésta se hacen cierres trimestrales; **CXCIV**; **CXCV** y **DLV**.

403.—Medio indirecto de contar los días.—Las dos operaciones que comprende el cálculo en el método indirecto, y que respectivamente toman como días los que hay desde el principio de la cuenta hasta el vencimiento y los totales de la cuenta, dan los días verdaderos de interés de cada partida, como podremos apreciar al examinar la fig. 55 de la pág. 425, en la que N son los días falsos de interés, y los P que son los verdaderos resultan para cada capital restando los N de la duración total AL, habiendo pretendido muchos autores que ésto sea un sistema especial en las cuentas corrientes con interés, al que llaman *procedimiento indirecto de contar los días*, que vemos consiste en hacerlo desde la época hasta la valoración de la correspondiente partida; pero antes hemos dicho (**394**) que en en el sistema de compensación se cuentan los días que median entre la fecha del cierre, verdadera o ficticia, y la fecha de la valoración, por consiguiente cualquiera que sea la situación relativa de esas dos fechas siempre tendremos un sólo procedimiento, si bien el resultado tendrá que estar afectado del

signo positivo o negativo según que sea más larga la fecha minuendo o la sustraendo, como al restar dos cantidades que no fuesen fechas.

Resulta, pues, que no existe el método indirecto ni para el cálculo de los días ni para la liquidación de la cuenta corriente con interés, sinó que se designa así a un caso particularísimo del sistema de compensación o método directo.

404.—Comparación de los dos métodos prácticos del sistema de compensación.—Para que el parangón que vamos a establecer entre el método directo e indirecto sea lo más claro posible lo dividiremos en las diferentes partes que ha de comprender en la forma que sigue:

1.° *Facilidad de ambos procedimientos.*—Es indudablemente mucho más fácil el método directo porque en él todas las cantidades dan siempre el verdadero significado que las corresponde por el lugar que ocupan en la misma cuenta, mientras que en el método indirecto la significación de los números o intereses provisionales es la inversa de las cantidades que les han originado y esto causa equivocaciones y además se hace bastante difícil de comprender por los principiantes.

2.° *Utilidad de los cálculos efectuados.*—Se dice por todos los que tienen que liquidar cuentas corrientes con interés y por los tratadistas rutinarios que el cálculo de los números o intereses provisionales no puede hacerse en el método directo hasta que ya se conozca la fecha verdadera y definitiva del cierre de la cuenta, mientras que en el método indirecto puede empezarse dicho cálculo en el instante mismo en que se anota la primera partida; pero si invertimos los términos estaremos en lo cierto, pues si bien en los dos métodos los cálculos son aprovechables cualquiera que sea el momento en que se hayan hecho, también es cierto que para que no existiesen números rojos en el método indirecto sería preciso esperar al término de la cuenta para fijar la época, de modo que no hubiese duda de que correspondía con la primera valoración, por consiguiente, si alguna ventaja tiene un método sobre el otro por esta causa, esa ventaja estará indudablemente del lado del método directo.

3.° *Números rojos.*—Todo el que haya estudiado las cuentas corrientes con interés sabe que en el método indirecto puede haber números rojos y que efectivamente los hay en

muchos casos en la práctica, al paso que en el método directo siendo posible la existencia de esos números rojos de hecho no existen en la práctica (**400**), luego también ahora la ventaja está de parte del método directo.

4.° *Rapidez de procedimiento.*—Hemos visto que en el método directo debe hacerse una rectificación en los cálculos *cuando varía la fecha del cierre* (**401**), pero también hemos visto que en el método indirecto esa rectificación debe hacerse *siempre*, luego la rapidez no cabe duda que está en favor del método directo, y para que no se diga que esa mayor rapidez del método directo es pequeña debemos hacer constar que en los establecimientos bancarios, que es donde se llevan muchas cuentas corrientes con interés, se tiene establecido que la liquidación de las mismas se haga en los finales de trimestre, semestre o año y no llega al 1 % las cuentas que es preciso liquidar en fechas diferentes, por tanto, el ahorro de trabajo que supondría el adoptar el método directo sería extraordinario, con la ventaja de que ese ahorro de tiempo se obtiene precisamente en las épocas en que la acumulación de trabajo es mucho mayor y por consiguiente en el momento en que rinde mayor beneficio todo lo que sea simplificación.

Resumiendo los cuatro puntos anteriores podemos decir que no tiene razón de ser el empleo del método indirecto y en cambio sería extraordinariamente ventajoso la adopción del método directo que reune toda suerte de ventajas sobre el método indirecto, terminando con palabras de un autor moderno que buscando las causas del empleo del método indirecto en las empresas mercantiles dice que su uso continúa «por la larga costumbre, el *imperfecto conocimiento de los otros métodos* y los prejuicios que sobre su empleo todavía se mantienen» (*).

(*) E. B. *Conti correnti*, pág. 46.

XLI

CUENTAS CORRIENTES CON INTERÉS

SISTEMA DE SALDOS

405. – Características del sistema.—Ya decíamos (**392**) que el fundamento de este sistema consiste en la admisión de que los intereses han de calcularse sobre los saldos que vaya presentando la cuenta, y cada uno de éstos producirá intereses en tanto que no sufra variación por alguna nueva partida, por consiguiente los días para cada saldo serán los comprendidos *desde su valoración hasta la valoración de la partida siguiente*.

Las disposiciones de las cuentas por este sistema pueden ser cualquiera de las que contengan columna para los saldos, si bien las más usadas son las I, II y VII y como si se emplea cualquiera de las dos primeras, la determinación de los saldos se hace mediante sumas y restas en la forma

$$\begin{array}{r} 6000 \text{ —} \\ 4800 \text{ —} \\ \hline 10800 \text{ —} \\ 3800 \text{ —} \\ \hline 7000 \text{ —} \end{array}$$

resulta una escala, de donde viene la denominación de *método por escalas* al sistema de que nos ocupamos, si bien hoy ya es muy raro encontrar cuentas con estas disposiciones, sino que se destina una columna especial para los saldos.

406. – Fórmula general del saldo de la cuenta.—En la fórmula general (**395**) lo único que variará será la determinación del elemento I para el que si llamamos t a la fe-

cha del cierre de la cuenta y $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots\ldots t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots t_{n+m}$ a las fechas de las valoraciones respectivas de los diferentes capitales, lo mismo positivos que negativos, el interés de cada saldo $I_{s1}, I_{s2}, \ldots\ldots\ldots I_{sn}, I_{s(n+1)}, I_{s(n+2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots I_{s(n+m)}$, deberá ser:

$$I_{s1} = C_1(t_2 - t_1)$$

$$I_{s2} = (C_1 + C_2)(t_3 - t_2) = \sum_1^2 C_x\,(t_3 - t_2)$$

$$I_{s3} = (C_1 + C_2 + C_3)(t_4 - t_3) = \sum_1^3 C_x\,(t_4 - t_3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_{sn} = (C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n)(t_{n+1} - t_n) = \sum_1^n C_x\,(t_{n+1} - t_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_{s(n+m)} = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n + C_{n+1} + \ldots + C_{n+m})(t - t_{n+m}) =$$

$$= \sum_1^{n+m} C_x\,(t - t_{n+m})$$

en cuyas expresiones las sumas y diferencias indicadas son siempre algebraicas y por consiguiente los valores I tendrán el signo que corresponde según el de sus factores.

Si ahora hacemos la suma de los valores I en los segundos miembros sacando factores comunes los capitales, nos encontraremos para intereses del primer capital

$$I_1 = C_1[(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + (t_4 - t_3) + \ldots\ldots + (t - t_{n+m})] =$$

$$= C_1 \sum_1^{n+m} [t_{x+1} - t_x]$$

y como en los términos del paréntesis [ ] cada sustraendo destruye al minuendo siguiente, será valor de la suma $\sum_1^{n+m} [t_{x+1} - t_x]$ el tiempo $t - t_1$ que es lo que en el sistema de compensación llamábamos n_1 **(395)**, luego

$$I_1 = C_1 \sum_{1}^{n+m} (t_{x+1} - t_x) = C_1(t - t_1) = C_1 n_1$$

Para valor del interés del segundo capital hallaríamos

$$I_2 = C_2 \sum_{2}^{n+m} (t_{x+1} - t_x) = C_2(t - t_2) = C_2 n_2$$

y en general la expresión:

$$I_x = C_x \sum_{x}^{n+m} (t_{x+1} - t_x) = C_x (t - t_x) = C_x n_x$$

que nos manifiesta que los intereses obtenidos por el sistema de saldos son los mismos que se obtienen por el sistema de compensación, resultando por consiguiente la misma fórmula general del saldo.

407.—Números e intereses rojos.—Los números e intereses rojos tienen ahora el mismo concepto que en el sistema de compensación (**396**); pero que su origen está en que tengan signos negativos las diferencias de fechas que en las expresiones anteriores determinan los tiempos de interés, y para que ésto suceda es indispensable que en el orden de sucesión de los capitales en la cuenta haya alguno cuya valoración sea anterior a la del capital que le antecede, es decir, que el orden de fechas no coincida con el orden de valoraciones. También existirá número o interés rojo cuando el último capital de la cuenta tenga una valoración posterior al cierre, pero ya hemos dicho (**400**) cómo en la práctica se suprime esta clase de números e intereses rojos.

408.—Modo de operar con los números e intereses rojos.—Cuando el tipo de interés de las cuentas corrientes es recíproco, sea o no variable, los números rojos del método Hamburgués se consideran como números positivos pertenecientes al lado contrario de la cuenta y se anotan en la columna contraria, con lo cual por compensación se evita el traslado de dicha clase de números o intereses.

En lugar de cambiar de columna los números e intereses rojos pueden sustituirse por sus complementos a cero (**398**)

con lo que el resultado será también exacto aunque el tipo de interés fuese diferencial.

Si el tipo de interés fuese diferencial no es posible hacer el cambio de columna indicado para los números o intereses rojos, porque entonces no es posible la compensación en que se funda esta manera de proceder. En tal caso sólo puede hacerse la sustitución por los complementos a cero, si es que no hay cambio de signo en el saldo durante el período comprendido entre las dos valoraciones cuya respectiva situación origina el número o interés rojo. Cuando ese cambio de signo tuviere lugar sería indispensable anular todas las anotaciones durante dicho período por medio de los complementos a cero, para restablecer la cuenta por orden de vencimientos, pues cualquier otro medio será más largo y menos claro.

409.- Variedades de procedimiento en el sistema de saldos.—Por las consideraciones que antes hemos hecho y por el origen de los números e intereses rojos en este método, podemos deducir inmediatamente que existen dos variedades en el procedimiento de saldos para liquidar las cuentas corrientes, los cuales consisten en disponer las anotaciones *por orden de fechas* o *por orden de valoraciones*.

410.—Regla para liquidar la cuenta por orden de fechas.—Después de examinar la forma en que determinábamos los intereses para deducir la fórmula general, el caso en que se originan números rojos, el medio de hacer desaparecer algunos de dichos números y la forma en que se procede cuando tales números o intereses existen, podemos dar la siguiente regla de liquidación:

1.° Se hacen en la cuenta las anotaciones correspondientes a medida que aparecen los hechos que la motivan.

2.° Cada vez que se hace una anotación en la cuenta, se determina el saldo que corresponde a la misma, y si es que hay anotaciones anteriores, se cuentan los días que median entre el vencimiento de la operación última y la que en el momento se está anotando. Estos días son sobre los que corresponde calcular el interés del saldo que tenía la cuenta antes de hacer la anotación actual, es decir, que para el caso en que se anota la segunda operación, los días de interés hallados corresponden al primer saldo de la cuenta; cuando se anota la tercera partida los días hallados sirven para el cálculo del interés del segundo saldo y así sucesivamente.

3.° Si en estos cálculos resultase algún número o interés rojo, se sustituirá por el complemento a cero correspondiente o bien se escribirá en la columna contraria al signo del saldo de que proviene.

4.° Si hay alguna partida con vencimiento posterior al cierre, no se calculan intereses de ella. (1)

5.° Llegado el cierre, se cuentan los días desde la valoración del último saldo hasta la fecha de este cierre y sobre ellos se calculan los intereses del último saldo. Si el cierre de la cuenta fuera definitivo porque no hubieran de continuarse las operaciones, se incluiría también en la liquidación las partidas de valoración posterior, y en tal caso podría suceder que la valoración del último saldo fuese posterior a la fecha del cierre, teniéndose un número negativo o rojo con el que deberá procederse en la forma indicada para los de esta clase.

6.° Se calculan los intereses que corresponden al saldo de las columnas de números o intereses en la forma que se hizo en el sistema de compensación (**399**) y en igual forma que en tonces se anotan los intereses encontrados y las comisiones de la cuenta, y se balancean las columnas de números y capitales, restableciendo el saldo que resulte como primera partida de una nueva cuenta aunque el cierre sea definitivo.

Ejemplo: Es el de la página siguiente, al que son aplicables las observaciones generales respecto al orden de las columnas, ofreciendo sólo la particularidad del cálculo de la *comisión sobre el descubierto máximo*, que al ser trimestral y durar la cuenta en parte de dos trimestres tendríamos:

1er trimestre 1 °/₀₀ de 3000.....	Ptas.	3 —
2.° » 1 °/₀₀ de 9700.....	»	9'70
Total comisión que figura en la cuenta	»	12'70

EJERCICIOS sin números rojos, los *números* **786** al **794**; **796** al **799**; **807**; **808**; **811**; **812**; **1421**; **1433**; **1435**; **1453**; **CXCIII** y **CXCVI** al **CXCVIII**.

EJERCICIOS con números rojos los *números* **795**; **800** al **806**; **809**; **810**; **813** al **831**; **1442**; **CXCIV**; **CXCV**, y **DLV**.

411.—Liquidación de la cuenta por orden de valoraciones. – La diferencia que existe entre este procedimiento y el anterior consiste en que la determinación de los saldos de la cuenta sobre los que hayan de calcularse los intereses no

1º Para liquidar en este caso se toman los días de cada saldo anterior al cierre como si el cierre hubiera de ser después y el último saldo se calcula tomando como negativos los días desde el cierre hasta el último vencimiento

C/C al 6 °/₀ recíproco cerrada en 31-XII-1931.—Com. 1 °/₀₀ trimestral s/ descubierto mayor

FECHAS		Capitales D		Capitales H		SALDOS In	SALDOS Cantidad		VALORACION		Días.	Núms. D	Núms. H	CONCEPTOS
Septiembre.	3	3000	—			D	3000	—	Septiembre.	16	2	60		
»	18			4500	—	H	1500	—	»	18	74		1110	
Octubre.....	2			2000	—	»	3500	—	Diciembre..	1	48	1680		
»	14	3000	—			D	1500	—	Octubre....	14	28	420		
»	27			1500	—	Saldada.			Noviembre..	11	»			
Noviembre.	2	2500	—			D	2500	—	»	15	16	400		
»	21	6200	—			»	8700	—	Diciembre...	1	2		174	
»	29	1000	—			»	9700	—	Noviembre..	29	32	3104		
Diciembre..	1			4000					Febrero...	1				
»	12	2800	—						Enero.....	10				
»	31	4000	—	.....	...	...	.....	...	.....	...	...	.....	.....	No venc., a c/ nueva.
»	»			2800	—	...	.....	...	.....	...	...	.....	.....	» » » »
»	»	75	—			D	9775	—						Ints.
»	»	12	70			»	9785	70						Comisión 1 °/₀₀ trim.
»	»			9785	70								4380	Saldos.
		24585	70	24585	70							5664	5664	
Diciembre...	31	9785	70	.....	...	...	.....	...	.....	...	...	.....	.....	Saldo ant.
»	»	2800	—	.....	...	...	.....	...	.....	...	...	.....	.....	De cuenta ant.
»	»			4000	—	D	8585	70	.....	...	...	.....	.....	» » »

puede hacerse en el momento en que se hace la anotación de la partida, sinó que es indispensable aguardar a que llegue la fecha de la valoración, o bien llevar la cuenta para los efectos de la liquidación en papel aparte en el que no se harán las anotaciones hasta llegada la fecha de cada valoración.

Como el tener que esperar a la anotación hasta el momento de la fecha de cada valoración retrasa el trabajo, acumulándolo en la época del cierre de las cuentas, lo mejor será añadir a la disposición VII de las cuentas **(393)** una columna para la valoración de los saldos como aparece en el ejemplo.

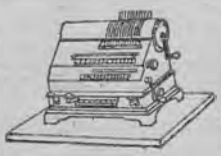
Ejemplo: Reproducimos la cuenta del anterior por orden de valoraciones suprimiendo las dos partidas que tienen vencimiento posterior a la fecha del cierre porque nada varía el modo de proceder con ellas y además calculamos la comisión sobre el movimiento de la cuenta con objeto de que sirva de ejercicio a este cálculo, y para tener más variedad empleamos en este ejercicio el de los intereses directos a tanto base de 5 °/₀ y año comercial. Con todas estas observaciones la cuenta con la disposición especial que antes hemos indicado será la de la página siguiente.

Puede notarse en la disposición de la cuenta que los saldos que aparecen en la columna respectiva no corresponden a la fecha y partida escritas en la misma línea que el saldo, sinó que cada saldo es el resultado de todas las partidas vencidas en la fecha que indica la columna de valoración del saldo

EJERCICIOS, los que se indican con números rojos para el orden de fechas.

412.—Variación de la fecha del cierre.—No siendo indispensable conocer la fecha en que haya de cerrarse la cuenta sino es para no incluir en la liquidación las partidas no vencidas en dicho cierre, el inconveniente que de las variaciones en la fecha del cierre anteriormente establecida pueda resultar para dejar de incluir esas partidas, queda subsanado con el empleo del orden de vencimientos en la liquidación de la cuenta, en la forma que hemos indicado y en tal caso la cuenta estará siempre dispuesta al cierre, tanto provisional como definitivo, sin necesitar rectificación ninguna.

Puede utilizarse como ejercicios los números **832** al **844.**



C/C al 4 1/2 % recíproco, cerrada en 31-XII-1931

FECHAS		CONCEPTOS	Capitales D		Capitales H		Valoraciones		Iniciales	Saldos (*)		Valor saldos		Días.	Ints. D.		Inst. H	
Septiembre.	5		3000	—			Sep.	16	D	3000	—	Sep.	16	2		85		
»	18				4500	—	»	18	H	1500	—	»	18	26			5	40
Octubre.....	2				2000	—	Dic.	1	D	3500	—	Oct.	14	28	13	60		
»	14		5000	—			Oct.	14	»	2000	—	Nov.	11	4	1	10		
»	27				1500	—	Nov.	11	»	4500	—	»	15	14	8	75		
Noviembre..	2		2500	—			»	15	»	5500	—	»	29	2	1	55		
»	21		6200	—			Dic.	1	»	9700	—	Dic.	1	30	40	40		
»	29		1000	—			Nov.	29										
Diciembre...	31	Intereses.....	54	77													60	85
»	»	Comisión.....	17	70					D	9772	47	»	31					
»	»	Saldo.....			9772	47												
			17772	47	17772	47									66	25	66	25
Diciembre...	31	Saldo anterior.....	9772	47														

(*) Bajo el punto de vista de la Contabilidad serían necesarias dos columnas de saldos correspondientes al saldo vencido para calcular intereses, que es el que aquí aparece, y el saldo general o no vencido.

XLII

CUENTAS CORRIENTES CON INTERÉS

CASOS ESPECIALES

413.—Intereses diferenciales.—Cuando el interés de las cuentas corrientes no es el mismo para el Debe que para el Haber no es posible admitir el método de compensación porque éste supone que las variaciones de tipos son motivadas por la situación de cada partida en la cuenta y en tal caso podríamos tener dos variaciones, según que se admitiese que los intereses totales de la cuenta se hallasen con independencia para los números del Debe y los del Haber o bien que se admitiese la compensación entre las dos clases de números calculando los intereses sobre el saldo y al tipo que corresponda según el signo del mismo saldo.

La compensación de esta segunda variación es un verdadero absurdo tanto teórico (**392**) como práctico; y en lo que se refiere a la primera variación teóricamente es admisible, porque las partes que intervienen en la cuenta están en absoluta libertad de contratar cuál es el elemento sobre el que hayan de calcularse los intereses, si el saldo de la cuenta o cada partida con independencia; pero en la práctica el absurdo todavía subsiste, pues si se tratase, por ejemplo, de un caso frecuente en que un cliente de un Banco entrega en cuenta una partida de 100000 pesetas el 6 de febrero y de la cual retira en 28 del mismo mes 90000 pesetas, suponiendo que los tipos de interés fuesen el 2 % a favor del cliente y el 5 % a favor del Banco, caso que tiene situación de lo más favorable que en la práctica pueda haber para un cliente, resulta que en el Debe los números hasta fin de semestre, que es también la fecha más corriente de cierre de cuentas, serían de

100000 ptas. × 144 días = 14.400.000 números

y en el Haber se tendría

90000 ptas. × 122 días = 10.980.000 números

de los cuales resultan los siguientes intereses:

Interés de 14.400.000 núms	al 2 °/₀	Ptas. 800
» de 10.980.000	» al 5 °/₀	» 1525
Intereses a favor del Banco.		» 725

Resulta por la compensación que un particular por tener en el Banco cien mil pesetas durante 22 días y diez mil durante 122 debe pagar al Banco 725 pesetas de intereses.

Vemos pues, que *es indispensable seguir el método de saldos para la liquidación de las cuentas corrientes con intereses diferenciales* porque ha de ser sobre los saldos que han de calcularse los intereses, y *precisamente sobre los saldos vencidos*.

En el caso de intereses diferenciales, el empleo del método de saldos debiera únicamente hacerse por el *orden de valoraciones* para evitar los números rojos, pero como no siempre es posible en la práctica establecer las cuentas sin que después haya alguna anotación de fecha atrasada que altere el orden de vencimientos, vamos a estudiar el modo de liquidar estas cuentas por orden de fechas.

Lo anterior no excluye la posibilidad de llevar y liquidar esta clase de cuentas por el sistema de compensación, siempre que *cada vez que haya variación de signo en el saldo se proceda a una liquidación como veremos para el caso de variación del tipo de interés*, lo cual constituye un trabajo tan extraordinario que hace aconsejar no seguir este método en la práctica y únicamente es admisible para comprobar los cálculos del método de saldos, porque el saldo de números o intereses provisionales ha de ser el mismo en los dos sistemas.

414. – Cuenta con intereses diferenciales por orden de fechas. – Para una cuenta corriente con intereses diferenciales llevada por *orden de fechas* se procede en la forma conocida para el caso en que los intereses sean recíprocos excepto en lo relativo a los números o intereses rojos.

Los números o intereses rojos que resultan en el caso de que nos ocupamos, ya dijimos (**408**) que no pueden cambiarse de columna porque ésto es una compensación y, como cada

columna de números representa los de un tipo de interés diferente, tendríamos ahora también una suma de cantidades heterogéneas, pues lo que corresponde hacer es restar dicho número o interés rojo de la columna en que debería escribirse si fuese número negro, es decir que en tal caso debe sustituirse el número o interés rojo por su complemento a cero. Pero esta manera de proceder sólo es exacta cuando entre la valoración de la partida que motiva el número rojo y la valoración del penúltimo saldo no hay cambio de signo ninguno en dicho saldo, como sucede con el capital valorado en 18 septiembre del ejemplo que sigue. La forma de proceder señalada para el caso de interés recíproco y ahora repetida, se denomina de *referencia a la valoración más baja*; pero en general será más ventajoso proceder en la forma llamada de *referencia a la valoración mas alta*, en la cual el número se calcula, no sobre el saldo, sino sobre el capital de valoración intermedia, como sucede con los dos capitales de valoración octubre 20 y octubre 25 del ejemplo que sigue, en los cuales se calcula el número correspondiente sobre cada capital y contando los días que hay entre su valoración y la del saldo anterior al cual se refiere (30 de octubre); el número que así resulta es número positivo si el capital y los saldos de la cuenta en el mismo período son de igual signo, como en el segundo de dichos dos capitales, y el número es rojo cuando saldos y capital tienen signos diferentes, como el del primero de los dos referidos capitales, en el cual está sustituído el número rojo por su complemento a cero.

Si entre la valoración que altera el orden de fechas en éstas y la del último saldo, hubiese cambio de signos en el saldo, o comprendiese el período intercalado varios saldos de diferentes signos, el único procedimiento prácticamente ventajoso sería anular por complemento a cero todos los cálculos y anotaciones que destruyen el orden de fechas de las valoraciones, y después restablecer la cuenta por el orden de éstas.

Puede apreciarse en el mismo ejemplo que sigue, que una vez referidas las partidas a la valoración más alta, se sigue con el último saldo resultante lo mismo que si la cuenta se hubiera dispuesto por orden de valoraciones.

Terminado el cálculo de números o intereses provisionales

se reducen éstos por separado en los del Debe y los del Haber al tanto que para cada parte corresponda.

Ejemplo: Disponemos la cuenta en forma escalar (disposición II) para que pueda apreciarse con más facilidad cuándo se calculan los números sobre el saldo y cuándo el capital.

C/c al 5 °/₀ para el Debe y 2 °/₀ para el Haber; cerrada en 5-XI-1931

FECHAS		CONCEPTOS	Valoración		Iniciales	Capitales y saldos		Días.	NÚMEROS	
									Deudores	Acreedores
Sepbre	3		Sepbre.	10	D	15000	—	5	750	
»	11		»	15	H	8000	—			
					D	7000	—	15	1050	
»	16		»	30	»	8000	—			
					»	15000	—	12	18200	
»	18		»	18	»	2500	—			
					»	17500	—	27	4725	
»	20		Ocbre..	15	H	24800	—			
					»	7300	—	15		1095
Ocbre..	18		»	30	»	2200	—			
					»	9500	—			
»	20		»	20	D	6000	—	10		1400
					H	3500	—			
»	25		»	25	»	2000	—	5		100
					»	5500	—	6		330
Novbre.	5	Ints. 6 °/₀.....			D	78	75		4725	
					H	5421	25			
»	»	Ints. 2 °/₀.....			H	5	14			925
»	»	Saldo a c/n.....			H	5426	39			
Novbre.	5	Saldo anterior....			H	5426	39			

Para que el cálculo de los intereses de cada parte aparezca más claramente expresado sobre qué números se calculan es para lo que se consignan las sumas de números en las mismas líneas en que se escriben los intereses, si bien éste es un detalle insignificante que no es indispensable seguir.

EJERCICIOS *números* **851** al **865; 869** al **871; 1423; 1443; 1446; 1458; CXCIX; CC,** y **DLIV,** de los cuales producen nú-

meros rojos sin alteración de la clase de saldo los **851; 853; 856; 858; 861**; y números rojos con alteración de la especie de saldo los **855; 857; 859; 860; 862** al **865; 870; 1443; 1446; CXCIX; CC** y **DLIV.**

415.—Tantos variables.—Cuando el tipo de interés de las cuentas corrientes sufre variación durante el período de las mismas, es preciso efectuar una liquidación de los intereses como si se tratase del cierre, con el sólo cuidado de no consignar los intereses hasta el momento en que en realidad se cierra la cuenta, pues si se hiciese antes, el interés pasaría a ser compuesto, en vez de simple, por calcularse nuevos intereses sobre los encontrados en ese cierre provisional.

Estos cierres provisionales deberán ser tantos cuantas variaciones de tantos hubiese durante el período de la cuenta.

Para el sistema de compensación la forma de proceder es la que ya hemos estudiado (**401**), pues que si esas variaciones de tantos fuesen conocidas antes de empezar los cálculos, fijaríamos para cada subperíodo una época, pero si no se conocen esas variaciones, como efectivamente sucederá en la práctica entonces cada liquidación parcial es un caso de variación la fecha del cierre (**401**, 2.°) y como tal procederemos.

Llevadas por el sistema de saldos las cuentas están siempre dispuestas para el cierre, por consiguiente cuando haya variación del tipo de interés *se hace un cierre provisional en la fecha de la variación* como en el sistema de compensación.

Ejemplo: Véase el resuelto en la página siguiente, en el que puede apreciarse cómo se han de anular las partidas que vencen después de la fecha en que se hace el cierre provisional por cambio del tipo de interés, anulación igual a la del cambio en la fecha del cierre. Esta anulación es tanto más necesaria en este caso, cuanto que las partidas no vencidas serían descontadas a un tipo diferente de aquél a que habrían de producir intereses en el período siguiente, con lo que el error cometido por diferencia entre descuento e interés, que en el caso de no haber variación en el tanto es muy pequeño y prácticamente casi nulo, en este caso de ahora puede llegar a tener importancia práctica, siendo por consiguiente, un nuevo apoyo para la supresión de los números e intereses rojos en el método directo (**400**).

Ejercicios *números* **845** al **850** y **DLIII** con interés recíproco y **866** al **868** con interés diferencial.

416.—Cuentas en dos monedas.—Hemos hecho referencia a estas cuentas al tratar de la clasificación y de las con-

C/c al 4 °/o recíproco hasta mayo 10, y 4 1/2 °/o desde esta fecha, cerrada en 30-VI-1931

FECHAS		CONCEPTOS	Valoración		Días	Capitales D		Capitales H		Números D	Números H
Marzo...	16		Marzo...	20	102			2000	—		2040
»	24		»	31	91	3400	—			3094	
Abril....	1		Abril....	1	90	1800	—			1620	
»	19		»	28	63	6900	—			4347	
»	30		Mayo....	15	46			1640	—		754
Mayo....	7		»	7	54			3000	—		1620
»	10	Rectificación por cambio de interés: Traspaso del no vencido				1640	—			754	
		Saldo interino de cap. 7100, deudor			41						2911
		Balances por cambio de interés						7100	—		2490
						13740	—	13740	—	9815	9815
Mayo....	10	Del período anterior no vencido	Mayo....	15	46			1640	—		754
»	»	Saldo del período anterior	»	10	51	7100	—			3621	
»	16		»	16	45	5600	—			2520	
»	18		»	19	42			4800	—		2016
»	30		Junio....	29	1			2500	—		25
Junio....	11		»	12	18	1600	—			288	
»	30	Intereses 4 °/o sobre 2490 números				27	66				
»	»	Intereses 4 1/2 °/o sobre 3634 números				45	42				
»	»	Saldo de capitales y de números						5433	08		3634
						14373	08	14373	08	6429	6429
Junio....	30	Saldo anterior				5433	08				

diciones de cuentas en general, y sólo hemos de añadir que todas las cuentas cuyos débitos y créditos han de ser expresados en monedas extranjeras, necesitan tener columnas dobles para los capitales, puesto que si bien en la relación con las terceras personas cuentacorrentistas sólo interesan las cantidades de las monedas extranjeras, también es necesario expresar todas esas mismas partidas por el común denominador en que se miden todas las operaciones administrativas, es decir, que es indispensable tener en esta clase de cuentas los capitales en las monedas extranjeras para las relaciones con el cuentacorrentista y a la vez en moneda nacional para relacionar estas cuentas con todas las demás de la Contabilidad.

Para los efectos del cálculo, estas cuentas se cosideran como si no hubiese más columna de capitales que la referente a las monedas extranjeras, y con arreglo a las anotaciones en éstas se hallan los números o intereses por cualquiera de los métodos que ya hemos considerado, calculando también las comisiones y gastos de toda especie en las mismas monedas extranjeras de la cuenta, y ahora lo mismo que en los cambios se siguen las costumbres de las plazas extranjeras en que fuesen nacionales las monedas de la cuenta.

Sólo para los efectos de contabilidad se calcula el valor de todas y cada una de las partidas de la cuenta reducido a moneda nacional, para lo cual es la columna doble de capitales a que antes hicimos referencia.

Ejercicios *números* **812; 813; 838; 871; 1421; CXCIII** al **CXCVI**.

417.—Denominaciones especiales de los métodos.— Para diferenciar las distintas disposiciones o particularidades de las cuentas corrientes con interés, se han dado nombres también distintos a cada una de estas particularidades o disposiciones especiales, designando a todas con el nombre de métodos, y así tenemos:

Método *directo holandés* que es el mismo de compensación cuando se dispone la cuenta a secciones separadas (**393**).

Método *directo italiano* el que se dispone la cuenta en escala doble o sencilla y se calculan los intereses por el sistema de compensación.

Método *americano*, también llamado *inglés* por alguno, que consiste en la determinación de los verdaderos intereses en cada operación; cálculo del saldo de capitales en las columnas suyas, y saldo de intereses en otras especiales que se añaden.

Además se llama también por otros método *holandés* el que anota los intereses en las columnas de capitales cada vez que se anota uno de éstos, es decir, que es el mismo método americano que en vez hallar el saldo de intereses, considera a cada uno de éstos como nuevas partidas.

Para otros el método *inglés* es el que se lleva en libras esterlinas calculando los números o intereses sobre la cantidad de esas monedas despreciando los chelines y peniques.

Método *de falsa posición* es para algunos el método directo cuando se toma como fecha del cierre cualquiera que pueda coincidir o no con la verdadera, haciendo luego las rectificaciones que conocemos (**401**).

Método de *saldos mínimos* se llama al que distribuye el período de la cuenta en partes iguales, las más de las veces quincenas o meses, y durante ellas se calculan intereses sobre el saldo menor, o sea sobre la cantidad que ha estado en poder del deudor toda la fracción del período, que es precisamente lo que se hace en las Cajas de Ahorros al dar valoraciones a todas las partidas al final y principio de quincenas naturales, y lo practican a veces los Bancos para clientes que con cuentas pequeñas hacen muchas y frecuentes entregas y retiradas de fondos.

Puede apreciarse que todas las denominaciones anteriores consisten solamente en nombres sin sentido como métodos, ya que son en esencia los dos estudiados de compensación y saldos y la unión de éstos con todos los procedimientos de cálculo de intereses estudiados en los capítulos XVI a XXVII de nuestro trabajo.

En algunas partes hemos visto también denominado como método del Crédit Lyonnais el procedimiento de llevar las cuentas por el sistema de saldos calculando los intereses por el método de los 60.

418.—Aplicación de las máquinas de calcular.—Para las operaciones de cuentas corrientes con interés son susceptibles de utilizarse todos los

modelos de máquinas calculadoras y a la vez las denominadas contabilizadoras, según la operación a que principalmente se dirijan, por lo que distinguiremos los varios casos que pueden presentarse y la utilización de la mecánica para ellos.

1.º *Movimiento y saldos de la cuenta.*—Para este objeto se emplean casi exclusivamente las sumadoras escribientes con resta directa **(81** y **83)** y las de escribir provistas de sumadores horizontales y verticales, en las cuales basta ir escribiendo las partidas de la cuenta para que se obtenga la suma del Debe, la del Haber y los sucesivos saldos, que también pueden ser escritos; pero como en el trabajo ordinario cada cuenta sólo necesita cálculo y anotaciones algunos días y en cada día una o dos partidas, el movimiento de la cuenta no suele ser necesario sinó que sólo se obtiene el saldo, para lo cual se pone en la máquina como primera partida el saldo anterior, para sumar si es del Debe o para restar si es del Haber, luego la partida o partidas del día y la misma máquina obtiene el saldo, que luego es escrito de una sola vez en los aritmómetros y cifra por cifra en las contabilizadoras, señalando la máquina la inicial o signo del saldo por medio de letras, asteriscos, u otro signo cualquiera preconvenido.

2.º *Intereses sobre los saldos de la cuenta.*—Las máquinas sumadoras en la forma que se emplean para obtener los saldos no nos dan los intereses, porque sobre cada uno de los saldos es necesario considerar varios días, según hemos visto en el sistema de saldos para llevar estas cuentas; pero se las ha adaptado a servir para solo el cálculo de los intereses disponiendo la cuenta por orden de vencimientos **(411)**; una vez escritas las partidas del Debe y del Haber de cada fecha se tiene en el sumador de la máquina el saldo, y haciendo que éste sea escrito como subtotal **(82** y **83)** podremos repetir la escritura cuantas veces queramos, teniendo en las columnas de saldos y a la vez de números los que por suma nos dan el de la cuenta corriente, existiendo modelos de sumadoras múltiples que estos subtotales de suma o de resta los acumulan para al final de la cuenta obtener el saldo de números sobre que ha de ser calculado el interés.

La aplicación que acabamos de indicar, para ser verdaderamente útil por la obtención del saldo final de números, necesita esperar a la fecha de la liquidación para formar los intereses, pero si queremos tener preparada la escala con los números parciales podremos ir obteniendo sólo estos números por la escritura del subtotal y luego al llegar la fecha de la liquidación hacer la suma de todos los números que contiene la columna correspondiente, poniendo para suma los del Debe y para resta los del Haber.

Las máquinas multiplicadoras que dispongan de acumulador **(87**, 3.º y **88)** pueden ser empleadas con gran ventaja en estos menesteres al llegar la fecha de liquidación de la cuenta, pues que por medio de la escritura de la cuenta se van conociendo los saldos y cada uno de ellos es multiplicado por los días correspondientes, pasando el producto al acumulador en sentido de suma o de resta según al lado de la cuenta a que pertenezca el saldo o el signo que corresponda al producto del saldo y días. En esta forma, en el acumulador tendremos el saldo de números para calcular sobre él los intereses y como en ciertos modelos el traspaso del acumulador al marcador de la

máquina es automático, resultará que hecho este traspaso se puede efectuar la división inmediatamente para obtener el interés de la cuenta.

3.° *Intereses sobre las partidas de la cuenta.* – Para ésto hemos de considerar cada partida como un capital para calcular intereses por los días correspondientes aplicando ya las sumadoras o bien las multiplicadoras con acumulador en forma idéntica a la indicada para interés de varios capitales **(274)**, sin más que en este caso serán mayores los traspasos al acumulador o a la aplicación de la resta directa por la mayor frecuencia entre capitales de los dos signos diferentes y hasta de productos o números en que capital y tiempo sean de signos contrarios, y necesita tenerse presente la regla de los signos antes de poner la máquina para que sume o reste los productos.

También puede emplearse este procedimiento para calcular los intereses sobre los saldos a que antes nos hemos referido.

4.° *Intereses diferenciales.*—Bastará en tal caso considerar que el cálculo ha de ser por duplicado, o sea uno para el Debe y otro para el Haber, y como la aplicación de la mecánica tiene su verdadera indicación al liquidar las cuentas, entonces será siempre posible llevarla por orden de vencimientos y hacer el cálculo primero de los números e intereses de los saldos deudores y luego los de los acreedores, con la rapidez, exactitud y descanso que proporcionan las máquinas.



XLIII

COMPRAVENTA DE MERCADERÍAS

419.—Concepto de las mercaderías.—Se llaman mercaderías o mercancías todas las cosas que son objeto de la compraventa. Según ésto, serán mercancías todos los productos, lo mismo de la agricultura que de la industria, minería, caza y pesca; los títulos representativos de valores, y hasta el dinero; pero reduciremos el concepto de mercaderías, para los efectos de nuestro estudio actual, a los productos capaces de satisfacer directamente las necesidades humanas.

Entendiendo por mercaderías todos los productos en la forma que dejamos manifestada, claro está que de éstos los hay que consisten en bienes muebles y los hay que son inmuebles o semovientes, y como de cualquiera clase de éstas que sean los bienes, pueden comprarse y venderse, no hay que entender la palabra mercancía como sinónimo de bienes muebles, según la consideran otras ramas de los conocimientos humanos.

Las mercaderías o mercancías no constituyen un estado o condición intrínseca de los productos, sino que se consideran como mercancías solamente en cuanto están destinados a la compraventa. También si atendemos a las condiciones en que se desarrolla el comercio nos encontraremos con que la inmensa mayoría de las mercancías estarán formadas por bienes muebles y a este aspecto especial de la mayoría de las mercancías hemos de ir refiriéndonos en tanto que no hagamos mención especial de otra cosa.

420.—Valores a distinguir en toda mercancía.—Siendo condición especial indispensable en los productos el

que estén destinados a la compraventa para que puedan ser considerados como mercancías, para las únicas personas para quienes son siempre mercancías los productos, en tanto que permanezcan de su propiedad, es para los que se dedican al comercio, puesto que para cualquiera otra entidad habrá algún momento de la posesión en que los productos no están destinados a la venta. En tales circunstancias también sucede que sólo para los comerciantes es para quienes puede ser necesaria la consideración de las mercancías como tales, en momentos distintos de la posesión, y, que por consiguiente, sólo en cuanto a los comerciantes será completo el examen que se haga para conocer el valor que en esos diferentes momentos corresponde a los artículos de la compraventa.

Considerando, pues, que sea una persona comerciante quien examine los valores de las mercancías, nos hallamos con que éstas tienen tres valores principales, a los que denominaremos *valor de compra, de costo*, y *de venta*, y que representan el momento de empezar para el comerciante la propiedad de las mercancías; el instante en que además se encuentran éstas en el lugar adecuado para satisfacer la necesidad para que el comerciante las adquiere, que es la reventa; y por fin, el momento de esta misma reventa.

El *valor de compra* es el de cesión a que se adquieren las mercancías por el comerciante, y que depende únicamente del precio acordado con su vendedor. El *valor de costo* es el que corresponde a las mercancías puestas en condiciones de ser revendidas, y que por tanto no depende sólo del precio acordado para la compra, sino que será necesario tener en cuenta todos aquellos elementos modificativos cuyo detalle estudiamos a continuación. Por fin el *valor de venta* es el de las mercancías en la reventa que hace el comerciante que primero las adquirió, y que depende del precio que pueda fijarse según las condiciones económicas del mercado. A cada una de estas tres especies de valores corresponden otros tantos *precios*, ya que éstos no son sinó valores referidos a la unidad de medida.

421. —Elementos modificativos del valor de las mercancías. — Son elementos que modifican el valor de las mercancías todos aquellos gastos que se hacen por el poseedor para ponerlas en condiciones de ser adquiridas por el con-

sumidor o por los comerciantes; o bien con el objeto de facilitar la adquisición y evitar la competencia en la venta.

De estos elementos, unos se refieren a la adquisición y otros a la cesión de las mercancías, aunque todos tienen una u otra referencia según el momento en que intervienen, pues que todos lo pueden hacer en ambas circunstancias. De cualquier forma que sea, al intervenir estos elementos modificativos en la adquisición son elementos constitutivos del valor de costo, y si intervienen en la cesión serán elementos determinativos del valor de venta.

Estos elementos modificativos son:

Portes o *fletes*, que son los gastos de transporte de una a otra plaza, teniendo la primera o la última denominación según se haga el transporte por tierra o por mar.

Servicio de *gabarras*, que son los gastos de transporte en grandes barcas dentro del puerto, bien entre muelles y barcos, ya de unos a otros de éstos.

Envase o *embalaje*, que es el gasto necesario para preservar a las mercancías de alteraciones durante el transporte, o después hasta el momento de la venta, y que consiste en el envoltorio único o múltiple.

Carga y descarga en los vagones, barcos o cualquier otro medio de transporte por tierra o por mar.

Acarreos, o transporte hecho en la misma plaza.

Seguros, o desembolsos que eliminan el riesgo de las contingencias desfavorables que pueden sufrir las mercancías durante el transporte, y que por consiguiente han de ser seguros terrestres o seguros marítimos.

Derechos de importación o de Aduana, que son los impuestos que gravan la entrada en un país de mercancías procedentes del extranjero.

Despachos, o gastos en las mismas Aduanas para determinar el importe de los derechos y cerciorarse de que son mercancías cuyo comercio está permitido por las leyes.

Derechos de depósito. Este elemento modificativo del valor de las mercancías no precisa aclaración en cuanto al concepto que lo constituye, si bien es necesaria esta aclaración por los diferentes momentos en que modifica el valor de una mercancía y las distintas denominaciones que recibe, y así tenemos

el *almacenaje* o derecho de depósito en las estaciones de ferrocarril; *derechos de muelle*, que son gastos satisfechos por ocupar superficie de los muelles con las mercancías que se han de transportar; *derechos de depósito, propiamente dichos*, que se pagan por tener mercancías en los almacenes particulares. De estos almacenes particulares merecen especial mención los depósitos francos en los cuales pueden estar las mercancías extranjeras sin satisfacer los derechos de aduana, y por tanto puede este gasto de depósito ser un elemento modificativo que sustituya a tales derechos.

Impuestos varios, que gravan las operaciones sobre mercancías, como los de transportes, entrada y permanencia de los barcos en los puertos, circulación de ciertos artículos, o cualquier otro concepto.

Derechos de consumo, que son impuestos locales que gravitan sobre algunos artículos.

Corretajes, constituídos por los derechos de los intermediarios oficiales, semejantes a los que ya nos son conocidos de otras operaciones mercantiles.

Comisiones, o sean las remuneraciones de otros intermediarios, que sin precisar el carácter oficial, suplen a veces a una de las partes, sea comprador, sea vendedor, otras veces cobran o pagan los importes de las ventas, o se encargan de hacer ciertas operaciones del comercio, como los despachos en Aduanas, cambios en el transporte, etc.

Mermas, o disminuciones naturales de las mercancías.

Descuentos, que son las rebajas concedidas por el vendedor de una mercancía a su comprador, por razones muy diversas y que a veces consisten en más de una cantidad, recibiendo también la denominación de *bonificaciones*.

Derechos de salida, semejantes a los de importación y que se satisfacen al salir las mercancías de un país.

Derechos de medida, con cuya denominación queda suficiéntemente aclarado su concepto.

Maulas o partes de mercancías que no es posible revender.

Gastos generales de la empresa, en cuyo concepto quedan incluídos desembolsos muy diversos, pero que en cuanto elemento modificativo del valor de las mercancías está formado por un *coeficiente* o parte alicuota.

422.—Clases de precios.—Siendo el precio el valor referido a una unidad de mercancías, constituye el elemento más importante de todos los que sirven de base a la determinación del valor de conjunto de las mercancías compradas o vendidas, y han de quedar perfectamente determinados los diferentes significados del precio según las formas en que se expresa, puesto que de estas formas de expresión depende el que afecten o no al valor unos u otros de los elementos modificativos anteriormente enumerados.

El precio consiste siempre en una cantidad de moneda variable, por cada unidad de medida, y como en cualquier momento esta unidad de medida es constante, de ahí el que se suprima su enunciación en la expresión del precio.

Las diferentes formas de expresión o cotización del precio hacen referencia al momento en que las mercancías pasan a ser propiedad del comprador, a partir del cual los elementos modificativos del valor afectan al comprador mientras que antes han hecho referencia únicamente al vendedor.

A cualquier momento a que se refiera el precio en su expresión, puede ser precio *corriente* si es el que corresponde al mercado, y cuya determinación por las partes contratantes se hace según la situación económica respectiva. Este precio corriente será precio *de mercado* si se fija en estos lugares de contratación.

También el precio puede ser *de tarifa* o *legal* si está determinado por las disposiciones del Poder público, cual sucede con los artículos que tienen tasa oficial; precio *de catálogo*, si se trata de un artículo vendido solamente por una o muy pocas personas que de hecho tienen sobre él un monopolio; precio *nominal*, que es el que se fija en el contrato como base de la determinación del valor y sobre el que se determinarán también los elementos modificativos y la influencia de éstos sobre el valor; precio *real* el que resulta del precio nominal cuando ya han sido determinados los elementos modificativos y su influencia sobre el valor, llamándose también algunas veces precio *líquido* a este precio real.

423.—Elementos del valor según las expresiones del precio.—Las formas de expresión del precio, con la indicación del momento en que los artículos pasan a ser de la pro-

piedad del comprador y los elementos modificativos que en cada caso corresponden son:

a) En almacén —Todos los elementos modificativos afecten al comprador, pues que se indica que las mercancías serán recogidas por éste del almacén en que se encuentran, ya sea el propio del vendedor u otro cualquiera como los de Depósito. Esta forma de venta se usa para cuando el comprador es el consumidor de los artículos.

b) Precio fas. (free along side).—Por esta forma de precio se entiende que el vendedor pondrá las mercancías al costado del buque que haya de hacer el transporte; siendo elementos modificativos que afectan a este vendedor los de acarreo y gabarras, y todos los demás se referirán al comprador. Para Norteamérica se enuncia esta cláusula *F. A. S. Steamer N. Y.*

c) Sobre muelle.—Es el precio que señala la obligación del vendedor de tener las mercancías en el lugar del muelle en que atraque el barco o en la *estación de salida*. Cuando los barcos atracan al muelle, esta forma es idéntica a la anterior, y siempre tiene para el vendedor el elemento modificativo acarreo y para el comprador todos los demás.

d) Precio fob. (free on board).—Es correspondiente a la obligación del vendedor de entregar las mercancías cargadas en el barco que ha de transportarlas, siendo de cuenta del comprador todos los gastos que se originen con posterioridad, desde el flete o porte y seguro, y afectando al vendedor el acarreo, carga y derechos de salida. Tiene la misma significación la venta *franco vagón* o *sobre vagón*.

Son variaciones de la expresión fob. las de *Fob. Cars Mill or Factory* que señala la obligación del vendedor de recoger el conocimiento de embarque por cuenta del comprador aunque sin pagar el flete; la de *Fob. Cars Mill or Factory, freight allowed to N. Y.*, según la cual el vendedor proporcionará flete o medios de transporte hasta *N. Y.* o el lugar que se indique, con las demás circunstancias de la anterior; *Fob Cars N. Y.*, que representa las condiciones de la última y además que el vendedor estará a las resultas de las diferencias que pueda causar en el valor de las mercancías la existencia de un siniestro, aunque él no pagará los gastos de seguro, que han

de ser elemento modificativo para el comprador.

e) Precio cif. (cost, insurance, freight).—Es el precio en que el vendedor ha de satisfacer todos los gastos que anteriormente, y además los de seguro y flete, quedando por cuenta del comprador todos los demás elementos modificativos del valor de las mercancías, incluso el que pueda derivarse de diferencias entre el importe de los siniestros y el importe de lo que satisfaga en tal caso el asegurador, pues que el riesgo del transporte afecta al comprador, aun cuando paga el seguro el vendedor. Suele enunciarse esta cláusula con las iniciales francesas diciendo venta *caf. (coût, assurance, fret)* y cuando se trata de comercio con Norteamérica existen las cláusulas *Cif. and E.* (exchance) y *Cif. and C.*, que indican respectivamente que a más de las circunstancias de la cláusula cif son elementos modificativos para el vendedor respectivamente el cambio (**333**, 1.º) y la comisión. Suele también formularse la cláusula *Cif and I*, para negocios con Asia indicando con este nuevo elemento que el interés por el exceso del plazo sobre el corriente de venta es también de cuenta del vendedor.

f) Precio c. f.—Es la cláusula anterior en que se suprime el pago del seguro por el vendedor.

g) Cláusula fob. puerto de destino es en cuanto a los desembolsos y parte a que afectan idéntica a la cláusula *cif*, pero el elemento modificativo derivado del riesgo y siniestro afecta al vendedor.

h) Cif quay.—Corresponde a la cláusula anterior en que además el vendedor ha de ser quien considere el elemento modificativo de la puesta de las mercancías en barcazas para la descarga en puertos en que no atracan los barcos al muelle.

i) Muelle puerto destino es la condición anterior en que además se entregarán las mercancías al comprador en el muelle, y que por consiguiente el elemento modificativo gastos de barcazas afectan al vendedor.

j) Franco vagón destino que indica que si además del transporte marítimo hubiera transporte terrestre también afectaría este elemento modificativo al vendedor, y por consiguiente, sea con transporte terrestre y marítimo, o sea sólo con el primero, quedarán como elementos modificativos para el comprador los consumos, acarreos, descarga y los que son inse-

parables de la naturaleza de la mercancía y del carácter de comprador, cuales mermas y gastos generales.

k) Franco domicilio, indica que las mercancías serán entregadas al comprador de modo que no puedan afectarle más elementos modificativos del valor que los inseparables de la naturaleza como antes decíamos.

l) Franco muelle estación tiene sólo como diferencia de la cláusula *j* que la descarga afecta ahora al vendedor.

424.—Cotizaciones de mercancías.—La cotización de las mercancías es el precio determinado en los mercados que siempre hace referencia a un número de unidades fijo, por lo que suele suprimirse en la enunciación.

En los mercados organizados se publican boletines de precios, por las Cámaras de Comercio o por particulares, y en cualquier caso estos precios sirven de base a transacciones y operaciones sobre mercancías que no sean propiamente de compraventa.

Tanto las cotizaciones como los listines varían mucho de una a otra plaza y también es grande esa variación en cuanto a la unidad de medida a que se refieren las cotizaciones, por cuya causa no es posible dar ni siquiera una idea de la forma en que se cotizan las diferentes mercancías en las distintas plazas, pero sí hemos de hacer constar que en general estas cotizaciones se hacen en la moneda del país y referida a unidades de medida del mismo, según puede verse en la tabla **XXXIX** para las mercancías de consumo más extendido, y como tanto el valor de la moneda de los diferentes países, como el detalle de las medidas aparecen en otras tablas, a ellas remitimos al lector para resolver las cuestiones prácticas que se le presenten.

Sin embargo de esa forma general de cotización, hay casos no poco frecuentes en que las cotizaciones se hacen en monedas y unidades de medida de otros países, distintos de los dos que contratan, pero estos casos especiales son más fáciles para la resolución de sus problemas, porque siempre que esto sucede, las monedas y medidas elegidas para la cotización lo son de los países más comerciales del globo, y así no es extraño ver cotizados productos de varios países en monedas inglesas y en medidas del mismo país.

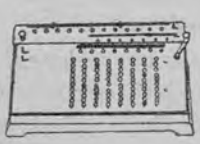
425.—Intermediarios de la compraventa.—En las transacciones sobre mercancías no siempre es posible que las dos partes contratantes puedan reunirse para el acuerdo directamente y por esta razón es en estas operaciones en las que más necesario resulta el intermediario, y en las que más variaciones presenta su actuación.

Son intermediarios los *corredores*, cuya función tiene diversas manifestaciones, y así tenemos el *corredor de seguros*, y el *de transportes o de fletes* que tratan de las operaciones especiales que indica su nombre, encargándose de facilitar

contratos sobre estos servicios a los compradores y vendedores que los precisan

Más generalmente se designan los intermediarios con el nombre de *comisionistas* que contratan en nombre propio sobre mercancías que pertenecen a otras personas. Estas personas propietarias de las mercancías sobre que operan los comisionistas se llaman para este caso *comitentes*.

Los comisionistas reciben distintos nombres según la clase de operaciones que practican con preferencia, y en general la denominación es de *agentes*; así tenemos los *agentes de transportes* que por cuenta de sus comitentes efectúan las operaciones de carga y descarga de las mercancías, acarreos dentro de la plaza, facturaciones, y demás operaciones auxiliares del mismo transporte principal; los *agentes de aduanas*, que se encargan del despacho de mercancías que han de pasar por la aduana, lo mismo si son del comercio internacional que si son del cabotaje nacional; los *consignatarios* que hacen por cuenta de terceros las operaciones del comercio marítimo, siendo los representantes del propietario del buque o de las mercancías a los efectos de las operaciones oficiales; los *representantes*, que hacen operaciones en nombre de sus comitentes y como dependientes de la casa, o bien, a veces, en nombre propio; los *comisionistas* que en nombre suyo y sin afectar representación de sus comitentes hacen operaciones de compra y venta, dando después a conocer el resultado a sus comitentes. Los comisionistas sin adjetivo ninguno se entiende siempre que son estos últimos, los cuales en todo caso tienen en su poder las mercancías mientras se termina la operación que les han encomendado, al paso que los demás comisionistas especiales no retienen los artículos en depósito, más que en ciertos casos excepcionales los representantes, pero cuando éstos tienen depósito de unos artículos son más que representantes vendedores exclusivos del producto.



XLIV

CÁLCULOS PARCIALES DE COMPRAVENTA

426.—Valor de compra y su determinación. El valor de compra corresponde a las mercancías según el precio por que son adquiridas, y su determinación es el cálculo fundamental de todos los que origina la compraventa.

Siendo el precio el valor de compra de una o varias unidades, si representamos por p a este precio y por n al número de unidades a que se refiere, es indudable que el valor de una unidad ha de ser

$$\frac{p}{n}$$

y como no es una sola unidad la comprada sinó que son varias, representándolas por N y siendo V el valor de las mercancías, la determinación de éste será:

$$V = \frac{pN}{n}$$

Ejemplo: Se han comprado 2.450 kilos de una mercancía a razón de 62'35 pesetas los 100 kilos. Determinar el valor de compra.

Siendo los valores del caso que nos ocupa

$$N = 2450; \qquad p = 62'35; \qquad n = 100$$

tendremos para el valor buscado

$$V = 2.450 \times 62'35 : 100 = 1.527'57 \text{ pesetas.}$$

Puede suceder en esta determinación que el precio, unidades y resultado correspondan a medidas o monedas extranjeras, pero ésto ninguna variación causará en el procedimiento,

sinó que al final se precisa la transformación consiguiente según la cotización de esa moneda extranjera (**355**), y las unidades de medida (**152** a **157**).

EJERCICIOS *números* **1113** al **1117**.

427.—Descuentos y bonificaciones.—Por las condiciones en que se desarrollan los modernos negocios; porque haya alteración en los precios de las mercancías y no se hayan variado estos precios en los catálogos y contratos de venta de una casa; por el pago en plazos cortos; por el importe de bastante consideración de las compras de una casa a otra; y multitud de otras causas, se conceden descuentos o bonificaciones sobre el total de las compras, unas veces comprendidos en un sólo tanto por ciento, y en la mayoría aplicando sucesivamente los diferentes tantos.

Este descuento es independiente del tiempo, y constituye el llamado *descuento usual de facturas*.

Siendo como decimos independiente del tiempo, su cálculo se reduce a una aplicación del tanto por cuanto (**6** y **12**) por lo que representando por V el valor de compra de una mercancía, la aplicación de un primer tanto por ciento de descuento, al que llamaremos t_1 le convierte en

$$\frac{V(100-t_1)}{100}$$

al que se reduce la suma de todos los descuentos simultáneos, pero cuando se trate de descuentos sucesivos, como éstos se aplican o calculan sobre el líquido que resultan de la aplicación del anterior, si el segundo tanto por ciento es t_2 el nuevo líquido por este descuento será:

$$\frac{V(100-t_1)(100-t_2)}{100 \times 100}$$

y así sucesivamente, por cada descuento o bonificación tendremos un factor binomio en el numerador y un factor ciento en el denominador, por lo que al aplicar el descuento enésimo t_n dicho valor será:

$$\frac{V(100-t_1)(100-t_2)(\ldots\ldots)(100-t_n)}{100^n}$$

y si se tratase de calcular el importe de una cualquiera de estas bonificaciones o descuentos, se tendría llamándola B

$$B = \frac{V(100-t_1)(100-t_2)(\ldots\ldots)(100-t_n)t_{n+1}}{100^{n+1}}$$

ya que se trata de calcular un tanto por ciento del líquido según el descuento anterior.

Ejemplos: 1) Determinar el valor líquido de compra que resultará en el caso del párrafo anterior, si se conceden los descuentos de 2 °/₀ por pronto pago, 5 °/₀ por sistema de pago mediante remesa del deudor, 4 ½ °/₀ por exceder las compras a un límite prefijado y 1 ½ °/₀ por haber sido hechas las compras sin intermediario.

Los valores por que hemos de hacer los cálculos que indica la fórmula son:

$V = 1.527'57$; $t_1 = 2$; $t_2 = 5$; $t_3 = 4'50$; $t_4 = 1'50$

el líquido que tratamos de hallar será

$$\frac{1.527'57(100-2)(100-5)(100-4'50)(100-1'50)}{100^4} = 1365'97 \text{ pesetas.}$$

2) Calcular el importe del segundo de los anteriores descuentos.

Según la última fórmula tendremos

$$\frac{1.527'57(100-2)5}{100^2} = 44'91 \text{ pesetas.}$$

Ejercicios *números* **1118** al **1135; 1153** y **1155**.

428.—Transportes; clases y precios.—El cambio de lugar de las mercancías, se llama transporte cuando tiene efecto entre poblaciones diferentes y puede ser *terrestre, marítimo, fluvial* y *aéreo* según el medio por donde se efectúa.

Los precios y valores del servicio que representa el transporte se llaman *flete* en el marítimo y fluvial y *porte* en el terrestre y aéreo.

Las clases anteriores del transporte, no son únicas, y así debemos distinguir en el transporte terrestre el que se hace por carreteras, el que efectúan las compañías de ferrocarril y además el especial del servicio de correos en que entran estas dos clases de caminos.

Para el transporte por ferrocarril, los precios se determinan con intervención de los Gobiernos que han concedido las líneas y son fijos durante períodos muy grandes de tiempo, hallándose expresados en unos cuadros denominados *tarifas* en las que se detallan todas las mercancías que pueden ser objeto de transporte y las distintas modalidades en que puede ha-

cerse dicho transporte, resultando de ésto varias tarifas designadas con los nombres de *legales*, *máximas* o *fundamentales* a las fijadas en el momento de la concesión del ferrocarril; *generales*, o de aplicación a cualquier clase de mercancías y transporte; *especiales*, si mediante ciertas condiciones, de peso, distancia, tiempo, mercancía, etc., determinadas siempre en la tarifa, pueden aplicarse en esos casos que en la misma tarifa se expresa; *uniformes*, si no sufren variación en el transporte a que son aplicables; *diferenciales*, cuando aumentan o disminuyen el precio del transporte con la variación de cantidad de las mercancías o con la misma variación de la distancia, y *combinadas*, si consisten en la refundición de dos o más tarifas que habrían de aplicarse a un sólo transporte y que por esta clase de tarifas simplifican la determinación del precio y valor del mismo; habiendo otras denominaciones cuya importancia es nula bajo el punto de vista del cálculo que a nosotros interesa.

De cualquier clase que sean las tarifas siempre expresan el precio del transporte en unidad de medida, que suele ser la tonelada, y de distancia por kilómetros.

El transporte por medio del correo, y por medio de barcos se indica referido solamente a unidad de medida, y en cuanto al transporte por carreteras no hay normas de fijación del precio, si bien entre las partes contratantes se llega a un acuerdo por cálculos provisionales semejantes a los que necesitan las demás clases de transportes.

Son *precios especiales* del transporte los que se fijan a un tanto por unidad de volumen o de tiempo en el transporte marítimo y fluvial y además el llamado *flete corrido*, que consiste en la combinación de flete y porte de modo que se tenga un sólo precio para ambos transportes marítimo y terrestre, en forma semejante a la de las tarifas combinadas, y expresándose por unidad de medida y total de distancia, con lo cual resulta como si el transporte en el barco se prolongase tierra adentro.

Es necesario tener muy en cuenta en todos los precios de transporte que lo mismo pueden estar expresados en monedas y medidas nacionales que en monedas y medidas extranjeras, porque el desarrollo mercantil de algunos países ha estableci-

do costumbres en esta expresión de precios y especialmente en la de los fletes, y así se indica que el flete de cereales sea de un número de francos por carga de Marsella (160 litros), y otras veces es la nacionalidad de los buques que señala la moneda y medida de los precios, como sucede con monedas y medidas inglesas, que por la preponderancia de la marina de Inglaterra se expresan la mayoría de los fletes por chelines referidos a tonelada de peso (1016 kg) o de registro (40 pies cúbicos).

429.—Cálculo de los transportes.—Hemos dicho que el precio del transporte se expresa en moneda por cada unidad de medida (peso para el porte y peso o volumen para el flete), y además por unidad de distancia, así que representando por V el valor del transporte, por P el precio de tarifa o de mercado según hemos dicho, por M las unidades de medida o cantidad transportada y por D la distancia, es indudable que el precio correspondiente a la unidad de medida para la distancia a recorrer será:

$$V_u = PD$$

y como el total trasportado es M el total del valor del transporte también ha de ser

$$V = PDM$$

en la que sin duda alguna habrá que tener hecha previamente la reducción de la medida y distancia a las mismas unidades a que se refiere la tarifa o precio.

De esta fórmula se deducirá para los demás valores

$$D = \frac{V}{PM} \qquad P = \frac{V}{DM} \qquad M = \frac{V}{PD}$$

Si por tratarse de flete no hubiera variación de importe por razón de distancia, entonces claro está que desaparece de las fórmulas el elemento D por ser factor equivalente a la unidad, ya que en el precio de flete se indica de puerto a puerto; sucediendo lo propio con el transporte por medio del correo.

Ejemplos: 1) Hallar la cantidad que se satisfará por el transporte de una mercancía desde Oviedo a Valladolid si el peso de los fardos que componen la remesa es de 2476 kilos, la distancia entre estas dos ciudades son

306 Km. y la base de percepción o precio de tarifa es de 0'126 pesetas por tonelada y kilómetro.

Aplicando la fórmula anterior tenemos para valores de ella

$$P = 0'126, \qquad D = 306, \qquad M = 2'476$$

y como resultado que se desea obtener

$$V = 0'126 \times 306 \times 2'476 = 95'46 \text{ pesetas},$$

resultado que en la práctica puede tener alguna diferencia por razón de que la aplicación de las tarifas se hace por fracciones indivisibles de peso, como por ejemplo de 50 kilos, y si así fuese, en este ejemplo el resultado sería

$$V = 0'126 \times 306 \times 2'50 = 96'39 \text{ pesetas}.$$

2) Siendo el flete de Londres a New York de 9s 6d por arroba, determinar el flete que se pagaría por un embarque con destino a este último puerto con un peso de 43 toneladas y 3 cwt.

Será indispensable reducir a arrobas el peso de la remesa y consultando la tabla de medidas inglesas vemos que el peso en arrobas es de

$$43'15 \times 80 = 345'2 \text{ arrobas}$$

y el importe del flete

$$345'2 \times 9'50 = 3279'4 \text{ chelines} = 3279\text{s} - 4'8\text{d}$$

los que reduciremos después a la clase de unidades que deseemos en la forma que ya hemos estudiado en los cambios.

Observación.—Prescindimos de ejemplos resueltos para los problemas inversos porque su cálculo no se hace necesario en la práctica.

430.—Cálculos complementarios del de transporte.—En el párrafo anterior hemos considerado solamente lo que corresponde como gastos del traslado de las mercancías, pero además es preciso calcular al mismo tiempo otras partidas, como las de *impuestos* y de *carga* y *descarga* y otras que luego examinamos.

El impuesto de transportes consiste en un tanto por ciento del líquido de este gasto según resulta de la fórmula anterior, por lo cual reduciendo el tipo de imposición a tanto por uno y representándole por I se tiene para el valor del transporte

$$V_i = PDM(1 + I),$$

y si añadimos los gastos fijos de este impuesto como timbre de recibí por la cantidad cobrada, o del documento del transporte, el valor resulta ahora

$$V_t = PDM(1 + I) + T$$

siendo T el valor de estos gastos fijos.

Al considerar los gastos de carga y descarga, cuando hayan de abonarse como gasto del transporte por no estar incluídas en las tarifas y precios y hacerse por la misma persona que el transporte, deberemos modificar la fórmula anterior en virtud de este nuevo elemento. La expresión de este gasto supletorio es por unidad de medida referida a la misma que la tarifa o precio del transporte, y cobrándose por duplicado por ser dos las operaciones. Cuando así sucede, si representamos por C el precio de tarifa de este gasto supletorio y por V_t el importe total del transporte, se tiene

$$V_t = M(PD + 2C)(1 + I) + T$$

Refiriéndonos a España, el impuesto de transportes terrestres es del 5 % y el gasto fijo es el mismo timbre de recibí señalado para las letras de cambio.

Ejemplo: En el caso del primer ejemplo del número anterior y suponiendo que la Compañía del ferrocarril por donde se hace el transporte estuviera incluída en las excepciones que autorizan a cobrar este gasto y tuviese señalado para ello la tarifa de 0'614 por tonelada y operación, calcular el importe total del transporte en razón de los elementos señalados.

Los valores por que han de intervenir en la fórmula los distintos elementos han de ser:

$$P = 0'126, \quad D = 306, \quad M = 2'476, \quad C = 0'614, \quad I = 0'05 \quad T = 0'10$$

y por consiguiente el total buscado sería:

$$2'476(0'126 \times 306 + 2 \times 0'614)(1 + 0'05) + 0'10 = 105{,}55 \text{ pesetas.}$$

En el transporte marítimo los gastos complementarios que exigen casi siempre el cálculo simultáneo es el llamado gasto de *capa* (en inglés *hat*), el de *impuesto* y la *address-commission*.

La capa es un aumento percentual que sufre el flete como resto de la remuneración antigua del capitán del barco por los cuidados de las mercancías durante el transporte, y aunque ya hoy no existe tal remuneración, todavía se conserva en ciertos fletes este gasto como precio supletorio del transporte. Cuando el flete se entiende libre de este gasto se dice que es neto (*full* de los ingleses) y en cuanto a los cálculos ha de intervenir en igual forma que lo hace el impuesto en el transporte terrestre, por lo que llamando H a este concepto del precio

referido a tanto por uno, será la expresión del importe del flete

$$V = PM(1 + H)$$

Considerando ahora la address-commission, que es también otro tanto por ciento, y llamándole A referido a tanto por uno como antes, resulta para la expresión anterior

$$V = PM(1 + H + A)$$

y por fin el impuesto de este transporte que se expresa por cantidades referidas a la unidad de medida convierte la expresión que venimos considerando en la siguiente:

$$V = PM(1 + H + A) + PI$$

Ejemplo: En el caso del ejemplo del párrafo anterior determinar el importe del flete si el precio no es neto, el tanto por ciento de capa es del 5 % y el impuesto de 0/11 por tonelada.

Los valores por que han de intervenir en la fórmula los distintos elementos han de ser:

$$P = 9'50, \qquad M = 345'2, \qquad H = 0'05, \qquad I = 0'91\widehat{6}$$

y el resultado será:

$$9'5 \times 345'2(1 + 0'05) + 9'5 \times 0'91\widehat{6} = 3444'07 \text{ chelines.}$$

También será necesario calcular por separado en muchos casos estos elementos complementarios del transporte porque hayan de figurar en documentos como detalle en varias partidas, pero como entonces se trata de problemas simples de multiplicaciones o tantos por ciento, prescindimos de ejemplo resuelto que nada aclararía.

EJERCICIOS *números* **1139; 1144** al **1151** y como inverso el **1142.**

431.—Baremos.—Los baremos son cuadros en que se indican los datos relativos al transporte entre varios puntos de forma que faciliten su consulta y el cálculo de los gastos principales y totales de este elemento. Pueden ser los baremos *de distancias* y *de portes*.

Los baremos de distancias comprenden diversas estaciones de una misma línea de transportes indicando las unidades (kilómetros) entre cualquiera de estas estaciones respectivamente, y mejor que cualquiera explicación será el ejemplo de la pág. 477 en el cual hemos puesto sólo las estaciones más importantes porque la línea completa no es posible incluirla en los límites tipográficos de la obra.

	Ariza							
Coscurita	45	Coscurita						
Almazán	52	7	Almazán					
Osma	103	58	51	Osma				
Aranda de Duero	156	111	104	53	Aranda de Duero			
Roa	176	131	124	73	20	Roa		
Peñafiel	196	151	144	93	40	20	Peñafiel	
Valladolid	256	211	204	153	100	80	60	Valladolid

Para encontrar la distancia entre dos puntos basta leer el nombre de uno de ellos y seguir la línea vertical que encabeza, hasta la línea del otro punto, en cuyo cruce está el número buscado, así si deseamos saber la distancia entre Almazán y Peñafiel, siguiendo la columna tercera del baremo hallaremos en la penúltima línea 144, que es la distancia deseada.

Los baremos de porte tienen la misma disposición que los de distancias, si bien en ellos aparecen los productos *PD*, o sea, el precio del transporte por unidad de medida, y en cuanto a su manejo también es idéntico al que hemos indicado para el baremo de distancia, por lo que sería una repetición del anterior con números diferentes el que pudiéramos presentar y que suprimimos en vista de esta identidad.

EJERCICIOS *números* **1140; 1141** y **1143**.

432. - Cálculos accesorios al de transporte:-Seguros.—Son cálculos accesorios todos aquellos correspondientes a gastos que no existen cuando no hay transporte, pero que no pueden incluirse en el del contrato principal porque han de ser satisfechos a personalidades distintas que el porteador.

Tales cálculos son: los relativos al *acarreo, camionaje* o *gabarraje*, que constituyen transportes auxiliares por el medio que señala su denominación, y que todos se refieren a uni-

dad de medida sin expresión de distancia, y por consiguiente una sencilla multiplicación basta para su cálculo; los de *almacenaje*, cuyo precio se refiere también a la unidad de medida y a la vez a la duración del depósito, bastando multiplicar las tres cantidades entre sí (precio, medida de la mercancía y duración del almacenaje) para obtener el importe de este gasto; *derechos de puertos* o *muelles*, variables en cada caso particular, y que siempre exigen para calcularlos solamente aplicar la multiplicación o una regla de tres en los casos más difíciles.

También será preciso determinar como accesorio al transporte el *seguro* de las mercancías. Por este concepto se satisface una cuota representativa del riesgo de pérdida de las mercancías, cuota que determina el asegurador que contrae la obligación de sufragar esas pérdidas, expresándose siempre por un tanto por ciento o mil sobre el valor de las mercancías aseguradas. Resulta por consiguiente que una vez determinado el valor de las mercancías, el cálculo será una aplicación de los porcentajes tantas veces hecha en el curso de nuestro trabajo.

El seguro de transportes presenta la característica de que el valor de las mercancías ha de ser el que les corresponda según factura, aumentado del importe del porte o flete y además de un tanto por ciento de beneficio esperado que hoy han ido uniformando las diferentes Compañías aseguradoras a un 10 %. Resulta por consiguiente que al calcular la prima a satisfacer por un seguro de transportes una vez hallado el valor de las mercancías y el porte, si llamamos V a ese valor, P al porte o flete, y t es el tanto de prima del seguro, tendremos para valor del seguro, según lo dicho y llamándole S

$$S = \frac{1'1(V + P)t}{100}$$

debiendo ser 1000 el denominador si el tanto fuese por mil.

Completan el cálculo del seguro los gastos propios del contrato especial que se celebra, cuales son los derechos de póliza y el timbre correspondiente, debiendo advertir que el cálculo será necesario efectuarlo por el propietario de las mercancías dando cuenta al asegurador en aquellos casos en que se

hace este contrato por el sistema llamado de *póliza flotante*, que consiste en fijar una cantidad como límite de los valores que pueden asegurarse y después ir aplicando esa cantidad límite a seguros parciales a medida que se hacen los transportes, y como estos seguros parciales han de ser determinados por el propietario de los artículos, de ahí que éste haya de ser el que haga el cálculo correspondiente; pero en cualquier caso los cálculos son los que determina la expresión anterior, a los que se añadirá como cantidad fija estos derechos de póliza y timbre, representados por F.

Ejemplo: Se desea asegurar una mercancía que según precio de venta vale 12654 pesetas y por la que ha de satisfacerse pesetas 731 por gastos del transporte, y se desea asegurar haciendo aplicación a una póliza flotante cuya tarifa es del $2\,^1/_2\,^0/_{00}$ ascendiendo los derechos de póliza y timbre a 3'45 pesetas. Calcular el importe de la prima a satisfacer como seguro, siendo el valor asegurado de un $10\,^0/_0$ mayor que el correspondiente a las mercancías, en razón de beneficio esperado.

Los valores que han de intervenir en este caso para el cálculo según la expresión antes hallada serán:

$$V = 12654, \qquad P = 731, \qquad t = 0'0025 \qquad F = 3'45$$

y con ellos obtenemos

$$S = \frac{1'1(12654 + 731)0'0025}{100} + 3'45 = 40'26 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **1152** y **CCI** al **CCV**.

433.—Unidades líquidas de la compraventa: Taras.—Todas las mercancías que se compran y venden tienen un continente que ya antes dijimos (**420**) que constituía el llamado embalaje, y claro está, que en muchas ocasiones este mismo embalaje forma parte del número en que se expresa la medida de las mercancías compradas o vendidas y es de todo punto indispensable determinar la verdadera medida de la mercancía sin envase, puesto que la compra se hace en vista de la medida líquida de la mercancía, y el envase queda como constituyendo elemento modificativo del valor según también dijimos.

Los envases de las mercancías, al efecto del cálculo de esa medida líquida de que hablamos, se deben clasificar en envases inseparables y envases de separación indispensable para vender las mercancías compradas. Los envases inseparables

forman unidades efectivas de medida, como sucede por ejemplo con mercancías que están envasadas en sacos, que se cuenta por éstos indicándose a la vez el número de unidades de cuenta que corresponden a cada saco, y hasta a veces es el mismo envase unidad de cuenta; y los envases de separación indispensable forman lo que en términos comerciales se llama la *tara* de las mercancías.

Es indudable que el número de unidades líquidas de la compraventa, cuando el envase constituye un todo con la mercancía, será el mismo número N de las compradas nominalmente (**426**) y que por tanto no hay cálculo que hacer.

Cuando el envase es separable, puede a su vez estar o no incluído en la formación del número N antes referido, y sólo cuando exista esa inclusión es cuando hemos de necesitar el cálculo de la tara.

La inclusión del envase como parte de la mercancía comprada o vendida sólo tiene lugar cuando la mercancía se mide al peso, distinguiendo en tal caso la cantidad nominal de unidades llamada *peso bruto*, del líquido de estas unidades que se denomina *peso neto* por estar desligado de la tara, siendo las relaciones que unen estos elementos las de

$$N = B - T \qquad B = N + T \qquad T = B - N$$

que por su sencillez no precisan más aclaración.

La tara no es posible determinarla por medio de normas que sirvan para todos los casos, puesto que en la compraventa se determina por mediación directa, cuando es posible, por comparación con un envase vacío, o bien aproximadamente; pero si eso sucede con la *tara real*, hay que tener muy en cuenta la llamada *tara supuesta*, que tiene lugar cuando las partes contratantes tácitamente la reconocen por convenio según los usos mercantiles de la plaza, atribuyendo al embalaje un peso determinado sin necesidad de comprobarlo realmente.

Esta tara se dice también *convencional* o *de uso* y puede ser *fija* o *proporcional*, siendo en este último caso percentual.

La determinación de la tara es por consiguiente una sencilla multiplicación cuando por ser fija se expresa a tanto por bulto; o bien una aplicación del tanto por ciento, que en múl-

tiples ocasiones hemos utilizado y que por tal motivo prescindimos de más detalles.

De todas las taras son las más importantes por su fijeza las llamadas *taras legales* que se hallan determinadas por las disposiciones reglamentarias de impuestos que hayan de satisfacer las mercancías por su medida real, como sucede con los impuestos de aduanas, consumos u otros semejantes. La determinación de las taras legales se hace en la forma misma que las taras convencionales.

EJERCICIOS *números* **1130; 1132; 1134; 1136** al **1138; 1153** y **1155**.

434.—Mermas. – Otro de los elementos que hemos dicho hacían variar el valor de las mercancías eran las disminuciones naturales producidas por el tiempo, y que se denominan mermas, las cuales no es posible expresar de modo general, puesto que siendo principalmente acción del tiempo y de los agentes naturales que obran sobre todo lo existente, claro está que no siempre es igualmente intensa su acción, y en consecuencia no puede serlo la medida de los efectos producidos por esa acción de agentes y tiempo.

Siendo imposible determinar la verdadera medida de las mermas de un modo general, no lo es en cuanto límite que puede alcanzar en un tiempo y espacio prefijados, cual sucede durante un transporte o durante el plazo de venta de las mercancías, año, mes, etc., pues en estos casos han demostrado los estudios estadísticos que las mermas tienen sensiblemente la misma intensidad en el tiempo, por cuya causa ha sido posible establecer el valor promediado de las mermas para cada mercancía, teniéndose relaciones de artículos que completan las tarifas de transporte, en los que se expresa el tanto por ciento de merma para cada caso particular, como cantidad máxima que deben alcanzar, y que al pasar de dicho límite cabe suponer falta de cuidado o robo en las mercancías transportadas o conservadas para vender.

Resulta de todo lo anterior que también las mermas son una aplicación del tanto por ciento y que sus problemas se resolverán por las tres proporciones fundamentales que ya nos son conocidas (**6**) y a las cuales remitimos al lector.

Damos a continuación el modelo de relación de mermas de mercancías en ruta durante el transporte terrestre según R. O. del 16 de enero de 1907 en la que se indica el tanto por ciento de merma que debe calcularse.

MERCANCÍAS	MERMA POR 100 KILOGRAMOS			
	Hasta 200 kilómetros	Más de 200 km. por cada 100	MÁXIMUM Verano	MÁXIMUM Invierno
Capullos de seda	2	1	4	3
Carbón mineral	2	1	4	3
» vegetal en seras	1	1	3	3
» » a granel	3	2	5	4

Ejemplo: Determinar la cantidad de carbón mineral que se recibirá en una remesa de 8.750 kg. facturada a una distancia de 340 km.

En este caso corresponde por los primeros 200 km. una merma de 2 °/₀ y como además hay otras dos fracciones que en estos casos se consideran completas, la merma total sería de 4 °/₀ y aplicando ahora la segunda proporción fundamental **(6)**, con signos subtractivos por tratarse de tanto por ciento a disminuir, se tienen los siguientes valores especiales:

$$c = 100, \qquad t = 4, \qquad N = 8.750, \qquad (N - T) = \text{incógnita}$$

y el resultado que corresponde será:

$$N - T = \frac{(100 - 4)8.750}{100} = 8.400 \text{ kilogramos.}$$

435. – Derechos de aduana y de consumos. – El cálculo que originan estos dos conceptos modificativos, es diferente según los dos modos de expresión de las tarifas o aranceles en que se fijan los mismos derechos.

Por el primero se expresa el impuesto como un número de monedas *por unidad de peso o medida* y en este caso es el cálculo idéntico al del principal de la compraventa **(426)**.

Por el segundo modo de expresarse el impuesto, éste consiste en un tanto por ciento del valor de las mercancías, indicándose en los aranceles por la expresión *ad valorem*. Su cálculo es el de porcentajes que nos es tan conocido.

Además en estos cálculos hay que tener presente si las tarifas señalan el pago en una clase especial de monedas, cual sucede en España que han de pagarse los derechos de adua-

nas en oro, pues en tal caso la moneda correspondiente a los derechos puede tener un sobreprecio sobre la moneda efectiva corriente en que habrán de satisfacerse la mayoría de las veces. Si entonces representamos por N el número de unidades de mercancía que han de pagar derechos, ya referido este número a las unidades indicadas en la tarifa; por V el valor de las mercancías gravadas con los derechos; por T la cantidad de la tarifa, que será tanto por ciento en el caso de pago *ad valorem;* y por s el sobreprecio de la moneda de tarifa sobre la corriente, referido a tanto por uno, tendremos como expresión para el cálculo de dichos derechos

Tarifa por unidad	Tarifa ad valorem
$D = NT(1 + s)$	$D = V \times \frac{T}{100}(1 + s)$

y a cualquiera de estas dos expresiones será necesario añadir los gastos de timbres de documentos necesarios para la práctica de la tarifación llamada *adeudo*, y para el reconocimiento, si procede, cuyos gastos son todos especiales de cada operación y no exigen más cálculo particular que la suma con los derechos a satisfacer.

Ejemplo: Hallar los derechos de Aduana que se satisfarán en España por 35 toneladas de trigo, si la tarifa aplicable es de 10 pesetas por 100 kilogramos y han de pagarse los derechos en oro, que tiene un premio sobre la moneda corriente del 32'85 %, y por gastos fijos se pagan 7'25 pesetas.

Reduciendo las unidades de la partida a las de la tarifa tenemos:

$$N = 350, \quad T = 10, \quad s = 0'3285$$

y el valor de los derechos en moneda corriente

$$350 \times 10(1 + 0'3285) = 4649'75 \text{ pesetas,}$$

a las que añadidos los gastos fijos. 7'25 »

da un total de..... 4657'00 »

Ejercicios *números* **1155** al **1163** comprendiendo la formación de cuentas de despacho por derechos de aduana y detalle de gastos accesorios.

Cuando unas mercancías han sufrido desperfectos por avería particular, es claro que su valor se halla disminuído y en tal caso los impuestos que graven la mercancía considerada como buena, representan una cantidad indudablemente mayor proporcionalmente, en cuanto ha disminuído el valor por la avería.

Teniendo presente esta circunstancia, algunas legislaciones establecen que los impuestos sobre esas mercancías depreciadas sufran una disminución proporcional a la disminución del valor, siempre que ese demérito sea mayor de un límite prefijado y que el importe del impuesto no baje de otro límite.

Para calcular el importe del impuesto en el caso de avería se hacen los cálculos cual si el deterioro no existiere y se hallan el valor de las mercancías con la avería y el que les correspondería sin ella, y llamando D al importe íntegro del impuesto, d al que haya de corresponder por razón de la avería, V al valor íntegro de las mercancías averiadas y v al valor que tienen después del deterioro, tendremos la siguiente proporción que resuelve el caso

$$V : v :: D : d$$

de la que resulta para el importe del impuesto que ha de ser la incógnita necesaria en la práctica

$$d = \frac{Dv}{V}$$

Si la depreciación no llegase al límite fijado claro está que no sería necesario cálculo alguno especial y si descendiese el importe del impuesto del mínimo tampoco haría falta el cálculo, porque dicho importe habría de ser el mínimo.

Ejemplo: Una partida de 5000 kilos de almendra cuyo precio es de 2'04 pesetas kilo y por la que deben pagarse derechos de Aduana a razón de 20 pesetas los 100 kilos, llega con avería que la hace desmerecer, siendo tasada por tal motivo en un precio de 1'55 pesetas kilo. Determinar el importe de esos derechos teniendo en cuenta la avería.

Los valores que adquieren los elementos de cálculo son:

$$V = 2'04; \qquad v = 1'55; \qquad D = 20$$

con lo cual la tarifa se convierte en

$$\frac{20 \times 1'55}{2'04} = 15'196 \text{ pesetas los 100 kilos}$$

y de aquí el importe de esos derechos será

$$\frac{5000 \times 15'196}{100} = 75'98 \text{ pesetas,}$$

sobre cuyo importe será preciso determinar después el premio del oro en igual forma que si no existiese la avería.

EJERCICIOS *números* **1315**, y **CCXXXIII** al **CCXXXV**.

XLV

CÁLCULOS DE COSTOS Y VENTAS

436.- Costo y líquido producto: Sus fórmulas.—El costo de una mercancía es la reunión de todos los elementos que motivan desembolsos hasta ponerla en condiciones de ser vendida de nuevo o en disposición de que satisfaga la necesidad para la que haya sido adquirida, y el producto líquido es la cantidad total recibida por la venta de una mercancía, después de hacer deducción de aquellos desembolsos indispensables para la enajenación, que se hacen por la misma venta como único motivo, según hicimos observar al enumerar las formas de expresión del precio (**422** y **423**).

Para encontrar una fórmula que sirviera para hallar el costo y el líquido producto de la compraventa, bastaría ir reuniendo, por suma en el primer caso y por resta en el segundo, todas las expresiones que acabamos de encontrar para cada uno de los elementos que integran ese costo o producto, lo que se ve inmediatamente que constituye una expresión tan grande en su extensión gráfica, que no sería posible recordarla acaso más que por memorias prodigiosas, y que además no haría sino señalar las operaciones parciales necesarias para hallar ese costo o líquido, sin aclarar ni menos simplificar nada, por lo cual hemos de prescindir de tal fórmula, haciéndose indispensable el cálculo analítico por resoluciones parciales de cada uno de los problemas que integran el total y haciendo luego la suma o resta correspondiente.

Sin embargo de esta afirmación que acabamos de hacer en favor del método analítico y en contra de la fórmula, suelen estudiarse estos problemas

en algunas obras presentando la llamada fórmula de Angulo cuya expresión general es la siguiente:

$$I = \left(\frac{Ne}{n} \times \frac{(100 \pm t)}{100} \times \frac{(100 \pm g\,^{o}/_{o})}{100} \pm \frac{NG\,^{o}/_{o}}{100} \pm T \right) \frac{100 \pm c\,^{o}/_{o}}{100}$$

En esta fórmula el primer factor del paréntesis es el valor de compra **(426)**; el segundo factor es el descuento o bonificación concedido sobre los precios **(427)**; el tercero son los gastos proporcionales al valor de las mercancías, como los de seguro; el sumando algebraico y percentual del paréntesis son los gastos que se refieran al número de unidades de la compraventa, cuales pueden ser los de transporte; el último elemento del paréntesis son los gastos fijos de la compraventa, y por fin el factor exterior constituye la comisión del intermediario.

Para juzgar de la exactitud y utilidad de la expresión de Angulo es preciso considerar que según dicho señor los descuentos y bonificaciones no pueden ser sucesivos, sinó que han de ser simultáneos, cosa que es contraria a la práctica según hemos visto, y que motiva un error no despreciable en la fórmula de Angulo, puesto que la existencia de los descuentos sucesivos no es una rutina que deba desterrarse, sinó que es una necesidad del desarrollo de las operaciones. No es más afortunado en el segundo factor de la fórmula, ya que también establece que haya un sólo elemento que se refiera en su medida percentual al valor de las mercancías, y hemos visto que son varios, puesto que nada impide la existencia de una primera comisión por la operación de compra o venta sin ningún gasto, y hay además el concepto del seguro que también es percentual sobre el valor y que algunas veces tiene a su vez nuevo porcentaje **(432)** y al seguir con la fórmula vemos que en los gastos proporcionales al número de unidades, como serían los de transporte y aduana, se prescinde de los elementos complementarios de estos dos gastos **(430** y **435)**, como también se prescinde de considerar, en todos los elementos hasta ahora examinados, los gastos fijos de cada uno de ellos, que pueden influir sobre el resultado al calcular el elemento sucesivo al que los motiva, y sin embargo se reunen al final en una sola partida. Termina la fórmula con la introducción del elemento comisión final de la operación, como si no fuera posible la existencia de otras comisiones sobre las diferentes operaciones que integran la adquisición o enajenación.

Vemos pues, que la fórmula es un conjunto de motivos de error y por consiguiente digna del mayor abandono posible, abandono que existe de hecho, puesto que ninguno de los que nos vimos obligados a estudiarla la hemos utilizado nunca, ni tampoco se encuentra tratada más que en algunas obras españolas, pero en ninguna de las extranjeras, por su inutilidad y además gran dificultad, aumentando ésta sobre manera en los cálculos de cualquiera de los elementos de la fórmula, por lo cual no podemos ni debemos ocuparnos más de ella.

437.—Documentos que expresan el costo y producto de una mercancía.—Como la compraventa puede ser indirecta o directa según que haya o no un intermediario que

supla al que compra o vende, así hemos de considerar los documentos precisos en uno y otro caso para la determinación del cálculo de conjunto.

La compraventa indirecta se dice que es en comisión, y en este caso el comisionista ha de rendir cuenta a su comitente del resultado de la operación; pero tanto en uno como en otro caso el que compra o vende tendrá también cuenta de todos los elementos del costo o del líquido producto, ya que no todos intervienen en el mismo momento.

Resulta de ésto que los documentos en que se expresa el costo y producto son las *cuentas de compra* y *cuentas de venta* formadas por los comisionistas, y además otro que llamaremos *ficha de costo* y *relación de venta* según el caso, y que es documento de orden particular y privado de la persona que le forma.

Completan estos documentos las facturas formadas por el vendedor para el comprador.

También serán documentos en que se expresen los costos o productos, si bien sólo en partes constitutivas de ellos, las *cuentas de gastos*, semejantes a las de compra y venta, rendidas por los comisionistas que ejecutan algunas de las operaciones que integran la de compraventa.

438.—Cálculos en todos estos documentos.—Todos los documentos que acabamos de enumerar consisten en relaciones de las diferentes partidas que integran el costo o líquido producto, y por consiguiente el cálculo parcial de cada partida no se hace en el mismo documento, por lo que en éste no quedan más operaciones matemáticas que la suma de todos los elementos modificativos del valor, ya conocidos, y la nueva suma con el valor de compra, o resta del mismo, para obtener respectivamente el costo o producto.

La mejor explicación que podemos dar de estos cálculos es la resolución de ejemplos, porque la misma sencillez no permite explicaciones.

Ejemplos.—1) Un negociante de Zaragoza ha adquirido en Buenos Aires, por mediación de un corredor de aquella plaza, 5 toneladas de cuero del Plata seco, al precio de 114 pesos moneda nacional los 100 kilogramos en almacén Buenos Aires. Los gastos que origina la operación son los de enfardaje en bultos de 100 kilos a razón de 0'55 pesos por bulto, conducción

al muelle y embarque a razón de 1'70 pesos igual unidad, flete de Buenos Aires a Barcelona contratado a 2'75 pesetas 100 kilos pagadero a destino, seguro del 2 °/₀₀ sobre el valor de la remesa calculada en pesos y pagado por el comisionista, que también ha satisfecho los derechos de consulado por el certificado de origen que ascienden a 2'50 pesos, y otros gastos de despacho de la mercancía para su embarque por 8'15 pesos.

Llegada la mercancía a Barcelona, es despachada y reexpedida a Zaragoza por un Agente de Aduanas que satisface el flete, y además los gastos de descarga a razón de 2'05 pesetas por bulto, gabarraje pesetas 6'50, despacho de aduanas, que por tratarse de gastos fijos asciende a 14'65 pesetas, derechos de Aduana según la partida 177 del arancel vigente (*) y segunda tarifa que señala 6 pesetas p. b. por 100 kilogramos, impuestos de puerto por 16'85 pesetas, y acarreo para la reexpedición al ferrocarril 10'50 pesetas.

En Zaragoza se retiran las mercancías por el comprador, que satisface el transporte a razón de 0'106 pesetas por tonelada y km., siendo la distancia Barcelona-Zaragoza de 344 km., y además el acarreo por 21'75 pesetas.

Los dos intermediarios cobran respectivamente las comisiones de 2 y de 3 °/₀ sobre sus respectivos desembolsos; el premio del oro para los derechos de aduanas es del 35 °/₀ y el pago del comprador a los dos intermediarios se hace por cheque sobre sus respectivas plazas, que cuestan, 0'40 de comisión para el de Barcelona y a 2'64 para el de Buenos Aires. Además se considerará como peso del embalaje 2'50 kilos por bulto.

Con los datos de la operación anterior hacer el cálculo del costo y redactar las cuentas de compra y gastos y la factura correspondiente, en la que el vendedor hace una bonificación del 1 ½ °/₀.

La factura será la siguiente:

Don Juan López, de Zaragoza..... .. DEBE
a..... por los siguientes géneros entregados por su cuenta a don Alejandro Gaite, de esta plaza, pagaderos a..... (**)

ARTÍCULOS	PRECIO $	IMPORTE $	
5.000 kilos de cuero AB, seco.....	114 °/₀	5.700	
Descuento del 1'50 °/₀		85	50
Total pesos.....		5.614	50

Con esta factura el comisionista de Buenos Aires formula su cuenta de compra en la forma siguiente:

(*) El definitivo de 12 de mayo de 1922.

(**) El encabezamiento de estos documentos es diferente para cada casa y nada interesan a nuestro objeto sus variaciones. También hay falta de unidad en los rayados y distribución de columnas, que por no causar alteración en los cálculos y resultados permite la más amplia libertad en el mismo.

Don Juan López, de Zaragoza, a Alejandro Gaite DEBE
por los géneros siguientes comprados por su cuenta, y remitidos a su riesgo a Barcelona, por vapor C. Colón a la consignación de Castellví y C.ª

MARCAS	MERCANCÍAS			PESOS	
Cast. C. J. L. 1/5	5 bultos de cueros secos con un peso total de 5 toneladas neto, a 114 pesos por cien kilos.. ...			5.700	
	Descuento del 1'50 %..... ...			85	50
	Importe s/ factura.....			5.614	50
	GASTOS				
	Embalaje de 5 bultos a 0'55...	2	75		
	Acarreo y embarque a 1'70.....	8	50		
	Consulado.....	2	50		
	Despacho.....	8	15		
	Seguro sobre 5.800 pesos, 2°/₀₀..... ...	11	60		
	Póliza de seguro.....	1	60	55	10
				5.649	60
	Comisión del 2 %.....			112	99
	Total débito de dicho señor; Pesos.....			5.762	59

Llegada la mercancía a Barcelona y cumplidas todas las operaciones, los señores Castellví y C.ª formulan la correspondiente cuenta, y teniendo presente que los gastos pueden ser muy diversos y diferentes de los que ocurren en el caso especial de que nos ocupamos, el modelo de cuenta tiene detallados cuantos pueden ocurrir y la forma de sumar los que son de igual concepto, como los de gabarraje (portes a tierra) y acarreo al F. C La cuenta será la de la página siguiente:

Con los datos de todos esos documentos el comprador formará la ficha o cuenta de costo total de la compra, refiriendo en ella cada partida a la fecha en que le corresponde hacer la anotación respectiva. En tal concepto la ficha de costo será:

Adquisición de 5 toneladas de cuero seco en Buenos Aires

Cuenta de compra del comisionista de B. A. Pesos 5762'59 comprados al Banco X, al cambio de 2'64.....	Pesetas	15213'24
Cuenta de gastos de C y C.ª de Barcelona	»	635'75
Comisión del ch/ para pago del anterior, 0'40 %.....	»	2'55
Portes de Barcelona a Zaragoza, impuesto y timbre.....	»	195'50
Acarreo.....	»	21'75
Coste total.....	»	16066'79

2) Un productor de Santander envía a Valencia una partida de escabeches para su venta en el mercado de esta plaza y al terminar dicha operación el representante remite la cuenta de venta, o relación de ventas y gastos ocasionados.

CUENTA de desembolsos hechos por **CASTELLVÍ Y C.ª** de Barcelona, en el despacho de las mercancías detalladas al margen, recibidas de A. G. de Buenos Aires, por vapor C. Colón, por cuenta de D. Juan López de Zaragoza, y remitidas a esta plaza por f. c. p. v. a dicho señor López, por su cuenta y riesgo.

5 bultos cueros	Derechos de Aduana; *5012'50 kg. partida 177, segunda columna, a 6 ptas. %*...			*300*	*75*
	Premio del oro 35 %.....			*105*	*27*
	Impuesto de transporte y Obras de Puerto.	*16*	*85*		
	.....				
	..... Declaración.....				
	Despacho. *6'25* Factura embarque.....	*6*	*25*		
	Transbordo..... Guía de alijo.....				
	Obvenciones y dietas.....	*6*	*30*		
	Arbitrio de muelle a la carga ..... a la descarga, *1'60*.....	*1*	*60*		
	Gastos de carga..... de descarga, *10'25*.	*10*	*25*		
	Derecho de superficie de muelle.....				
	PORTES: a tierra, *6'30;* a la Aduana..... al F. C., *10'50*.....	*16*	*80*		
	PORTES: al almacén.... a casa.... al muelle...				
	PORTES: a bordo..... de muelle a muelle				
	PORTES:				
	Flete del vapor de entrada, *136'84;* idem de salida.....	*136*	*84*		
	Porte del F. C. de entrada..... idem de salida.....				
	Guardérías..... Encerados.....				
	Almacenaje..... Seguro.....				
	Consumo..... Correo y telégrafo.....				
	Estadías..... Grúa.....				
	..... Certificación Consular.....				
	Claseado..... Marcas.....				
	Reparación envases..... Materiales para idem.....				
	Solicitudes, permisos e instancias.....				
	Gratificaciones.....				
	Gastos extras.....				
	.....				
	Despacho previo.....				
	Papel sellado, timbres y pólizas.....		*50*		
	Reembolso.....				
	.....				
	.....				
	.....				
	3 % s/ Ptas. *601 41*. Desembolsos.....	*18*	*04*		
	Comisión de Agencia.....	*16*	*30*		
	Gastos de Giro.....			*229*	*73*
	S. E. u O.	*Total Pesetas*....		*635*	*75*

Cuenta de venta *y líquido producto de 3 cajas truchas en escabeche y 3 bonito retirados del vapor AUSIAS MARCH en 5 del actual por orden y cuenta de Pesquerías del Norte de Santander.*

Marcas	Bultos	Millares o kilos					Pesetas	Cts.
N.P.E	1 c/	47	T. Grandes	a 9 1/2	ptas.	K.	446	50
	1 —	46 1/2	T. Medianas	— 8 1/2	—	—	395	25
	1 —	46	T. Pequeñas	— 6	—	—	276	00
	3 —	126	Bonito	— 9 1/2	—	—	1197	00
					Pesetas....		2314	75

GASTOS	Pesetas	Cts.		
Flete según conocimiento	13	05		
Portes ferrocarril				
Despacho de Aduanas y sellos	3	60		
Desembarque, acarreo y cargadores	9	—	141	35
Obras Puerto				
Comisión 5%	115	70		
Telegramas				
LÍQUIDO PRODUCTO A SU FAVOR.		*Pesetas*..	2173	40

El vendedor hará también la relación de venta para conocer el líquido producido, toda vez que la remesa ha de causarle gastos en su plaza, y tendremos el documento que sigue, en el que bastan los datos consignados para conocer las condiciones en que se ha efectuado la operación y los cálculos parciales que origina

Relación de venta o líquido obtenido de la misma

Producto de la cuenta de venta			Pesetas	2173'40
Embalaje de 6 cajas	Pesetas	21'30		
Acarreos para embarque	»	12'60		
Despacho de Aduanas	»	3'90		37'80
Líquido de la venta			Pesetas	2135'60

EJERCICIOS sobre costo, los *números* **1164** al **1166; 1168; 1170** al **1173; 1181; 1184**; **CCXVIII** al **CCXXVI** y **CCXCV** al **CCC**.

EJERCICIOS sobre líquido de ventas los *números* **1169; CCVI**

al **CCXVI; 1418;** y solo de cuenta de venta los *números* **1167; 1174; 1175; 1177; 1430; 1442; 1461** y **CCXVII.**

PROBLEMAS con otra incógnita que exige cálculo de costes y netos, los *números* **DLVIII** al **DLX.**

439.—Procedimiento general de cálculo del costo y producto.—En todos los cálculos anteriores no hemos hecho sino aplicar lo que dejamos dicho en el capítulo anterior, y además puede apreciarse cómo puede ser elemento modificativo del valor de las mercancías el cambio de las monedas extranjeras, en cuanto que al variar su equivalencia en moneda nacional producen alteración en la partida de monedas nacionales. Por esta causa hacíamos advertir en otro lugar (**378**), que el costo de las mercancías compradas, y por semejanza el producto de las vendidas, cuando la operación se efectúa a base de precio en monedas extranjeras, sólo puede conocerse asegurando la base de equivalencia entre monedas por la operación del seguro de cambios, a la cual habrá que atender también en los cálculos de costos y productos, siendo ésto nuevo motivo para desterrar la fórmula única, porque la reducción de monedas extranjeras a nacionales se ha de hacer en el momento que cada operación particular necesite y no sería posible determinar con anticipación cuál era la situación que corresponde a este elemento modificativo en la fórmula general, ya que nada impide que también el flete hubiera sido contratado en moneda extranjera, y hasta distinta de la de compra y gastos de embarque, por lo que siendo tan compleja la operación de comprar y vender mercancías, además de que las operaciones parciales se ejecutan forzosamente en tiempos y lugares diferentes, sólo el procedimiento analítico ha de ser conveniente y posible para los cálculos que originan.

Queda como aspecto especial de estos cálculos de conjunto el de una *operación simulada*, en el que desde luego han de hacerse en el mismo momento todas las operaciones de cálculo; pero ni aún en este caso es útil el empleo de fórmulas generales, pues que siempre se harán las operaciones matemáticas siguiendo aquellas operaciones técnicas que habrían de efectuarse, como sería por ejemplo la venta de una mercancía cif Génova, por un productor de Cádiz, en que el cálculo, tanto de la operación real como de la simulada, se hará si-

guiendo las operaciones de despacho y embarque en Cádiz, flete y seguro a Génova, sumando luego los gastos para restarlos del valor de la venta.

Ejemplo: Determinar el producto que se obtendría por la venta de una mercancía existente en Oviedo, contratada a 184 pesetas los 100 kilos franco destino Habana.

Siguiendo las diferentes operaciones, vemos que una vez determinado el valor de factura, será necesario conocer, como elementos diminutivos del producto, los gastos de transporte de Oviedo a Gijón, que es el puerto más cercano para el embarque a Cuba, los de despacho y embarque en este puerto, flete hasta Habana, seguro de riesgo marítimo, descarga y despacho en las aduanas cubanas y pago de los derechos de importación si la mercancía está gravada con ellos. Todas estas operaciones parciales tendrán un número que indica el importe de las mismas, calculado en la forma ya conocida, y después, sumadas todas las partidas, supongamos que ascendieran a 27'45 pesetas, y que hayamos tomado los 100 kilos como cantidad vendida para hallar el producto pedido, es indudable que este resultado sería

$$184 - 27'45 = 156'55 \text{ pesetas}$$

440.—Cálculos inversos.—Son cálculos inversos los que se hacen para determinar uno cualquiera de los elementos que sirven para hallar el costo o líquido producto y fácilmente se comprende que si la fórmula para el elemento principal es engorrosa y embrollada, más lo ha de ser la que sirviera para éstos cálculos inversos; pero siguiendo nuestro criterio de buscar el medio más útil de cálculo y deducir procedimiento sólo para aquellos elementos que ha de ser necesario calcular, vemos que de todos cuantos sirven para los cálculos de conjunto de que nos ocupamos, sólo es el número de unidades compradas y vendidas el que puede interesar, para que se mantenga el costo o producto en ciertos límites, ya que puede ser preciso saber la cantidad que puede comprarse con una cantidad de moneda fijada de antemano, o las unidades que es preciso vender para conseguir como producto otra cantidad también previamente fijada.

Todos los otros elementos de cálculo, vemos que se determinan por tarifas o condiciones generales de las personas que intervienen en las operaciones, o por leyes que regulan su ejecución, así que, como elementos que puedan ser incógnitas del cálculo, no pueden considerarse.

El cálculo de este número de unidades puede hacerse por

dos procedimientos analíticos que llamaremos de *cálculo total* o de *reducción a la unidad*.

Para hallar el número de unidades por el cálculo total, es preciso resolver todos los problemas inversos que se vayan presentando, para ir obteniendo el líquido de unidades monetarias que resultan de cada operación parcial, hasta que se llegue a la compra o venta al precio convenido o previsto, en la que ya resulta una sencilla división, por conocerse el precio de varias unidades y el de una de ellas.

Ejemplo: Un comerciante de Sevilla puede vender cif. La Coruña, envase a devolver, una partida de aceite al precio de 238'25 pesetas el Qm. Se desea conocer a cuántos Qm. ascenderá la venta para que el comerciante de Sevilla obtenga un producto de 20.000 pesetas, si cuesta el seguro el 5 °/₀₀, el flete es de 0'45 pesetas por cien kilos de puerto a puerto, y los gastos de aduana en Sevilla son de 5'50 pesetas cualquiera que sea la partida.

Resolviendo los problemas inversos, vemos que siendo los gastos de aduana fijos para cualquier importe de la partida, se deben restar del producto obtenido, y por tanto será preciso que el producto sin considerar estos gastos sea igual al que se desea obtener más dichos gastos, o sea 20.005'50 pesetas, y esta cantidad es el líquido que resulta de disminuir el seguro, por lo que el producto a obtener para deducir ese gasto, se hallará por la segunda proporción fundamental del tanto por cuanto **(6)** cuyos valores sean

$$c = 1000, \qquad t = 5, \qquad (N - T) = 20.005'50$$

y el valor buscado

$$N = \frac{20.005'50 \times 1000}{1000 - 5} = 20.065'69 \text{ pesetas},$$

cantidad que también resulta de restar del producto de la venta el flete, que por referirse a las unidades vendidas será preciso hacer intervenir en la operación última como disminución del precio de venta, y dividiendo luego el líquido a obtener, que ya sabemos son las 20.065'69 pesetas, por este precio rectificado, que es 238'25 — 0'45 = 237'80, tenemos para la cantidad buscada

$$20.065'69 : 237'80 = 84'37 \text{ Quintales métricos.}$$

Para hallar el número de unidades por la reducción a la unidad se considera comprada o vendida una sola unidad, o mejor 100 o 1000, y se hacen todos los cálculos directos como si se tratase de venta real de éstas, hallando así el producto ó costo de una unidad, y luego basta una sencilla división igual a la hecha en último lugar por el otro procedimiento para tener el resultado apetecido.

Ejemplo: En el caso anterior de compra hecha en Buenos Aires por un

negociante de Zaragoza, hallar las toneladas que podrán adquirirse con 50.000 pesetas.

Repitiendo todos los cálculos hechos en el mismo orden que allí se hicieron, simulando todas las operaciones precisas, llegaríamos a encontrar como resultado (*) 3.213'36 pesetas como costo de una tonelada y por consiguiente el número de las que se podría comprar habrían de ser

50.000 : 3.213'36 = 15'56 toneladas.

Tanto en uno como en otro procedimiento, habrá de tenerse en cuenta, que en estos resultados de cálculos inversos se hace preciso aproximar las cantidades en relación a las condiciones prácticas de compra o venta, pues es claro que si las mercancías sólo pueden comprarse o venderse por toneladas sólo se considerarán resultados enteros, dando el resultado con una aproximación de error menor que la unidad entera, por defecto en el caso de compra y por exceso cuando sea venta, y si la operación referida a toneladas se puede hacer por kilo se aproximará el resultado hasta que el error fuese menor de una milésima que es el orden de unidades que indican la posibilidad práctica de ejecución, siendo siempre el sentido de la aproximación el antes indicado.

Ejercicios *números* **1175; 1178** al **1180; 1182** y **CCXXVII** al **CCXXXII**.

(*) Este resultado es el de dividir el costo total de la compra (**438**, Ej. 1.º) por 5 que son las toneladas que allí figuran adquiridas.



XLVI

PRECIOS DE COSTE Y VENTA

441.—Costo de la unidad.—Este cálculo es tan sencillo que basta la división del costo total, encontrado en la forma conocida, por el número de unidades compradas, para tener el precio de costo de una de ellas, como encontramos antes el de una tonelada en la compra hecha en Buenos Aires por el comerciante de Zaragoza.

Puede suceder que al proceder a esta determinación nos hallamos con que el costo total se refiere a varias cantidades compradas a la vez, y referidas sus medidas a unidades diferentes, en cuyo caso no es posible hacer esta división, hallándonos con un problema especial de la determinación de costos conocido generalmente con la denominación de prorrateo de facturas.

EJERCICIOS *números* **1194; 1196; CCXXXVI** al **CCXXXVIII** y **CCXCV** al **CCXCVIII**, además de poderse utilizar los **1164; 1166; 1168; CCXIX** al **CCXXIV;** y **CCXXVIII** al **CCXXXII**.

442.—Prorrateo de facturas.—Suele denominarse *prorrateo de facturas* a la determinación del precio de costo de una unidad, diciendo que se hace esta determinación por razón de su coste y gastos; pero suele añadirse, y éste es el verdadero concepto del prorrateo de facturas, que consiste en la distribución de los gastos de una factura entre los diferentes elementos de la misma, para deducir el precio de costo de cada clase de mercancía de las contenidas en la factura y que constituyen una sola operación de compra.

Es sistema general el distinguir dos casos en el reparto, in-

tegrado el primero por la compra solo de una clase de mercancías, en el cual no admite distribución ninguna y sí la suma y división a que nos hemos referido antes.

Resulta como verdadero prorrateo, el caso en que sean varias las mercancías de una sola compra, y en el que hemos de distinguir: 1.° que los gastos sean todos iguales para cada unidad de las diferentes clases de artículos; y 2.° que sean diferentes los gastos de las distintas clases de mercancías.

443.—Distribución por repartos.—Para hacer la distribución de los gastos en el primero de los casos anteriores, se hacen los repartos (**38** al **48**) siempre directamente proporcionales, si bien sean unas veces simples y en relación a las unidades según factura, otras veces compuestos en relación a precios y cantidades, y hasta algunas veces conviene que el reparto se haga complejo, en relación a precios y cantidades; pero de cualquier modo no se tiene por resultado el precio de costo de la unidad, sino que será unas veces la cantidad de gastos que corresponde a la partida, otras veces el aumento que por los gastos sufrirá el precio de compra de cada unidad, y otras el costo de cada partida, y claro está que en cualquier caso siempre ha de ser precisa una operación complementaria al propio reparto, para obtener el precio de costo por unidad, que es la verdadera incógnita.

Como vemos que pueden ser distintas las condiciones prácticas de las mercancías y el determinar que sea uno u otro el modo de reparto que haya de utilizarse, tendremos los siguientes casos prácticos:

a) *Distribución en partes proporcionales a las unidades de factura*, que convendrá al caso en que las mercancías sean poco diferentes de precio, obteniendo como resultado el aumento que en el costo de cada partida producen los gastos, aumento que se añadirá al valor de compra de la misma partida, y después dividida la suma por el número de unidades, lo que motiva una simplificación, porque siendo el resultado del reparto para una clase cualquiera, cuyas unidades sean N_n

$$\frac{GN_n}{\Sigma N_n}$$

que después ha de ser dividido por el número N_n de unida-

des de la clase, a cada unidad ha de corresponderla por razón de los gastos un aumento en su precio de

$$\frac{GN_n}{\Sigma N_n} : N_n = \frac{G}{\Sigma N_n}$$

lo cual nos indica que en tal caso *se divide el importe de los gastos por la suma de unidades compradas, y el cociente es el aumento que sufre cada unidad en su precio.*

Ejemplo: Se ha adquirido una partida de vino de mesa compuesta de 74 cajas de botellas corriente blanco a 25 pesetas caja; 59 cajas corriente tinto a 24 pesetas caja, y 65 cajas extra tinto a 26'50 pesetas, siendo de 216 pesetas el conjunto de gastos que originó la operación.

Prescindimos de los cálculos parciales de principal y gastos ya conocidos, y como las tres clases de vino son de precios poco diferentes, los gastos de cada caja serán los mismos en una y otra clase, por lo que bastará calcular la parte de gastos que corresponde a una caja, mediante la división de los gastos por el número total de ellas, según indica la regla encontrada procediendo por reparto, y tendremos:

Gasto de cada caja 216 : (74 + 59 + 65) = 1'2155 pesetas,

lo que sumado a cada precio nos da:

Precio de costo de la clase corriente blanco	26'2155	pesetas.
» » » » tinto	25'2155	»
» » » » extra.....	27'7155	»

Hay que tener en cuenta en estos resultados que los cocientes no son exactos y que por tanto han de calcularse hasta llegar a la aproximación precisa como en los demás repartos **(40)**.

b) *Distribución del total de gastos o del total costo en partes directamente proporcionales a unidades y precios de compra en repartición compuesta*, o sea, *en proporción a los valores de las diferentes partidas según factura*, lo que conviene al caso en que las mercancías tengan precios muy diferentes, obteniendo como resultado el aumento de costo de cada partida si la cantidad distribuída son los gastos, y el costo de la misma partida si se distribuye el costo total.

Cuando se distribuyen los gastos, el resultado se suma al valor de cada partida en factura, y esta suma, o el resultado de repartir el costo total, se divide por el número de unidades.

Ejemplo: Hemos comprado una partida de vinos y licores que se compone de 6 cajas de doce botellas de coñac A al precio de 47'65 pesetas caja; 15 cajas, también de doce botellas, de champagne RR a 137 pesetas; 8 cajas

coñac AAA cuyo precio es de 65'80; y 25 cajas de doce botellas de licor SS al precio de 32'50 pesetas caja, y el total de los gastos asciende a 749'60 pesetas. Determinar el precio de coste de una caja en cada clase.

Como hemos dicho que puede distribuirse en proporción a los valores de compra, lo mismo el total costo que el importe de los gastos, emplearemos este procedimiento y tendremos:

Valor de	6 c/ clase A	a 47'65 pesetas.	Pesetas	285'90
»	» 15 » » RR	a 137 »	»	2055
»	» 8 » » AAA	a 65'80 »	»	526'40
»	» 25 » » SS	a 32'50 »	»	812'50
	Total valor de factura		Pesetas	3679'80

y haciendo ahora el reparto, el aumento de valor en cada partida será

A..... (749'60 : 3679'80) × 285'90 = 58'24 pesetas.
RR..... (749'60 : 3679'80) × 2055 = 418'62 »
AAA..... (749'60 : 3679'80) × 526'40 = 107'23 »
SS..... (749'60 : 3679'80) × 812'50 = 165'51 »

de cuyos resultados tenemos para valor de costo de cada caja

A..... (285'90 + 58'24) : 6 = 57'36 pesetas.
RR..... (2055 + 418'62) : 15 = 164'91 »
AAA..... (526'40 + 107'23) : 8 = 79'20 »
SS..... (812'50 + 165'51) : 25 = 39'12 »

Claro es que haciendo la distribución del costo total, nos habríamos ahorrado las cuatro sumas necesarias para las últimas divisiones, teniendo en cambio que hacer la suma de los gastos con los valores de venta.

También en este caso puede hacerse una simplificación, pues que al multiplicar por el valor de factura y luego dividir por las unidades de cada partida esta división constituye la supresión de uno de los factores que componen el producto valor de compra, es decir, que por el reparto en la forma que dejamos dicha corresponde a cada clase de mercancías, en gastos o costo según el elemento que se distribuye,

$$\frac{G(N_n \times P_n)}{\Sigma N_n P_n} \quad \text{o bien} \quad \frac{V_c(N_n \times P_n)}{\Sigma N_n P_n}$$

y por la división posterior se suprime el factor N_n del numerador, quedando para cada parte

$$\frac{GP_n}{\Sigma N_n P_n} = \frac{G}{\Sigma N_n P_n} P_n \quad \text{o bien} \quad \frac{V_c P_n}{\Sigma N_n P_n} = \frac{V_c}{\Sigma N_n P_n} \times P_n$$

lo que expresaremos diciendo que *se divide el total de gastos*

por el valor total de compra (suma de los productos de las unidades por sus precios de compra) *y el cociente se multiplica por cada precio*, teniendo así el aumento de éstos por razón de los gastos.

Ejemplo: Resolver el anterior con esta simplificación.

Si hacemos el reparto de los gastos tendremos para aumento en los precios de cada clase

A, ... (749'60 : 3679'80) × 47'65 = 9'71 pesetas.
RR, ... (749'60 : 3679'80) × 137 = 27'91 »
AAA, ... (749'60 : 3679'80) × 65'80 = 13'40 »
SS, ... (749'60 : 3679'80) × 32'50 = 6'62 »

que sumados con los precios nos dan igual resultado que antes.

Si repartimos el total costo tendremos:

Coste total de la compra 3679'80 + 749'50 = 4429'40 pesetas

de donde resultan directamente los mismos precios que antes

A, ... (4429'40 : 3679'80)47'65 = 57'36 pesetas.
RR, ... (4429'40 : 3679'80)137 = 164'91 »
AAA, ... (4429'40 : 3679'80)65'80 = 79'20 »
SS, ... (4429'40 : 3679'80)32'50 = 39'12 »

444.—Distribución por reducción a la unidad.—Se denomina de este modo el mismo procedimiento que hemos estudiado, cuando se hace primero la división

$$\frac{G}{\Sigma N_n P_n}$$

por la que se determina el gasto que corresponde a cada unidad de valor de compra, elemento que en este caso se denomina *tanto por uno*, y claro está que el total de gastos por precio o por partida será

$$\frac{G}{\Sigma N_n P_n} \times P_n \qquad \text{o bien} \qquad \frac{G}{\Sigma N_n P_n} \times (N_n P_n)$$

que es lo mismo que hemos hecho antes, y que prueba que no es éste, procedimiento especial.

También se encuentra como procedimiento abreviado para conseguir el precio de costo la sustitución de la suma posterior a la multiplicación por sólo la multiplicación, pues es indudable que el resultado del reparto de los gastos ha de ser sumado con el precio, y si representamos por C al cociente base del reparto, que ya decimos se llama también tanto por

uno, y es P el precio de compra, el aumento que le corresponde a este precio es CP y el precio de costo será

$$P + CP = P(1 + C)$$

fórmula que permite hacer la multiplicación después de la suma, pero que en nada varía el resultado, y según la cual

Para hacer la distribución de gastos de una compra entre las diferentes partidas que la integran, se divide el total de los gastos por la suma de los valores de compra y este cociente aumentado en una unidad se multiplica por los precios de compra, obteniendo por producto los respectivos precios de costo.

Ejemplo: Haciendo aplicación al antes resuelto se tendría:
Cociente unitario o tanto por uno; 749'60 : 3679'80 = 0'203706.
Precio de costo que corresponde a la clase *AAA*, por ejemplo,

$$1'203706 \times 65'80 = 79'20$$

que es el mismo resultado de antes, y por cuyo procedimiento hallaríamos todos los precios correspondientes a las demás clases.

445. — Distribución de gastos diferentes. — En el segundo de los casos de prorrateo que hemos establecido, en que los gastos que origina la compra son diferentes según la clase de unidades, habiendo algunos comunes, ya sea esta comunidad relativa a todas o sólo a algunas clases de las compradas, por cada clase de gastos hemos de resolver un problema parcial de distribución y cálculo del costo, problemas parciales que serán de uno u otro de los casos antes estudiados.

En esta distribución, que prácticamente es más sencilla que la general que acabamos de estudiar, debe empezarse por los gastos particulares de cada género, seguir luego por los que sólo son comunes a algunas clases de artículos y terminar por la distribución de los que son comunes a toda la operación considerando siempre como precio de compra el de costo según los gastos anteriormente distribuídos.

Ejemplo: Si en el que venimos considerando de la compra de vinos y licores, la clase *RR* origina derechos de entrada (*) que asciende con los gastos fijos de estos mismos derechos a 48'75 pesetas; las dos clases de

(*) Este gasto y los sucesivos comunes a sólo parte de la compra han de considerarse que los ponemos como ejemplo de cálculo aunque no correspondan exactamente a la realidad práctica.

coñac y el champagne han originado gastos especiales que no tuviera la otra clase por 469 pesetas, y el total de los gastos comunes fuese el mismo que antes, 749'60 pesetas, determinaremos los precios de costo como sigue:

Las 48'75 pesetas corresponden al caso en que sólo se compra una clase de mercancías **(441)** y el precio que por razón de ésto corresponde a la clase *RR* será:

$$(2055 + 48'75) : 15 = 140'25 \text{ pesetas.}$$

Ahora distribuiremos los gastos comunes a las tres clases teniendo en cuenta que ya el precio de la clase *RR* ha de ser el de 140'25 que acabamos de hallar, y como el total costo de estas tres partidas, según los gastos de sólo ellas tres, es de 3385'05 pesetas, y el valor sin los gastos comunes es de 2916'05 pesetas, estos precios de costo serán:

A, ... (3385'05 : 2916'05) × 47'65 = 55'51 pesetas.
RR, ... (3385'05 : 2916'05) × 140'25 = 162'81 »
AAA, ... (3385'05 : 2916'05) × 65'80 = 76'58 »

y ya nos hallamos con el reparto final en el que el valor total de compra es

$$\Sigma N_n P_n = 3385'05 + 812'50 = 4197'55 \text{ pesetas,}$$

o sea el costo anterior para las tres primeras clases y el de compra para la última, siendo el costo total a repartir 4947'15 pesetas, que nos dará para precio de coste por caja en cada clase

A, ... (4947'15 : 4197'55) × 55'51 = 65'19 pesetas.
RR, ... (4947'15 : 4197'55) × 162'81 = 191'89 »
AAA, ... (4947'15 : 4197'55) × 76'58 = 90'02 »
SS, ... (4947'15 : 4197'55) × 32'50 = 38'30 »

446.—Aproximaciones y comprobaciones.—Hemos visto en todos los cálculos que anteceden que los resultados de divisiones no serán casi nunca exactos y que, en consecuencia, necesitaremos calcular en esas divisiones un número de cifras decimales bastante grande para que el error producido por la inexactitud de los cocientes no llegue a los céntimos, que es la aproximación práctica necesaria en los resultados finales, y para ello es suficiente el que en esos cocientes haya tantas cifras decimales posteriores a la de los céntimos como cifras enteras tenga el mayor número por el que haya de multiplicarse el cociente aproximado, aumentado dicho número en una unidad. Así en el último ejemplo resuelto el mayor número por que se multiplicó era el 162'81 y por tanto las cifras del cociente aproximado del paréntesis serían: 2 por los céntimos y $(5 + 1)$ por las cifras enteras del factor, que en total serían 6 cifras decimales en el cociente.

Además será conveniente que siempre se haga la aproximación de todos los resultados en menos de media unidad del último orden, tanto por disminuir el error como porque de este modo resultarán unos aproximados por exceso y otros por defecto, compensando los errores finales.

Siempre que se hacen los cálculos de distribución de gastos es conveniente comprobar el resultado, multiplicando los precios hallados para cada

clase por sus respectivas unidades, debiendo tener por suma de estos productos el costo total de la operación; aunque la mayoría de las veces tendremos error de algún céntimo y hasta si los precios de costo se obtienen sólo hasta los céntimos puede llegar ese error final a unidades enteras en casos extremos. Con esta comprobación obtenemos la seguridad de los resultados, tan importante en todas las cuestiones administrativas.

EJERCICIOS *números* **1189; 1191; 1193; 1197; 1200; CCXXXIX** al **CCXLV; CCXCIX** y **CCC;** pudiéndose utilizar también los números **1170** al **1172; 1184; CCXVII; CCXVIII; CCXXV; CCXXVI**.

447. – Costo con mermas. – Cuando las mercancías compradas han sufrido mermas, no son exactos los precios de costo encontrados por los prorrateos y distribuciones anteriores, puesto que se hacen las determinaciones en base a la existencia de un número de unidades distinta de la verdadera, siendo indispensable establecer la corrección precisa en los resultados según los procedimientos anteriores, y para ello basta considerar que las mermas se expresan a tanto por ciento y que por consiguiente una vez obtenido el tanto de merma, sea ésta real o calculada, la unidad comprada se convierte en $1 - t$ llamando t al tanto por uno.

De lo que dejamos dicho resulta que el precio hallado según los prorrateos, es el valor de costo de las unidades $1 - t$ y como el precio que ha de obtenerse, es el de la unidad, si representamos por P_n el precio de costo prorrateado y por P el precio de costo con mermas, este último tendrá que ser

$$P = P_n : (1 - t)$$

Ejemplo: Una mercancía cuyo costo según los cálculos ha resultado por unidad al precio de 23'50 pesetas, tiene una merma del 5%. Determinar el precio a que resulta en vista de esta circunstancia.

Los valores son:

$$P_n = 23'50 \qquad t = 0'05$$

y el resultado que se busca

$$P = \frac{23'50}{1 - 0'05} = 24'2268 < > 24'25 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **1187; 1188; 1190; 1198;** además de poderse utilizar los indicados en este mismo capítulo.

448. – Costo en relación a los gastos generales. – De-

cíamos en otro lugar (**421**) que los gastos generales de la empresa modifican el valor de las mercancías mediante una parte alícuota, pero es necesario conocer cuál es esta alícuota y su influencia en el valor.

Para ello empezaremos por hacer constar que los gastos generales son los desembolsos que no tienen aplicación a una operación determinada, sino que se hacen para todo el negocio, y como tales corresponde una parte de ellos a cada operación, pero siendo imposible determinar *a priori* cuáles serán las operaciones, para saber la parte que a cada una corresponde en los gastos generales, se hace un presupuesto o cálculo aproximado de las operaciones a efectuar y de los gastos de la empresa y con estos dos elementos se determina el tanto por uno de gastos que corresponde a cada operación.

Para determinar el tanto por uno de gastos, si es G el importe presupuesto de ellos, y V el valor total de las operaciones presupuestadas, el tanto por uno será:

$$\frac{G}{V}$$

y una vez obtenido este coeficiente tendremos el aumento que en el costo ha de hacerse y *el precio de costo en razón de estos gastos será el que hallemos por los cálculos del prorrateo y mermas, multiplicado por el coeficiente aumentado en una unidad.*

Ejemplo: Si en el ejemplo anterior la empresa tiene unos gastos anuales de 146.000 pesetas y sus operaciones de compra ascienden a 3.650.000 el costo que corresponde a la mercancía será:

$$P = 24'25\left(1 + \frac{146.000}{3.650.000}\right) = 25'20 \text{ pesetas.}$$

Ejercicios *números* **1195** y **CCXLVI** al **CCL** además de que puede utilizarse cualquiera de los de compra.

449.—Precio de coste industrial.—La distribución de gastos de una entidad mercantil o industrial por productos ya dijimos que tenia por objeto la determinación de los diferentes costos, y en tal concepto el prorrateo de facturas (**442**) constituirá un caso especial de este que nos ocupa, si bien en este caso siempre ha de entenderse que se distribuye el total costo de los productos.

Cuando el producto que se obtiene de un proceso industrial es único, claro está que el precio de costo del mismo será el cociente de dividir la suma de todos los elementos que integran el costo por el número de unidades producidas, pero cuando se obtienen varios productos a la vez, es necesario determinar la proporcionalidad con que haya de repartirse el costo total para obtener el parcial de cada producto.

La proporcionalidad en base a la cual se haga esa distribución del costo total, puede ser cualquiera, si bien el único procedimiento equitativo y exacto será el que tome como base el valor relativo de los diferentes productos, y claro está que este valor relativo, ya que no puede ser determinado por el precio de compra como sucedía en el prorrateo de facturas (**443**, *b*), habrá de estar determinado por el precio de mercado, si existe para el producto, y si éste no tuviera cotización, se establecería una base arbitraria que refleje la importancia relativa de cada producto, considerando luego los números que reflejan esta importancia relativa como precios de venta y *haciendo el reparto en proporción directa y compuesta de los precios de venta y de las unidades obtenidas para cada producto; los resultados de este reparto* que son costos totales de cada producto, *se dividen por las unidades del producto respectivo para obtener los costos unitarios*.

Ejemplo: El costo total de la elaboración de tres productos es de 32210 pesetas, y las cantidades respectivas obtenidas son de 215; 132; y 155 metros. Calcular el precio de costo unitario que corresponde a cada uno si sus precios respectivos de mercado son 101, 95 y 80 pesetas.

Haciendo el reparto compuesto tenemos como números básicos

1.º	215 × 101 =	21715
2.º	132 × 95 =	12540
3.º	155 × 80 =	12400
Valor total de mercado.....		46655

de donde se tiene por alícuota unitaria

$$32210 : 46655 = 0'69058688$$

y como ahora hemos de multiplicar esta alícuota por el valor de mercado de cada producto y dividir después por las unidades del mismo, esta división suprime uno de los dos factores (**443**) por lo que bastará multiplicar la alícuota por el respectivo precio, y los costos serían:

1.º ..... 0'69038688 × 101 = 69'729 pesetas
2.º ..... 0'69038688 × 95 = 65'587 »
3.º ..... 0'69038688 × 80 = 55'251 »

de cuyos resultados podremos hacer la comprobación siguiente:

Valor de costo del producto 1.º 215 × 69'729 = 14991'73 Ptas.
» » » » 2.º 132 × 65'587 = 8657'48 »
» » » » 3.º 155 × 55'251 = 8560'80 »
» » total..... 32210'01 »

cuyo error proviene de ser inexactas las divisiones anteriores.

EJERCICIOS *números* **1185; 1186; 1223; CCLI** al **CCLV** y **CCCVI.**

450.—Precio líquido de una venta.—Del mismo modo que hemos determinado el precio de costo que resultaba en una operación de compra, es posible determinar el que resulta como líquido en una venta, siendo en todo semejantes los cálculos de uno y otro, pues la diferencia consiste en que ahora se harán intervenir los resultados con el signo negativo en vez de positivo que tienen en el precio de costo, ya que los gastos en la venta han de restarse en lugar de sumarse como se hace en la compra.

Cuando las operaciones se hacen por la distribución del líquido de la venta no es necesaria ninguna alteración en el procedimiento ya conocido para el precio de costo, porque entonces el dividendo de las distribuciones es la cantidad menor en vez de ser la mayor, como sucedía en las compras.

Ejemplo: Se han vendido las tres partidas siguientes de tejidos: 150 metros de raso a 12 pesetas metro; 120 metros de lienzo a 1'90 pesetas y 200 metros de pana a 6'70 pesetas, habiendo originado la venta 632 pesetas de gastos. Determinar los precios líquidos de venta.

Resulta para importe de la operación

Raso,	150 metros a 12	pesetas	Pesetas	1800
Lienzo,	120 » a 1'90	»	»	228
Pana,	200 » a 6'70	»	»	1340
		Total de factura.....	»	3368
		Gastos.....	»	632
		Líquido total de la venta.....	»	2736

y haciendo ahora la distribución del líquido de la operación hallaremos para los respectivos precios líquidos de la venta

Raso, (2736 : 3368)12 = 9'75 pesetas
Lienzo, (2736 : 3368)1'90 = 1'54 »
Pana, (2736 : 3368)6'70 = 5'44 »

Si en vez de repartir el líquido hacemos la distribución de los gastos, encontraríamos como tanto por uno de ellos

$$632 : 3368 = 0'1876$$

y luego cada precio estaría hallado por la expresión

$$P \times (1 - 0'1876) = P \times 0'8124$$

en la que el factor numérico es el resultado de la división indicada entre paréntesis al hacer la distribución del líquido total, luego el resultado habría de ser el mismo.

EJERCICIOS *números* **1192; 1199; CCCI** y todos los indicados para líquido de la venta.

451.—Relaciones entre precios de coste y venta.— La diferencia que necesariamente debe existir entre las dos clases de precios crea entre ellos dos especies de relaciones que respectivamente se refieren al tanto de aumento o disminución percentual de uno sobre otro, y al cálculo de uno de ellos en función del otro y de ese aumento o disminución.

La primera de estas dos relaciones es la llamada de ganancia o pérdida relativa que por ser idéntica en toda clase de compraventas, tanto de mercaderías como de valores, capitales, etc., tratamos en el párrafo **15** al que remitimos al lector.

La segunda relación también es igual en el comercio de mercaderías y en los de cualquier otra clase, por cuyo motivo se estudió también con carácter general en los párrafos **16** y **20** que en todo son aplicables al caso actual ahorrándonos de nuevo estudio.

EJERCICIOS, todos los indicados en los párrafos antes citados y además los números **1202; 1209; 1211; 1220; 1223** al **1228; 1230; 1436; CCLVI; CCLVII; CCXCII** al **CCXCIV** y **CCCII** al **CCCV.**

PROBLEMA sobre estas cuestiones, el número **CCLVIII.**

XLVII

COMERCIOS ESPECIALES

452. –Mercados de oro y plata.—Los metales preciosos (**134**) son objeto de comercio como mercancías cualesquiera, o bien como monedas, pudiendo por estas dos formas ser consideradas dos clases de mercados.

Cuando el comercio de los metales preciosos se limita a las monedas nacionales y extranjeras, constituye lo que en otro lugar llamamos cambio manual (**352**) y es ejercido en todas las ciudades importantes por las casas de cambio y por los Bancos como operación secundaria de éstos. Consiste en la entrega de una clase de monedas por otra de especie diferente a un precio determinado por la situación general del mercado de cambio trayecticio por un lado, y por la de los grandes mercados de metales preciosos por otro.

Estos grandes mercados de metales preciosos hacen principalmente sus operaciones comprando y vendiendo pastas metálicas y monedas de los diferentes países, si bien estas últimas son en mucho menor cantidad. Los mercados a que nos referimos deben ser distinguidos en mercados *de origen*, que son los de los lugares de producción de los metales, y mercados *reguladores* en los que se hacen las adquisiciones por los consumidores de metal.

Los mercados de origen son en el comercio de metales preciosos en absoluto idénticos a los de cualquier otra mercancía, por lo que no hemos de considerarlos especialmente; pero los mercados que llamamos reguladores tienen una importancia transcendental porque de sus precios dependen los de las demás mercancías en no pequeña parte y en relación al

precio del oro también se limitan las oscilaciones del cambio trayecticio (**362**). El mercado verdaderamente regulador del oro y la plata es la plaza de Londres, a la que siguen en importancia Nueva York y París, ya ésta última con gran pérdida de su importancia anterior, y además pueden incluirse en este grupo los mercados particulares de los diferentes países para operaciones interiores.

La unidad de medida de estas mercancías es siempre la unidad de peso en metal completamente puro; pero en la práctica, tanto en monedas como en barras, contienen otro metal de bajo precio, y la cantidad de metal precioso está expresada por la relación que en otro lugar (**136**) llamamos ley, por lo cual el comercio de estos metales se hace a base de la unidad de peso para ley previamente determinada o para metal completamente puro, aunque en el primer caso es también una cantidad de metal fino la que sirve de base a la medida y en consecuencia a los precios.

Los metales preciosos se presentan en el mercado en forma de barras, lingotes, monedas o polvo para el oro; y sólo en barras o monedas para la plata, siendo las formas más importantes de cotización las que se detallan en la *tabla* **XL.**

453.—Gastos especiales.—El comercio de metales preciosos origina gastos en todo semejantes a los de cualquier clase de mercancías y que ya son conocidos (**421**), si bien algunos como los de embalaje y seguro adquieren una importancia mucho mayor por el especial acondicionamiento y cuidados que exige el transporte de numerario. Además son gastos especiales de este comercio los siguientes:

Ensayo, que consiste en la prueba de pureza de los lingotes y barras para determinar la ley. La tarifa de estos gastos es en Inglaterra de 4s 6d para el oro por lingote de 204 onzas como máximo, y 1s 6d para la plata.

Fundición, que es necesaria para afinar o rebajar la ley, cuya tarifa inglesa es de $^1/_4$d por onza para el oro y de 12s 6d por mil onzas para la plata.

Afinación, que es la mejora de la ley, cuyos derechos son en Londres de 5s 6d por libra troy de oro fino contenido en el lingote afinado, y de 10'25d por onza de plata.

Valor del cobre. Este gasto no suele ser considerado en los cálculos porque la costumbre generalmente admitida por las casas que se dedican a este comercio es el despreciarlo cuando la ley es de 0'900 o superior a ésta, pero también esa misma costumbre calcula el cobre, cuando las leyes son bajas, al precio de mercado de este metal, por cuyo motivo es preciso tenerle en cuenta en estos casos de ley baja.

454.—Cálculo del importe de compra.—La importancia del comercio de metales preciosos, y su relación con el cambio extranjero (**362**) hace que sean de suma utilidad el hallar el importe de una compra o venta en cualquier mercado, por lo cual hemos de deducir fórmulas generales para este primer elemento del costo y producto (**436**) aunque este cálculo puede hacerse por la expresión que se emplea para cualquier mercancía (**425**), siempre, claro está, teniendo cuidado de que al igual que allí las unidades de medida de la mercancía y aquellas a que el precio se refiere, estén expresadas en la misma clase de unidades, pues que si no lo estuvieran sería necesario ante todo la transformación correspondiente.

En el caso de metales preciosos las unidades de peso a que se refieren las cotizaciones son el kilogramo y la onza troy, siendo por consiguiente necesario reducir los kilos de las barras a onzas o viceversa por la equivalencia de 31'103496 gramos por cada onza troy.

En estas condiciones, para determinar la expresión especial para los metales preciosos teniendo presente que su medida está expresada por los dos elementos peso bruto y ley, representaremos por l_m la ley de las monedas o lingotes que se compran o venden, por P_m el peso de los mismos reducido a la unidad cotizada (kilo u onza), por l_c la ley de la cotización cuando no se hace ésta al fino, por C_m la cotización o precio del mercado que es el verdadero precio variable de una vez a otra, por C_t la cotización de tarifa, es decir el número de monedas que constituyen la paridad de la cotización, por P_c el peso de cotización y por t el tanto por uno de prima en las cotizaciones que así se hacen, con lo cual el valor de compra V cuando la cotización se haga por unidad de peso fino será

$$V = P_m l_m C_m \qquad [1]$$

y si lo es por unidad de peso aleado, este resultado sería

$$V = \frac{P_m l_m C_m}{l_c} \qquad [2]$$

ya que es l_c el número de unidades a que el precio se refiere.

Cuando la cotización no se refiere a la unidad de peso, como sucede en la India y Estados Unidos, la fórmula anterior se convierte en

$$V = \frac{P_m l_m C_m}{l_c P_c} \qquad [3]$$

y si esa cotización se expresa por un tanto de prima o demérito sobre la tarifa, entonces el precio C_m será $C_t(1 \pm t)$ y la expresión del valor de compra resulta

$$V = \frac{P_m l_m C_t(1 \pm t)}{l_c P_c} \qquad [4]$$

fórmula general aplicable a cualquier mercado o cotización, aún para las que son especiales las tres expresiones anteriores, toda vez que esas van resultando de hacer cero en la última el término t e iguales a la unidad los dos factores del denominador.

Ejemplos: 1). Se han comprado en Londres 20 kilos de oro aleado a la ley de 0'9482 al precio de 92s3d. Determinar el importe de esta compra.

Los valores especiales de los elementos de cálculo según la última fórmula para este caso especial serán:

$$P_m = 20000; \quad l_m = 0'9482; \quad C_m = C_t = 92'25; \quad l_c = 1;$$
$$P_c = 31'103496, \quad t = 0$$

con lo cual resulta para el valor pedido

$$V = \frac{20000 \times 0'9482 \times 92'25}{31'103496} = 56245'41 \text{ chelines},$$

para cuyo cálculo hemos expresado en gramos el peso de los lingotes y el de la base de cotización que ya dijimos era la onza troy. Reduciendo el resultado al número complejo correspondiente, el valor de compra será:

Ltg. 2812 — 5 — 5

El mismo resultado habríamos obtenido mediante la aplicación de la fórmula [1] después de reducir a onzas troy el peso del oro de la operación.

2) Determinar el valor que se obtendrá por la venta en Nueva York, de

un lingote de oro de 216'750 onzas a la ley de 0'914 si la cotización en este mercado es de 2 °/oo de prima.

Para aplicar la fórmula [4] tenemos los siguientes valores

$P_m = 216'750$; $I_m = 0'914$; $C_t = 800$; $I_c = 0'900$; $P_c = 45$; $I = 0'002$

lo que da por resultado

$$V = \frac{216'75 \times 0'914 \times 800\ (1 + 0'002)}{0'900 \times 45} = 4103'477 \text{ dólares}$$

EJERCICIOS *números* **1287**; **1289**; **1290**; **CCLIX** al **CCLXI**.

455.—Costo y líquido producto de los metales preciosos.—Los elementos determinativos de estos valores en los metales preciosos son iguales a los de cualquier otra mercancía, y por consiguiente, la diversidad de circunstancias en que interviene cada uno de los gastos ya hemos visto que no permite dar norma fija de carácter general, si no es la de que los diferentes gastos se han de sumar al importe de la compra o restar de la venta, y como por otra parte estos cálculos se hacen en la práctica a la vez que se redactan los documentos que detallan esos gastos y después es preciso detallar el importe de cada gasto por separado en las cuentas de compra o venta, el cálculo global sólo tendria aplicación en las operaciones simuladas cuales son las de arbitrajes, y ya veremos también que en tales casos tampoco es útil el procedimiento de fórmulas generales, tanto porque éstas son inexactas en la gran mayoría de los casos, cuanto porque el procedimiento gráfico suple con inmensa ventaja a la economía de tiempo que pudieran proporcionar las fórmulas generales.

Remitimos, por tanto, al lector a lo que tenemos dicho respecto a cuentas de costo y venta (**437**).

EJERCICIOS *números* **1288**; **1291** al **1296**; **1302** y **CCLXII** al **CCLXVII**.

PROBLEMAS combinados con cuestiones anteriores, los *números* **1420**; **1445**; **1460**; **CCLXVIII** y **CCCVII**.

456.—Relación entre el oro y la plata.—En el estudio de las monedas vimos que la relación entre el oro y la plata en cada sistema monetario era constante, y entonces hicimos advertir (**162**) que esa relación legal era distinta de la que en realidad resultaba para los dos metales preciosos en cuanto son mercancías.

Esta relación que entonces llamamos comercial es de la que ahora hemos de ocuparnos, empleando para ello la fórmula general de compra de los metales, y como dicha fórmula sirve lo mismo para el oro que para la plata, representaremos los elementos de cálculo que se refieran al metal blanco por las mismas letras con acento y tendremos que esa relación estará dada por la expresión

$$\frac{P_m l_m C_t(1 \pm t)}{l_c P_c} \div \frac{P'_m l'_m C'_t(1 \pm t')}{l'_c P'_c} = \frac{P_m l_m C_t(1 \pm t) l'_c P'_c}{P'_m l'_m C'_t(1 \pm t') l_c P_c}$$

en la que indudablemente han de ser iguales a la unidad las leyes y pesos de los lingotes que se consideran comprados o vendidos, por lo que la fórmula se convierte en

$$R = \frac{C_t(1 \pm t) l'_c P'_c}{C'_t(1 \pm t') l_c P_c}$$

Ejemplo: Determinar la relación entre el oro y la plata en el mercado de Nueva York, a 2 °/oo prima para el oro y 93 centavos para plata.

Los valores que tienen los distintos elementos de cálculo son:

$$C_t = 800; \quad C'_t = C'_c; \quad l'_c = 1; \quad P'_c = 1; \quad t = t;$$
$$l_c = 0{\cdot}900; \quad P_c = 43; \quad t' = 0$$

con lo que obtendremos por expresión especial de este mercado

$$R = \frac{800\,(1 \pm t)}{C'_c \times 0{\cdot}9 \times 43}$$

y con ello la relación sería:

$$R = \frac{800 \times 1{\cdot}002}{0{\cdot}93 \times 0{\cdot}900 \times 43} = 22{\cdot}272$$

o sea que el oro vale 22'272 veces más que la plata.

EJERCICIOS *números* **1297** al **1301.**

457.—Comercio de piedras preciosas.—En la compra-venta de mercaderías en general hemos visto que el valor es proporcional a las unidades de medida que expresan la cantidad de mercaderías compradas o vendidas; pero no sucede lo mismo cuando se compran o venden piedras preciosas porque siendo éstas conjuntos indivisibles, tiene cada una un valor propio, y aunque ésto destruye la proporcionalidad entre la medida de las piedras preciosas y su valor, el comercio de joyería ha establecido una ley general de aumento de valor en

relación con el aumento del número que expresa su medida. Esta ley para los diamantes cuyo peso sea superior al quilate es la de que *el valor ha de ser proporcional al cuadrado de su peso*, por lo que si representamos por V el valor del diamante, P el precio de la unidad y N el número de quilates de peso, la relación fundamental que expresa el valor será:

$$V = PN^2$$

y de ésta deducimos para los otros dos elementos de cálculo

$$P = \frac{V}{N^2}; \qquad \text{y} \qquad N = \sqrt{\frac{V}{P}}$$

Además si el precio se refiere al quilate de diamante en bruto y el que se compra o vende está tallado, como en la talla se calcula que pierde aproximadamente la mitad de su peso, pero no disminuye el valor, entonces resulta

$$V = P(2N)^2 = 4PN^2$$

$$P = \frac{V}{4N^2} \qquad N = \sqrt{\frac{V}{4P}}$$

Ejemplos: 1). ¿Cuánto pagaremos por un diamante tallado de 8 quilates de peso si el precio es de 175 pesetas el quilate en bruto?

Hemos de servirnos de la última expresión del valor con los elementos

$$P = 175 \qquad N = 8$$

lo que da por resultado

$$V = 4 \times 175 \times 8^2 = 4 \times 175 \times 64 = 44800 \text{ pesetas.}$$

2). Determinar el peso que corresponde a un diamante por el que se han pagado 6000 pesetas siendo el precio del quilate de 125 pesetas.

Los valores especiales para el cálculo son

$$V = 6000 \qquad P = 125$$

con lo cual obtendremos por resultado

$$P = \sqrt{6000 : 125} = \sqrt{48} = 6'928 \text{ quilates.}$$

EJERCICIOS *números* **1259** al **1262.**



XLVIII

MEZCLAS Y ALEACIONES

458.—Mezclas de mercancías; su objeto.—La mezcla es la unión de varias calidades de la misma mercancía o de mercancías diferentes, siendo en este último caso físicamente afines, con objeto de obtener mercancías de calidades intermedias a las que sirven a la mezcla.

Las mercancías han de ser físicamente homogéneas, aunque no precisa que la homogeneidad exista comercialmente, puesto que se mezclan artículos de usos técnicos diversos; pero esa homogeneidad física ha de ser tal que no altere esencialmente las cualidades de las sustancias mezcladas, porque si existe esa alteración se tendría un producto diferente que no merece el nombre de mezcla, constituyendo la operación una fabricación de producto nuevo.

Las razones por las cuales se hace la mezcla artificial, pueden ser en extremo variadas, pues unas veces se reunen diversas calidades de la misma mercancía, para que la mezcla tenga ciertas características que la hagan más aceptable al consumo, o más propias para los usos a que se destine; y otras veces se unen a una mercancía otras de calidad bastante inferior y de difícil conocimiento en la mezcla con el examen rápido, para así poder competir en precios para la calidad alta de las mercancías mezcladas, y por fin otras veces se hace la mezcla para obtener una calidad intermedia que no se encuentra disponible para el vendedor y que es solicitada por algún comprador.

459.—Cálculos que originan las mezclas.—Son ele-

mentos del cálculo en las cuestiones de mezclas las cantidades y valores de las sustancias mezcladas y la cantidad y valor que resulta en la mezcla; pero siendo a la vez elementos del valor de una mercancía la cantidad y el precio, resulta que tenemos como elementos del cálculo las cantidades mezcladas, los precios de las sustancias de la mezcla y el precio de la mezcla resultante, a las cuales añadiremos la cantidad total de la mezcla, porque aun siendo igual a la suma de las cantidades parciales ha de ser necesario considerarla en algunos casos.

Resulta, pues, como problemas de las mezclas los tres siguientes en razón al elemento de cálculo que haya de ser incógnita; 1.°, determinar el precio de la mezcla conociendo las cantidades mezcladas y sus precios respectivos; 2.°, hallar las cantidades a mezclar cuando se conocen los precios de las susceptibles de mezcla y el que haya de tener el resultado, y 3.°, determinar los precios de las mercancías mezcladas cuando se conozca el de la mezcla y las cantidades que entran en la composición. De estos casos se llama *directo* al primero y se denominan *inversos* los otros dos, siendo el último casi completamente innecesario en la práctica.

La resolución de los problemas de mezclas se conoce en los estudios matemáticos con el nombre de *regla de aligación*, la que se divide generalmente en directa e inversa atendiendo al caso a que corresponde de los anteriormente indicados.

460.—Relación fundamental de las mezclas.—Para hallar esta relación hemos de tener presente que si representamos por $C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_s$, las cantidades mezcladas, por $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_s$, los precios de las mismas y por P_m el que resulta para la mezcla, siendo ΣC_s la suma de las cantidades mezcladas, que repetimos será la cantidad de la mezcla, resulta que el valor de ésta ha de ser el total de las mercancías mezcladas, o sea

$$C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + \ldots\ldots + C_sP_s = \Sigma C_sP_s$$

y como por otra parte este valor ha de ser también el que tenga la mezcla según el precio que corresponde a la sustancia resultante, y este valor es

$$P_m \times \Sigma C_s$$

igualando ambos resultados se tiene

$$\Sigma C_s P_s = P_m \Sigma C_s$$

y si ahora tenemos en cuenta que para que la igualdad anterior sea posible es indispensable que P_m esté comprendido entre el mayor y el menor de los precios de las sustancias mezcladas, podemos establecer un pequeño cambio en la expresión, separando las cantidades mezcladas que tengan precio superior al que ha de corresponder a la mezcla, de aquéllas que le tengan inferior, y conservando la notación anterior para las de precio superior, representaremos por C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}, ... C_i y P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, ... P_i, las cantidades y precios de aquellas mercancías que tengan precios inferiores al que resultará para la mezcla, con lo cual tenemos para valor de todas las cantidades mezcladas

$$\Sigma C_s P_s + \Sigma C_i P_i$$

y para valor de la mezcla según el precio que la corresponde

$$P_m \Sigma C_s + P_m \Sigma C_i = P_m(\Sigma C_s + \Sigma C_i)$$

lo que da para *expresión general de los problemas de mezclas*

$$\Sigma C_s P_s + \Sigma C_i P_i = P_m(\Sigma C_s + \Sigma C_i)$$

de la que deduciremos el valor que corresponda a la incógnita de cada caso de los antes anunciados.

461.—Precio de la mezcla.—Considerando como incógnita P_m en la igualdad anterior resulta

$$P_m = \frac{\Sigma C_s P_s + \Sigma C_i P_i}{\Sigma C_s + \Sigma C_i}$$

lo que expresaremos diciendo que *el precio de la mezcla es igual a la suma de los productos de cada cantidad por su precio, dividida por la suma de las cantidades mezcladas, constituyendo, por consiguiente, un caso especial de los promedios ponderados* (**33**),

Ejemplo: Se han mezclado 60 Qm. de trigo de 44'25 pesetas con 75 Qm de otro cuyo precio es de 46 pesetas y con otro de 46'50 pesetas del que se echan en la mezcla 30 Qm. Determinar el precio a que resulta la mezcla.

La resolución del problema con la disposición que conviene darle en la práctica será la siguiente:

60	quintales a	44'25	ptas. valen	60 × 44'25	= 2655	—	Ptas.
75	»	46	» »	75 × 46	= 3450	—	»
30	»	46'50	» »	30 × 46'50	= 1395	—	»
165	quintales.....		valen		7500	—	»

de donde resulta para el precio buscado

$$P_m = 7500 : 165 = 45'45 \text{ pesetas.}$$

462.—Precios medios.—La resolución del primer caso de las mezclas constituye un aspecto de los problemas de precios medios. Consisten éstos en determinar el precio de costo a que resultan compradas unas mercancías cuando han sido adquiridas de varias veces o en lugares diferentes; en cuyo caso también nos encontramos con que el valor que corresponde al total de mercancías compradas según los respectivos precios de costo ha de ser igual al que tenga ese total de mercancías con arreglo al precio medio calculado, siendo ésto igual al fundamento de los problemas de mezclas, con lo cual resulta la identidad de este problema con el anterior, adoptando la denominación de precio medio para el de la mezcla tanto para indicar esa identidad de problemas como por ser la forma en que suele designarse.

Estos precios medios son también idénticos al cambio medio que estudiamos en otro lugar (**371**).

Ejemplo: Se han comprado 125 kilos de canela Ceylán a 8'80 pesetas, 74 kilos a 9'75 ptas., y 140 kilos a 8'40 ptas. Determinar el precio medio de las tres compras.

Con la misma disposición que antes, tenemos:

125	kilos a	8'80	ptas.....	Ptas.	1100 —
74	» a	9'75	»	»	721'50
140	» a	8'40	»	»	1176 —
339	kilos.....			»	2997'50

y el precio medio será:

$$P_m = 2997'50 : 339 = 8'842 \text{ pesetas.}$$

463.—Precio de mezclas con gastos en ellas.—Cuando para hacer la mezcla se originan gastos, es indudable que aumentan el valor de la mezcla sin que varíe el valor parcial de cada una de las cantidades, por lo que llamando G al importe de estos gastos ha de suceder forzosamente

$$P_m(\Sigma C_s + \Sigma C_i) = \Sigma C_s P_s + \Sigma C_i P_i + G$$

y en tal caso el valor del precio medio será:

$$P_m = \frac{\Sigma C_s P_s + \Sigma C_i P_i + G}{\Sigma C_s + \Sigma C_i}$$

luego, *el precio medio de una mezcla con gastos es igual a la suma de los valores de las cantidades mezcladas y los gastos, dividida por la suma de dichas cantidades.*

Ejemplo: Si en el caso anterior se hubieran originado desembolsos por valor de 475 pesetas, el precio medio de las compras sería:

$$P_m = \frac{2997'50 + 475}{339} = 10'245 \text{ pesetas.}$$

464.—Casos de igualdad de cantidades mezcladas. —En este caso tendremos:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_s = C_{i1} = C_{i2} = C_{i3} = \ldots = C_i = C$$

si llamamos C a esa cantidad que se mezcla de todas las clases, por lo que sacando factor común esta cantidad resulta el valor de todas las clases mezcladas

$$C(\Sigma P_s + \Sigma P_i)$$

y la cantidad de la mezcla será indudablemente

$$C(s + i)$$

y aplicando la operación de dividir para hallar el precio de una unidad cuando se conoce el de varias, se tiene

$$P_m = \frac{C(\Sigma P_s + \Sigma P_i)}{C(s + i)} = \frac{\Sigma P_s + \Sigma P_i}{s + i}$$

igualdad a la que llegamos directamente por simplificación de la general del precio mezclado (**460**) y que nos dice que *en el caso de ser iguales todas las cantidades mezcladas*, o cuando no se tienen en cuenta para determinar precios medios, *el precio a que resulta la mezcla es el cociente de la suma de los precios por el número de sustancias mezcladas.*

Ejemplo: La cotización de las lanas en Barcelona durante el mes de agosto de 1924 ha sido por semanas de 16'50 pesetas kilo, 15'90 ptas., 16'55 pesetas, 15'70 ptas., y 16'15 ptas. Determinar la cotización media del mes.

Por tratarse de un caso en que no se tiene en cuenta las cantidades de mercancías que han podido negociarse en el mercado, es lo mismo que si se hubiesen mezclado para fabricar estambre lanas de todos esos precios por cantidades iguales, y en virtud de lo anterior será cotización media,

$$P_m = \frac{16'50 + 15'90 + 16'35 + 15'70 + 16'15}{5} = 16'12 \text{ Ptas.}$$

465.—Bases de proporcionalidad en las cantidades mezcladas.—Cuando se desconocen las verdaderas cantidades que componen la mezcla, pero se sabe cuáles son los números a que son proporcionales dichas cantidades, podemos descomponer la mezcla en tantas parciales como queremos, todas compuestas por los números básicos de la proporcionalidad, y claro está que el valor de cada una de las mezclas resultantes ha de ser igual al de todas las demás, y a la vez formada por las mismas cantidades, luego el precio a que resulta una mezcla cualquiera es el mismo para todas las parciales, y además el mismo para la total, porque de otro modo no sería homogénea como hemos supuesto ha de ser, luego basta que determinemos el precio de una de dichas mezclas parciales para tener el que se busca.

Ahora bien: si las cantidades C_s y las C_i han de ser directamente proporcionales (*) a los números B_1, B_2, B_3, ... B_s, B_{s+1} ..... B_{s+i}, se tendrá:

$$\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2} = \frac{C_3}{B_3} = \ldots\ldots = \frac{C_s}{B_s} = \frac{C_{i1}}{B_{s+1}} = \frac{C_{i2}}{B_{s+2}} = \frac{C_{i3}}{B_{s+3}} = \ldots\ldots = \frac{C_i}{B_{s+i}}$$

y hallando los valores de esas cantidades en función de una cualquiera de ellas, C_1 por ejemplo, tenemos:

$$C_1 = \frac{C_1 B_1}{B_1};\ C_2 = \frac{C_1 B_2}{B_1};\ \ldots\ldots\ C_s = \frac{C_1 B_s}{B_1};$$

$$C_{i1} = \frac{C_1 B_{s+1}}{B_1};\ \ldots\ldots C_i = \frac{C_1 B_{s+i}}{B_1}$$

lo que expresaremos en forma de producto y será

$$C_1 = \frac{C_1}{B_1} B_1;\ C_2 = \frac{C_1}{B_1} B_2;\quad \ldots C_s = \frac{C_1}{B_1} B_s;$$

$$C_{i1} = \frac{C_1}{B_1} B_{s+1};\ \ldots\ldots\ C_i = \frac{C_1}{B_1} B_{s+i}$$

Considerando ahora estos valores de las cantidades mezcladas, el valor de la mezcla ha de ser

(*) Si la proporcionalidad fuera inversa ya sabemos que es equivalente a la directa **(41)** considerando números básicos inversos a los propuestos.

$$\frac{C_1}{B_1}\left(\sum_{\substack{n=1\\s=1}}^{\substack{n=s\\s=s}} B_n P_s + \sum_{\substack{n=s+1\\i=1}}^{\substack{n=s+i\\i=i}} B_n P\right)$$

por tener todas las cantidades el factor común $\frac{C_1}{B_1}$, y por la misma razón la suma de las cantidades mezcladas será

$$\frac{C_1}{B_1}(\Sigma B_n)$$

y el precio medio de la mezcla total en este caso es

$$P_m = \frac{\dfrac{C_1}{B_1}\left(\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\s=1}}^{\substack{n=s\\s=s}} B_n P_s + \sum_{\substack{n=s+1\\i=1}}^{\substack{n=s+i\\i=i}} B_n P_i\right)}{\dfrac{C_1}{B_1}\left(\displaystyle\sum_{1}^{s+i} B_n\right)}$$

que por simplificación se convierte en

$$P_m = \frac{\displaystyle\sum_{1}^{s} B_n P_s + \sum_{s+1}^{s+i} B_n P_i}{\displaystyle\sum_{1}^{s+i} B_n}$$

y como esta expresión es independiente del importe de las cantidades mezcladas, siendo función solo de los números básicos de la proporcionalidad, vemos que éstos han sustituído a aquéllas, y que por consiguiente, *cuando en vez de las cantidades mezcladas se conocen los números que indican su valor relativo, se opera con éstos como si fueran las verdaderas cantidades.*

Ejemplo: Hallar el precio de una mezcla de café de 7'50 pesetas con otro de 6'95, otro de 7'15 y otro de 7'10 pesetas kilo, si de la primera cantidad ha de entrar en la mezcla doble que de la segunda, de la tercera tanto como de las dos anteriores y de la última igual que de las otras tres juntas.

Para determinar los números relativos o proporcionales de las clases que componen la mezcla supondremos que de la segunda clase se echa 1 kilo, con lo cual esos números relativos serán respectivamente:

$$1 \times 2 = 2; \qquad 1; \qquad 2 + 1 = 3; \qquad \text{y} \qquad 2 + 1 + 3 = 6$$

y la solución pedida se encontrará en la forma siguiente:

2	kilos	de 7'30 ptas.	.....	Ptas.	14'60
1	»	de 6'95 »	.....	»	6'95
3	»	de 7'15 »	.....	»	21'45
6	»	de 7'10 »	.....	»	42'60
12	kilos	.....	.....	Ptas.	85'60

lo que da para valor del precio medio buscado:

$$P_m = 85'60 : 12 = 7'133 \text{ pesetas.}$$

466.—Mezclas con sustancias de valor nulo y con gastos. En algunas mezclas puede suceder que una o varias de las sustancias mezcladas sean de tan fácil adquisición que su precio sea nulo, como sucedería, por ejemplo, al mezclar varios líquidos en que uno sea el agua, pues aunque este producto tiene valor, es tan insignificante su precio que no ofrece variación sensible en el valor de las mercancías a que se mezcla y en tal caso claro está que el producto de la cantidad de esa mercancía por su precio respectivo ha de ser cero, pero en nada variará el procedimiento de resolución, ya que no hemos establecido límites de valor a los precios siendo por tanto aplicable la fórmula general encontrada.

Cuando en alguna otra mezcla sea preciso hacer algunos gastos o desembolsos para conseguir la nueva calidad, (lo cual es una variación del caso de fabricación) también son aplicables las condiciones y fórmulas anteriores sin más que añadir esos gastos al valor de las sustancias mezcladas como otra nueva cantidad que no influye sobre las unidades que resultan para medida de la mezcla.

Ejemplo: Si en el último resultado consideramos que se pagan 9'45 pesetas para obtener la mezcla tendríamos:

Valor de los 12 kilos de la mezcla

$$85'60 + 9'45 = 95'05 \text{ pesetas.}$$

siendo el precio medio que así resulta

$$P_m = 95'05 : 12 = 7'92 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS sobre precios medios y de mezclas, los *números* **1231** al **1242**; **CCLXIX** el **CCLXXIV**.

PROBLEMAS combinados con cuestiones anteriores, los *números* **1425**; **1433**; **CCLXXV** y **CCLXXVI**.

467.—Cantidades a mezclar; condición general.—Si en la expresión general (**460**) pasamos todas las cantidades al primer miembro y hacemos la operación indicada en el segundo tenemos:

$$\Sigma C_s P_s + \Sigma C_i P_i - P_m \Sigma C_s - P_m \Sigma C_i = 0 \qquad [1]$$

en la que podemos sacar factor común las cantidades de mercancías mezcladas y tendremos:

$$\sum_{s=1}^{s=s} C_s(P_s - P_m) + \sum_{i=1}^{i=i} C_i(P_i - P_m) = 0 \qquad [2]$$

ecuación que contiene $s + i$ incógnitas, y que por consiguiente constituye un problema indeterminado con infinito número de soluciones.

Es, pues, indispensable establecer condiciones supletorias que permitan resolver la ecuación, y faciliten hallar una primera solución con el menor número posible de cantidades arbitrarias, distinguiendo los casos siguientes, como resolución práctica de este problema indeterminado.

468.—Cantidades con igualdad relativa.—Si sin dejar de ser varias las calidades de la mezcla ponemos la condición de que las cantidades de los precios mayores que el precio medio sean iguales entre sí y que también lo sean las cantidades de precios inferiores, es decir, que sea

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots\ldots = C_s = C$$
$$C_{i1} = C_{i2} = C_{i3} = \ldots\ldots = C_i = C'$$

entonces la ecuación se convierte en una de estas dos

$$C(\Sigma P_s - sP_m) + C'(\Sigma P_i - iP_m) = 0 \qquad [3]$$
$$C(\Sigma P_s - sP_m) = C'(iP_m - \Sigma P_i) \qquad [4]$$

que podemos escribir en forma de proporción teniendo

$$\frac{C}{C'} = \frac{iP_m - \Sigma P_i}{\Sigma P_s - sP_m}$$

Esta última igualdad quedará satisfecha haciendo

$$a) \begin{cases} C = (iP_m - \Sigma P_i)k \\ C' = (\Sigma P_s - sP_m)k \end{cases}$$

las que indudablemente son soluciones del problema, y además todas las soluciones posibles dando a k todos los valores imaginables. Para el caso de ser $k = 1$ se tiene

$$b) \begin{cases} C = iP_m - \Sigma P_i \\ C' = \Sigma P_s - sP_m \end{cases}$$

con arreglo a la que podemos establecer que *en el caso en que sean iguales todas las cantidades a mezclar de valor mayor que el precio medio e iguales también todas las de valor inferior al mismo, la cantidad a mezclar de cada especie inferior se halla restando de la suma de precios superiores el precio medio tantas veces como clases superiores haya, y la cantidad de cada especie superior se hallará restando del producto del precio medio por el número de clases inferiores, la suma de los precios inferiores.*

Ejemplo: Con las condiciones de igualdad expresadas determinar las cantidades a mezclar de mercancías cuyos precios son 48; 47; 45; 38 y 35 pesetas, y el precio a que ha de resultar la mezcla sea pesetas 40.

Los valores con que han de hacerse los cálculos son:

$\Sigma P_s = 48 + 47 + 45 = 140$; $P_m = 40$; $\Sigma P_i = 38 + 35 = 73$; $s = 3$; $i = 2$;

teniendo para valores de las incógnitas

$$C' = 140 - (40 \times 3) = 20; \qquad \text{y} \qquad C = (40 \times 2) - 73 = 7$$

con cuyos valores haremos la prueba siguiente:

7 unidades de precio	48 ptas.	....	Pesetas	336 —
7 »	»	47 »	....	»	329 —
7 »	»	45 »	....	»	315 —
20 »	»	38 »	....	»	760 —
20 »	»	35 »	....	»	700 —
61 unidades de mezcla al precio de 40 pesetas.					2440 —

469.—Mezcla de dos clases de mercancías.—Si en vez de ser cualesquiera el número de especies mezcladas consideramos que se tenga

$$s = i = 1$$

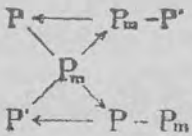
o lo que es lo mismo, que sean dos las cantidades a mezclar, las fórmulas anteriores de las soluciones se convierten en

$$a) \begin{cases} C = (P_m - P_i)k \\ C' = (P_s - P_m)k \end{cases} \qquad b) \begin{cases} C = P_m - P_i \\ C' = P_s - P_m \end{cases}$$

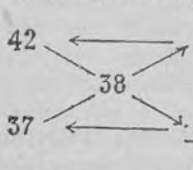
las cuales divididas dentro de cada grupo miembro a miembro,

constituyen una proporción, según la que *las cantidades a mezclar han de ser inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios y el de la mezcla*.

Para dar idea del método a seguir en el cálculo y de las condiciones de las primeras soluciones, se disponen los datos por *diferencia en cruz* como sigue:



Ejemplo: Se desea obtener harina da 38 pesetas los 100 kilos de otras de 42 y de 37 pesetas. Determinar las bases de proporcionalidad de la mezcla.



PRUEBA

a 42 ptas. = ptas. 42 —

a 37 » = » 148 —

a 38 » 5 × 38 = » 190 —

470. – Mezcla de más de dos clases de mercancías.— Cuando no se establece la condición anterior de igualdad relativa en las cantidades, se pueden hallar soluciones positivas de la ecuación fundamental, descomponiéndola en ecuaciones binarias que formen un sistema determinado, y en cada una de las cuales haya un término con incógnita de precio superior y otro con incógnita de precio inferior. Las ecuaciones posibles son en número igual a $s \times i$ ya que uno cualquiera de los valores s puede ser puesto como primer miembro con todos los i como segundo.

Desarrollando la ecuación [2] se tiene

$$C_1(P_1 - P_m) + C_2(P_2 - P_m) + \ldots\ldots + C_s(P_s - P_m) + \\ + C_{i1}(P_{i1} - P_m) + \ldots\ldots + C_i(P_i - P_m) = 0$$

y en ella vemos que el número de binarias que pueden resultar es el número antes enunciado $s \times i$, todas de la forma

$$C_s(P_s - P_m) = C_i(P_m - P_i)$$

en las que desde luego es solución el tomar como incógnita el factor binomio del otro miembro, de acuerdo con la solución hallada para la mezcla de dos, y por consiguiente, en todas las

ecuaciones del sistema en conjunto tendríamos tantos valores para cada incógnita como ecuaciones son en las que entra, y como este número es s para las incógnitas C_i, y es i para las incógnitas C_s, y tenemos además que de cada ecuación resulta una mezcla que satisface al enunciado, también satisface al enunciado el tomar de cada clase de mercancías el total de estas soluciones en todas las ecuaciones en que entra la incógnita de la clase, cuyo total es

$$\sum_{s=i}^{s=s}(P_s - P_m)$$

para las incógnitas C_i, y

$$\sum_{i=1}^{i=i}(P_m - P_i)$$

para las incógnitas C_s.

Puede sin embargo simplificarse el cálculo haciendo que en el sistema entre cada incógnita las menos veces posibles, pero sin que deje de figurar *al menos una vez*, porque las condiciones del problema no admiten soluciones nulas. Para que ésto se verifique es indispensable que el número de incógnitas sea por lo menos igual al mayor de los números s o i. Las ecuaciones indispensables, pues, serían

$$\begin{aligned}
C_1(P_1 - P_m) &= C_{i1}(P_m - P_{i1}) \\
C_2(P_2 - P_m) &= P_{i2}(P_m - P_{i2}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_s(P_s - P_m) &= C_{is}(P_m - P_{is}) \\
C_x(P_x - P_m) &= C_{is+1}(P_m - P_{i(s+1)}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_z(P_z - P_m) &= C_i(P_m - P_i)
\end{aligned}$$

en la que siendo mayor el número i, los subíndices x ..... z pueden ser cualquiera de los que antes han intervenido ya en las ecuaciones, y hasta ser todos el mismo, sin que se altere el resultado de la mezcla. Los subíndices repetidos indican también que ha de repetirse en la mezcla la clase de mercancías a que se refieran, y que se mezclará de dicha clase tantas

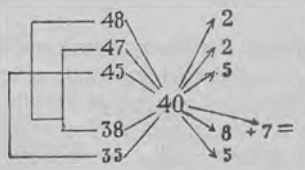
veces como haya sido repetida, y como cada una de esas veces forma mezcla parcial con clase distinta, también interviene por cantidad diferente, por lo que el total mezclado de la clase o clases repetidas será la suma de las cantidades halladas para ella en las soluciones distintas en que interviene.

Una vez conocida la formación de las ecuaciones, podemos dejar sentado que *en el caso en que las mercancías a mezclar sean más de dos, se combinan de dos en dos, resolviendo los problemas parciales que así resultan, y tomando como cantidad a mezclar de cada clase, la suma de las que le correspondan por el número de combinaciones en que haya entrado.*

Ejemplo: Determinar las cantidades a mezclar de las mercancías de 48, 47, 45, 38 y 35 pesetas la unidad para que la mezcla resulte a 40 pesetas.

Este ejemplo es el mismo que resolvimos en el número **468**, si bien ahora no existe la condición de igualdad de cantidades, y como en la regla y condiciones que acabamos de enunciar no está señalado qué clase ha de ser la que se combine con la del precio mayor, sino que puede ser una cualquiera, podemos establecer la correspondencia siguiente: 48 y 38, 45 y 35 y como sobra la clase superior 47 la combinaremos repitiendo una de las inferiores, la 38 por ejemplo.

Disponiendo los datos por diferencia en cruz tenemos el siguiente resultado del problema



PRUEBA

$2 \times 48 = 96$ Ptas.
$2 \times 47 = 94$ »
$5 \times 45 = 225$ »
$15 \times 38 = 570$ »
$5 \times 35 = 175$ »
$29 \times 40 = 1160$ »

También podríamos haber hecho las combinaciones siguientes:

a) ..... 48 y 38; 47 y 35; 45 y 35
b) ..... 48 y 38; 47 y 35; 45 y 38
c) ..... 48 y 35; 47 y 38; 45 y 35
d) ..... 48 y 35; 47 y 38; 45 y 38
e) ..... 48 y 35; 47 y 35; 45 y 38

y en cada uno de estos casos habría sido distinto el resultado.

En general el número de combinaciones de que es susceptible uno de estos problemas es el que se calcula por las fórmulas especiales de la Combinatoria.

Observación. – Aunque la combinación a elegir en este

caso es completamente arbitraria, es frecuente decir que se combina la clase de más precio con la de menos, y así sucesivamente acercándose al precio medio, añadiendo que al terminarse las clases inferiores o superiores ha de hacerse la repetición en ésta o la otra forma; pero como el mismo carácter de indeterminación haría interminables las instrucciones para saber cuáles serán las mercancías de cuya clase se tomarán más combinaciones, o se hará entrar más veces como incógnita, nosotros creemos que ésto es una cuestión de carácter exclusivamente técnico, y que las necesidades del vender tal o cual clase de mercancías mejor que tal otra, aconsejarán al que elija la combinación; siempre con las limitaciones de que no deje de entrar por lo menos una vez cada clase.

471.—Cantidad conocida para el total de la mezcla.—Cuando se conoce la cantidad total de la mezcla, basta dividir ésta en partes directamente proporcionales a las cantidades encontradas como soluciones, pues ya sabemos que las soluciones indican cantidades a las que han de ser proporcionales las verdaderas.

En este caso es determinado el problema si las clases fuesen solamente dos, puesto que siendo más variarían los resultados según la combinación que se haga para encontrar los números básicos.

Ejemplo: Determinar las cantidades de harina que se mezclarían en el caso del ejemplo del núm. **469** si la cantidad total que ha de obtenerse consiste en la necesaria para servir un pedido de 75 sacos de 100 kilos.

Repartiendo este número 75 en partes directamente proporcionales a los números 1 y 4 que entonces se encontraron, tenemos para soluciones

1.ª clase $(75 : 5) \times 1 = 15$ sacos de 100 kilos.
2.ª » $(75 : 5) \times 4 = 60$ » de 100 »

472.—Cantidad conocida de una sola clase.—Debiendo ser las cantidades de cada clase entre sí como son los números hallados como soluciones, basta establecer para cada clase una proporción.

Así si en el ejemplo del número **470** se conociese la cantidad de la clase de más precio y fuese ésto 40 unidades tendríamos para las demás clases:

3.ª — 2 : 5 :: 40 : x; x 100 unidades.
4.ª — 2 : 15 :: 40 : x; x 300 »
5.ª — igual resultado que para la 3.ª no precisando calcular la clase 2.ª por ser también igual a la 1.ª.

473.—Conocimiento de todas las cantidades menos una.—Cuando el número total de clases fuese dos nos hallamos con el caso anterior y si fuesen más de dos las clases de mercancías es necesario que la ecuación que resulta tenga solución positiva, pues el caso de solución negativa sabemos que es contrario a las posibilidades prácticas.

En este caso se tiene una ecuación de primer grado con una incógnita cuya solución nos da el resultado pedido.

EJERCICIOS sobre cantidades a mezclar, los *números* **1243** al **1255; 1257; 1258; CCLXXVII** al **CCLXXXIV.**

474.—Precios de las sustancias mezcladas.—La determinación de los precios de las sustancias mezcladas constituye también la resolución de una ecuación de primer grado con tantas incógnitas como precios haya, según puede apreciarse por la ecuación completa, (**467**, [1]), y por consiguiente, el problema es por completo indeterminado, siendo sólo determinado cuando se desconociera uno sólo de los precios, ya que bajo el punto de vista matemático este segundo problema inverso de las mezclas es idéntico al primero, pero en las necesidades de la vida de negocios nunca es necesario calcular estos precios, ya que también existen otras condiciones supletorias para que el problema resulte posible, como la de que las cantidades satisfagan a ciertas condiciones, y en vista de la gran dificultad y escasa o nula utilidad prescindimos de más detalles.

EJERCICIOS *números* **CCLXXXV** al **CCLXXXVII.**

475.—Variaciones de las leyes de los lingotes.—La variación que se hace en la ley o título de un lingote se conoce con la denominación de *afinación* o *rebaja de la ley*, y consiste en añadir a un lingote otro de título distinto, pudiendo este último tener todos los valores de cero a uno, es decir que lo mismo puede ser metal fino puro, que metal basto.

La variación de leyes de los lingotes es solo un caso especial de las mezclas que antes hemos estudiado, por lo que les son aplicables todas las fórmulas y consideraciones que anteceden, sin más que tomar como precios las leyes de los lingotes; cantidades los pesos de metal aleado, y valores las cantidades de metal fino; pero el último caso de las mezclas, de cálculo de los precios es el que constituye especialmente el problema de variación de leyes, por lo que pasamos a examinarle en el caso práctico de problema determinado de una sola incógnita en mezcla o fundición de dos lingotes.

Para determinar la cantidad que debe agregarse al lingote que haya de afinarse o rebajarse, representaremos por b el peso del lingote dado, cuyo título sea t, y el problema consiste en determinar la cantidad x que ha de agregarse del título t_x para que se tenga el lingote al título t_m. El lingote del que tratamos de variar el título tendrá en metal fino

$$bt$$

y la cantidad agregada contendrá también en metal fino

$$xt_x$$

lo que da para el lingote que resulta un metal fino de

$$bt + xt_x$$

y un peso total aleado de

$$b + x$$

de donde el título t_m de este nuevo lingote ha de ser

$$t_m = \frac{bt + xt_x}{b + x}$$

y despejando el valor de x que es el que decíamos era preciso calcular, encontraremos

$$x = b\frac{t - t_m}{t_m - t_x}$$

para lo cual es indispensable que el nuevo título medio, esté comprendido entre el de los dos lingotes, debiendo ser por tanto $t_x > t_m > t$ o bien $t > t_m > t_x$ sin cuya condición el resultado sería negativo, indicando que en vez de añadir era preciso quitar metal del lingote dado, operación que en la práctica también tiene aplicación y aún se emplea no pocas veces.

La fórmula anterior resulta por consiguiente susceptible de todas las soluciones matemáticas porque todas tienen la correspondiente interpretación en las necesidades del comercio de metales preciosos.

Ejemplo: Determinar la cantidad de oro de 0'925 que se añadirá a un lingote de 600 gramos cuya ley es de 0'670 para que resulte a 0'880.

Los valores especiales de la fórmula en este caso son

$b = 600$, $t = 0'670$, $t_x = 0'925$ $t_m = 0'880$

lo que da un resultado de

$$\frac{600(670 - 880)}{880 - 925} = 2800 \text{ gramos.}$$

En este caso la fracción tiene los dos términos negativos y por consiguiente el resultado ha de ser positivo, habiendo prescindido del carácter fraccionario de las leyes porque el resultado ha de ser el mismo, ya que al prescindir de ese carácter hemos multiplicado por mil los dos términos de la fracción.

Observación.—Es preciso tener muy en cuenta que el carácter positivo del resultado es indicador de añadir metal al lingote, y el resultado negativo expresa que ha de quitarse metal, señalando el título de éste el que sea metal fino si $t_x = 1$; metal basto si es $t_x = 0$, y aleación para cualquier otro valor de t_x intermedio entre los dos anteriores.

EJERCICIOS *números* **1275** al **1286; 1420; CCLXXXVIII** al **CCXCI** y **1448**.

476.—Mezclas de alcoholes.—Estos líquidos no siguen las leyes generales que permitan aplicar las reglas halladas para las mezclas ya que siempre existe en estos casos una contracción que hace variar el grado y el valor o precio de la mezcla, pues si se mezclasen un litro de alcohol absoluto y un litro de agua, debería resultar una mezcla de dos litros con un grado de 50 y no es así, sino que resulta 1'955 litros con un grado de 51'15 y claro está que si el valor del alcohol era de dos pesetas como el agua vale cero, según la regla de las mezclas (**461**) debería valer el litro de la mezcla 1 peseta y así resulta con un valor de 1'023 pesetas que vemos puede ser un error de gran importancia en la mayoría de las operaciones.

477.—Mezcla de alcoholes y agua.—Estas mezclas se hacen con objeto de rebajar la graduación de un alcohol y si no existiese la contracción (**137**) resultaría que por la regla ya conocida (**472**) calcularíamos la cantidad de agua necesaria para que la fuerza de la mezcla fuese la que se desea; pero a causa de esa contracción sólo por experiencias sucesivas podría determinarse la relación que nos diera la cantidad de agua.

Para hacer posibles estos cálculos se han dispuesto tablas como la **XLI** con el resultado de las experiencias, mediante las

cuales basta una sencilla multiplicacion del volumen del líquido alcohólico por el número de la tabla para tener la cantidad de agua que debe añadirse.

Ejemplo: Determinar la cantidad de agua que debe añadirse a 600 litros de alcohol de 80° para rebajar su fuerza a 65°.

El número que encontramos en la tabla es de 0'247 por lo que el resultado pedido ha de ser

$$600 \times 0'247 = 148'20 \text{ litros.}$$

478. – Mezcla de líquidos hidroalcohólicos. —Para determinar la relación en que han de ser mezclados dos líquidos hidroalcohólicos hemos de tener en cuenta que por un lado se rebaja el grado del alcohol superior al grado de la mezcla y por otro se mejora el del alcohol inferior.

Si representamos por V_s el volumen del líquido de fuerza superior, por V_i el volumen del otro líquido mezclado, o sea el de fuerza inferior; por F_s y F_i las fuerzas respectivas de los dos líquidos; y por F_m la fuerza que ha de tener la mezcla, es indudable que al líquido superior le podríamos dar la graduación de la mezcla añadiéndole agua, por lo que si el número de la tabla para esa rebaja es A, el agua que se añadirá es $V_s A$; y para convertir el líquido de fuerza inferior en otro con la fuerza de la mezcla sería preciso quitarle agua, pero la cantidad que se quitaría había de ser precisamente la misma que serviría para la rebaja anterior, única forma de que no sea preciso añadir ni quitar agua. Ahora bien: la cantidad de agua que se quitaría para esa mejora sería la necesaria para que un volumen de V_m líquido con la fuerza de la mezcla se convirtiera en el volumen V_i con la fuerza de la clase inferior, y como siendo a el número de la tabla para esta rebaja la cantidad de agua a mezclar sería $V_m a$; y en virtud de la compensación que debe existir entre las dos cantidades de agua tiene que ser forzosamente

$$A V_s = a V_m$$

Como el alcohol contenido en V_m es igual a $V_m F_m$, el que se contiene en V_i ha de ser $V_i F_i$ y además han de ser iguales las dos cantidades de alcohol, porque resulta la última de añadir agua a la primera; se tiene

$$V_m F_m = V_i F_i$$

y de aquí

$$V_m = \frac{V_i F_i}{F_m}$$

valor que puede ser sustituído en la igualdad del agua que se añadiría y quitaría y tendremos:

$$V_s A = \frac{V_i F_i}{F_m} \times a$$

de donde resulta

$$V_s A F_m = V_i F_i a$$

o sea

$$V_s(AF_m) = V_i(aF_i)$$

expresión que escrita en forma de proporción nos dá:

$$\frac{V_s}{V_i} = \frac{aF_i}{AF_m}$$

y que demuestra que *los volúmenes de líquidos alcohólicos que han de mezclarse para que resulte un líquido de fuerza media prefijada, son inversamente proporcionales a los productos de multiplicar las fuerzas media e inferior por los números que expresan el agua necesaria para rebajar la unidad del líquido del grado superior al medio y de éste al inferior.*

Vemos por consiguiente que la resolución de este problema de mezclas, presenta cierta analogía con el de mercancías en general, siendo también indeterminado, puesto que si bien encontramos dos números que mezclados dan el resultado pedido, igual resultado se obtiene con la mezcla de cualquier múltiplo o submúltiplo de esos números.

Para que el problema sea determinado es necesario conocer una de las cantidades que han de entrar en la mezcla, y según la que se conozca así tendremos para resolución del problema las dos expresiones

$$V_s = \frac{aF_i V_i}{AF_m}; \qquad \text{y} \qquad V_i = \frac{AF_m V_s}{aF_i}$$

Ejemplo: Determinar los litros de alcohol de 60° que han de mezclarse con 400 litros de 85° para que la mezcla resulte a 75°.

Consultando la tabla del agua que debe agregarse tenemos para la resolución del caso los valores

$$V_s = 400; \quad F_m = 75; \quad F_i = 60; \quad A = 0'145; \quad a = 0'265$$

que nos dan para el volumen de líquido inferior

$$V_i = \frac{0'145 \times 75 \times 400}{0'265 \times 60} = 273'58 \text{ litros.}$$

479.—Volumen de la mezcla.—El volumen de un líquido hidroalcohólico cualquiera es igual al cociente de dividir el alcohol puro que contiene por su grado, según la definición que dimos de éste, luego si conociéramos el alcohol puro que contiene una mezcla en las condiciones anteriores, conoceríamos también el volumen resultante, ya que nos es conocido el grado; pero esa cantidad de alcohol ha de ser indudablemente la misma que en conjunto tenían los dos líquidos mezclados, es decir que este alcohol será:

$$V_s F_s + V_i F_i$$

y por consiguiente el volumen de la mezcla resultante

$$V_m = \frac{V_s F_s + V_i F_i}{F_m}$$

Ejemplo: Calcular el volumen de la mezcla del ejemplo anterior.
Con los valores especiales

$$V_s = 400, \quad V_i = 273'58, \quad F_s = 85, \quad F_i = 60, \quad F_m = 75$$

resulta

$$V_m = \frac{400 \times 85 + 273'58 \times 60}{75} = 672'19 \text{ litros}$$

y si consideramos que los volúmenes mezclados fueron 400 y 273'58 veremos que debía resultar un volumen para la mezcla de 673'58 litros y que por consiguiente ha habido una contracción de 1'39 litros.

480.—Fórmulas derivadas.—Por considerar que pueden ser útiles en algunas ocasiones damos a continuación las fórmulas derivadas de las fundamentales que han servido para los cálculos anteriores y tenemos:

1.° *Fórmulas derivadas de la ley de la mezcla.*

$$F_i = \frac{V_s F_m A}{a V_i} \qquad \text{y} \qquad F_m = \frac{a V_i F_i}{A V_m}$$

2.° *Fórmulas derivadas de la del volumen de la mezcla.*

$$V_s = \frac{V_m F_m - V_i F_i}{F_s}; \qquad V_i = \frac{V_m F_m - F_s V_s}{F_i}$$

$$F_m = \frac{V_s F_s + V_i F_i}{V_m}; \quad F_s = \frac{V_m F_m - V_i F_i}{V_s}; \quad F_i = \frac{V_m F_m - V_s F_s}{V_i}$$

481. Precio medio de una mezcla de alcoholes.— Siendo el precio medio el correspondiente a cada unidad del líquido resultante, y expresándose siempre el precio de los alcoholes por unidades de volumen, el precio que ahora tratamos de encontrar será el cociente del valor de los líquidos mezclados por el volumen de la mezcla. El valor lo determinaremos llamando P_s al precio del líquido de grado superior, y P_i al precio del líquido de grado inferior, por la expresión

$$V_s P_s + V_i P_i$$

la que dividida por el volumen de la mezcla (**479**) nos da para el precio medio P_m

$$P_m = (V_s P_s + V_i P_i) : \left(\frac{V_s F_s + V_i F_i}{F_m}\right) = \frac{(V_s P_s + V_i P_i) F_m}{V_s F_s + V_i F_i}$$

Ejemplo: Siendo el precio del alcohol de 85° de 2'15 pesetas el litro y de 1'90 para el alcohol de 60°, determinar el precio a que resulta el litro de alcohol de 75°, de la mezcla de los ejemplos anteriores.

Son los valores especiales

$V_s = 400$, $V_i = 273'58$, $F_s = 85$, $F_i = 60$, $F_m = 75$, $P_s = 2'15$, $P_i = 1'90$

de donde resulta

$$P_m = \frac{(400 \times 2'15 + 273'58 \times 1'90)75}{400 \times 85 + 273'58 \times 60} = 2'052 \text{ pesetas.}$$

Si el precio medio se hallase por la regla general de las mezclas habríamos encontrado 2'048 ptas., por lo que se ve que si en la unidad no tiene importancia práctica en cambio la tiene para los cálculos en que intervenga ese precio.

EJERCICIOS *números* **1263** al **1272.**



XLIX

VALORES MOBILIARIOS

482.—Definición de los valores mobiliarios.—Con el nombre de *valores mobiliarios* se comprenden los *títulos* representativos de las operaciones de crédito a largo plazo.

Recurriendo a la clasificación del crédito (**305**) y a la de los títulos que le representan (**306**), veremos que los valores mobiliarios corresponden a las operaciones en que se tenga la garantía real inmobiliaria o bien la personal de las entidades sociales naturales Estado, Provincia o Municipio. En cualquiera de estas dos garantías, la operación de crédito a largo plazo resulta siempre representativa de una inmobilización, puesto que en esencia el acreedor no tiene la disponibilidad del capital concedido a crédito hasta pasado gran tiempo; pero la representación especial del crédito en esos documentos llamados valores, permite adquirir la disponibilidad que en esencia no tiene la operación, y de ahí que se llamen *valores mobiliarios* a los que nos ocupan, y por esto mismo se dice también que los valores mobiliarios son títulos represantativos del capital y que sirven para movilizarle.

Los valores mobiliarios son los que tienen cotización en las Bolsas y que por consiguiente han de constituir la base de nuestro estudio en esta parte.

483.—Clases de valores mobiliarios.—La clasificación de los valores mobiliarios, como todas las clasificaciones, da origen a agrupaciones diferentes según el criterio de división que se tome por base, y así indicaremos sucesivamente aquellas distribuciones en grupos que sean necesarias al objeto de los cálculos sobre valores, teniéndose las siguientes:

En base al criterio de *nacionalidad* se distinguen siempre en cualquier país los valores nacionales y los extranjeros.

Otra clasificación los agrupa en razón a su *naturaleza*, según la cual los títulos representan *créditos* contra personas sociales, ya sean públicas o privadas; o bien *partes del capital* de alguna Sociedad privada. Esta clasificación corresponde a la diferente manera que tienen los títulos de percibir los intereses producidos. Así se tienen de una parte los valores a interés fijo (si bien ésto sea sólo nominal en muchos casos) que son todos los que representan los créditos antes referidos; y por la otra valores que dan un rendimiento que puede ser variable hasta nominalmente porque este rendimiento ha de estar constituído por una parte alícuota de los productos de la empresa cuyo capital representan los títulos.

Otra clasificación tiene en cuenta la forma de los títulos y de su transmisión, por la cual se tienen títulos nominativos, a la orden, al portador y mixtos. Los títulos *nominativos* pertenecen a la persona cuyo nombre está escrito en el título; y los títulos *al portador* pertenecen a quienes los tengan en su poder, lo mismo los títulos que el derecho al cobro de los intereses; pero cuando los títulos son *mixtos*, es porque siendo títulos nominativos tienen el carácter de al portador para el cobro de los intereses.

484.—Empréstitos.—Son los contratos de creación de los títulos representativos del crédito.

Empréstito suele denominarse en conjunto la operación de préstamo, y la creación de los títulos queda designada con el nombre de *emisión*, en la que se hará constar la forma en que ha de hacerse, es decir, el modo en que se llamará a los prestamistas.

Estas formas de llamamiento pueden ser de *suscripción pública* o de *sindicato*; y algunas veces también por *oferta directa* en las Bolsas para su venta.

La emisión mediante suscripción pública se hace fijando la cantidad o precio percentual que haya de entregarse por los títulos que se emiten, la fecha o fechas de hacer las peticiones de títulos y el modo de entregar las cantidades que correspondan por los títulos que obtenga el suscriptor. Cuando el precio de emisión coincide con la cantidad reconocida como crédito

en los títulos, es decir, con el nominal de éstos, se dice que la emisión es a la par, y en caso contrario, sobre o bajo la par de igual forma que el precio de los cambios (**354**).

Se hace la emisión mediante sindicato cuando un grupo de capitalistas, generalmente de la alta Banca, adquiere para sí toda la emisión con facultad de cederla al público mediante una suscripción de igual carácter que la anterior; quedando por consiguiente de la propiedad del grupo bancario todos aquellos títulos que no hubiesen tenido solicitante Por este servicio de intermediarios entre la entidad emisora y el público capitalista, a la vez que por la garantía de que todos los títulos serán vendidos por el emisor, la Banca que forma el sindicato deduce del precio de emisión una comisión percentual.

En cualquiera de los dos casos de suscripción, ya directamente o por mediación del sindicato de garantía, puede hacerse durante un período prefijado, al final del cual se hará la distribución de los títulos entre los que los hayan solicitado; o bien se llevará cuenta muy exacta de los pedidos que se van haciendo, y cuando se llega al límite del nominal emitido queda cerrada la suscripción sin admitirse nuevas peticiones. Cuando la suscripción se hace en la primera forma es necesario distribuir después el total del empréstito entre los suscriptores en proporción a sus pedidos, si el total de éstos excede al del empréstito, distribución que constituye una aplicación de los repartos simples directos (**40**), teniendo presente que la aproximación que ha de obtenerse en el reparto será media unidad del menor nominal que se adjudique.

485. —Fondos públicos. Clases de los mismos.— Los fondos públicos son los títulos que representan empréstitos de entidades públicas, a los cuales como títulos de crédito les corresponde la clasificación indicada en la del crédito (**306**), designándose respectivamente las das clases principales allí señaladas con la denominación de Deuda *consolidada* o del Estado, y deuda *flotante* o del Tesoro.

La deuda consolidada es aquella cuyo servicio de pago de intereses y amortización ha sido incluído entre las obligaciones ordinarias de la entidad pública emisora, y de ahí el decirse que es deuda del Estado. Para su emisión ha sido preciso un acuerdo legal especial, y se llama deuda permanente porque

su creación responde a necesidades de gran duración, que no pudiendo ser satisfechas en un sólo ejercicio se distribuye su atención entre diversos por medio del empréstito.

La deuda flotante responde a necesidades momentáneas de la entidad emisora, las cuales alteran la situación de su tesorería, es decir, de sus disponibilidades en dinero, y para atenderlas, en tanto se restablece esa situación alterada o se hace uso del crédito consolidado, se crean los títulos llamados Bonos, Obligaciones o Pagarés del Tesoro. Como estas necesidades que dan origen a la creación de la Deuda flotante son perentorias y accidentales (*), la duración o plazo de emisión de estos valores es corta y los gastos e intereses de los mismos figuran entre los extraordinarios de la entidad emisora.

Además de esas diferencias entre las dos clases de deudas, tiene gran importancia para las operaciones con valores los impuestos que gravan los intereses de una y otra, pues debido a la urgencia de la obtención de fondos para que se emite la deuda flotante se hace su emisión sin impuestos para atraer más fácilmente los capitales necesarios.

De esta clase de valores existen en circulación multitud tan grande que su detalle necesitaría un volumen bastante grueso, por lo que nos limitamos a dar en la tabla **XLII** el de los que constituyen la Deuda española actualmente en circulación, pudiendo el lector obtener lo que necesite de otros valores en los boletines que publican las Bolsas o en anuarios financieros.

486. – Obligaciones y su emisión. – Los empréstitos privados necesitan para su emisión, no solo el acuerdo especial de la Sociedad emisora, sino además cumplir los requisitos de publicidad señalados por las leyes de cada Estado y que consisten en la inscripción de las obligaciones en los Registros de Comercio, para probar además que el importe de las obligaciones guarda la proporción que señala la misma ley, con el capital de la Sociedad emisora.

La creación de estos empréstitos está gravada con ciertos impuestos, como de transmisión de bienes y de timbre de los títulos del empréstito, sin cuyo cumplimiento no pueden ser

(*) También puede tener por causa de creación la deuda flotante la preparación de emisión de deuda consolidada, esperando el momento propicio en el mercado del dinero.

admitidos los valores a la contratación en las Bolsas, y menos servir para las demás operaciones sobre valores que hemos de estudiar en esta parte de nuestra obra.

El detalle de todos los impuestos españoles sobre valores se halla en la tabla **XLIII**, todos los cuales originan cálculos de tantos por ciento que hemos aplicado en muchos otros lugares de este trabajo, por lo que dejamos de resolver ejemplo.

Ejercicios *números* **935** al **939.**

487.—Conversión de valores.—La conversión es la transformación de valores de una clase cualquiera en otros de otra especie mediante el canje de unos títulos por otros, y muy especialmente se emplea esta operación para la transformación de la deuda flotante en deuda consolidada; si bien es utilizable la operación para valores cualesquiera.

Cuando se hace la conversión puede darse a los tenedores la elección entre hacer el cambio que se propone o solicitar el reembolso a metálico de los valores que se quiere retirar de la circulación.

488.—Cartera de valores.—Se da esta denominación al conjunto de los que posee una persona por préstamos que ha hecho en forma de empréstitos y por partes de capital de sociedades.

El cálculo que originan las carteras de valores consiste en determinar el nominal de los títulos que la forman mediante sencillas multiplicaciones y sumas.

Ejemplo: Un contratista entrega en garantía de una concesión municipal 28 títulos serie B de Deuda ferroviaria española al 4 $^1/_2$ %, 50 obligaciones del Ayuntamiento contratante de 500 pesetas cada una y 9 títulos serie E de Deuda exterior española. Calcular el nominal de esta garantía.

Como los títulos de Deuda ferroviaria de la clase entregada son de 5000 pesetas cada uno y los de la Exterior son de 12000 pesetas tendremos:

Deuda ferroviaria. . .	28 ×	5000 =	140000	pesetas nominales.
Obligaciones.	50 ×	500 =	25000	» »
Deuda exterior.	9 ×	12000 =	108000	» »
Total que se pide.			273000	» »

Ejercicios *números* **906** al **912.**

489.—Reembolso de los empréstitos.—El reembolso de los empréstitos se hace por las diferentes formas de amortización cuyo estudio detallado y matemático corresponde al Cálculo Financiero, pero que ahora hemos de indicar por la influencia que ésto tiene en la fijación de los precios de los valores.

El reembolso puede hacerce al mismo nominal o con un aumento sobre él, en cuyo caso para los efectos del precio será como si el nominal fuese la cantidad por que se hace el reembolso, y también existe la modalidad de que ese aumento en el reembolso tenga forma de premios que por cantidades distintas se distribuyen por sorteo entre los títulos amortizados cada vez que se hace una de éstas. En el caso de estas amortizaciones parciales, los títulos que hayan de reembolsarse se designan por sorteo que puede servir a la vez para la distribución de los premios.

Otra forma de reembolso consiste en la compra en Bolsa hecha por el deudor, quedando de este modo extinguida la deuda por confusión.

En el reembolso con premios, puede ser que el importe de éstos incluya el valor de los títulos amortizados, o bien que los premios sean una cantidad entregada además del valor del título a que corresponda. También en cualquier forma de reembolso por amortización hay que distinguir el que los títulos amortizados tengan o no derecho a los intereses del último vencimiento, pues si no tuviesen derecho a esos intereses es indudable que su valor habría de ser menor, porque corresponde esta circunstancia al pago anticipado de los intereses.

Además de lo anterior, es necesario tener en cuenta que algunos empréstitos carecen de reembolso, es decir, que el deudor solo contrae la obligación de pagar los intereses, pero no de reembolsar el capital, lo que se conoce con el nombre de empréstitos perpétuos cuya emisión solo se hace por los Estados, porque son las únicas entidades que pueden comprometerse perpetuamente al pago de los intereses.

El modo en que deba hacerse el reembolso de los empréstitos figura generalmente en los mismos títulos en forma de estado que se llama cuadro de amortización y que se calcula siguiendo las normas del Cálculo Financiero.

490.—Interés de los empréstitos. – Hemos dicho antes que los valores mobiliarios producían un interés y que además éste se hallaba determinado antes de la emisión en aquellos valores que constituyen los empréstitos, por consiguiente debemos determinar el modo en que hayan de hacerse efectivos esos intereses.

En primer lugar si nos atenemos a los plazos en que se pagan, la mayoría de las veces el interés se paga por semestres, y en otros casos por trimestres, siendo muy pocos los valores en que los intereses se han de hacer efectivos anualmente.

Para el cobro de los respectivos intereses van provistos los títulos de unos cajetines pequeños situados al margen o en la parte inferior de los mismos, los cuales se denominan *cupones* y corresponde cada uno a un vencimiento de intereses, expresándose el número de orden del vencimiento y el título a que pertenece, y sobre todo, la cantidad que por intereses del título se han de cobrar en cada vencimiento.

Esta cantidad es el valor nominal del cupón que antes dijimos no variaba en los títulos de empréstitos (**483**), correspondiendo como valor efectivo el que resulte después de deducir los impuestos que gravan esos pagos de intereses, y para cada cupón será una parte alícuota del interés total o del neto anual (**212**) que se sabe calcular.

Los intereses de empréstitos no siempre tienen deducción por impuestos, según acabamos de decir, sinó que en algunas ocasiones se hace la emisión con interés libre de impuestos, lo que indica que ha de ser el deudor quien pague esos impuestos que por disposición de la Ley debiera pagar el acreedor, resultando con ésto un aumento del verdadero tipo de interés, ya que el valor efectivo del cupón es el nominal.

Cuando los títulos son nominativos, en vez de los cupones, que deben separarse de los títulos para exigir su pago, se estampa en los mismos títulos un cajetín en que se expresa el pago cada vez que se hace, pero ésto no tiene ninguna importancia a nuestro objeto, porque en nada variará el valor ni del título ni de los intereses a cobrar.

La forma en que haya de hacerse efectivo el importe de los cupones, está indicado en las mismas emisiones y consiste en presentar relaciones de ellos en los Bancos u oficinas que se

diga en cada caso, para que después de reconocido el derecho por la legitimidad de los títulos o cupones, se dé la orden de pago, y quien desee obtener el pago anticipado, puede recurrir a un Banco que se los descontará (**338**).

Estos intereses de que venimos hablando pueden presentar ciertas particularidades con respecto al primer vencimiento, tales como el que no coincida con el transcurso del tiempo del período del pago, como sucedería en un empréstito emitido en 15 de agosto con interés semestral venciendo el primer cupón en 1.° de enero siguiente, pues en tal caso resulta que los intereses se devengan desde 1.° de julio anterior a la fecha de emisión, lo cual constituye un aumento del interés real obtenido por el acreedor, y hasta algunas veces se hacen las emisiones con pago anticipado de los intereses según dijimos en otra ocasión (**223**).

EJERCICIOS *números* **891** al **900**, y **913** al **916**.

491.—Tanto real de un empréstito.—Se denomina tanto real de un empréstito el que resulta en interés vencido para el capital entregado en cambio de los títulos representativos del anticipo, y claro está que siendo variadas las condiciones de emisión, también han de serlo las fórmulas de cálculo de este tanto real, por lo que hemos de distinguir los diferentes casos en la forma siguiente:

1.° *Emisión a la par en principio del período de producción del interés con pago total en el momento de la suscripción.* En este caso el interés real es el mismo nominal del empréstito o el que resulta de la deducción de los impuestos, y como éstos son siempre un tanto por ciento del interés nominal, resulta que bastará un sencillo cálculo de tanto por cuanto (**6**) para hallar el interés deseado.

Ejemplo: Se ha emitido un empréstito a la par con interés del 6 °/₀ al que corresponde un impuesto del 5'50 °/₀. Hallar el tanto real del mismo.

Resulta que hemos de calcular el valor a que se reduce el 6 °/₀ después de restarle su 5'50 °/₀, y empleando la segunda proporción del tanto por cuanto (**6**) tendremos:

$$100 - 5'50 : 100 :: x : 6$$

de donde resulta para el tanto real un valor de 5'67 °/₀.

2.° *Emisión por bajo de la par y demás condiciones de*

antes.—El tanto real será el que corresponda al verdadero capital entregado en la suscripción, después de modificado el tanto nominal por razón de los impuestos, es decir que si llamamos t_n al tanto nominal del empréstito, t_i al tanto que resulta por razón de los impuestos, siendo i el importe de éstos y E el efectivo entregado por ciento del importe de cada título, resultará que el tanto real t_r le obtendríamos por la siguiente deducción.

El valor de t_i según el cálculo anteriormente hecho será:

$$t_i = \frac{t_n(100-i)}{100} \qquad [1]$$

y como no se han entregado las 100 unidades a que el t_n y el t_i se refieren, sinó las E, el denominador de la fórmula será este valor entregado por el título, y tendremos:

$$t_r = \frac{t_n(100-i)}{E} \qquad [2]$$

Ejemplo: Hallar el tanto real de interés de un empréstito emitido a 95 %, cuyo interés nominal es de 4 %, y los impuestos que corresponden sean el 3 % de los intereses nominales.

Tenemos para valores de la fórmula:

$$t_n = 4, \qquad i = 3, \qquad E = 95$$

de donde el tanto real buscado será:

$$t_r = \frac{4(100-3)}{95} = 4{\cdot}084\ \%$$

3.° *Emisión sobre la par e idénticas condiciones.* El tanto real se encontrará por la misma fórmula, sin más que hacer que el valor de E, sea ahora 100 aumentado del tanto percentual que se paga sobre la par.

4.° *Emisión con pago hecho en fecha diferente del principio de producción de interés.* En este caso la cantidad E entregada en la suscripción es el valor final de un capital C que produce intereses vencidos al tanto real t_r desde el principio del período, por lo que el denominador de la fórmula que da el valor del tanto real deberá ser este capital primitivo C en vez del E que se entrega.

Según ésto el tanto real buscado sería el mismo de la fórmula [2]

$$t_r = \frac{t_n(100-i)}{C}$$

y sustituyendo C por el valor que le corresponde (**219**), tendríamos:

$$t_r = t_n(100 - i) : \frac{100kE}{100k+t_rn} = \frac{t_n(100 - i)(100k + t_rn)}{100kE}$$

ecuación que resuelta con relación al tanto real, da para valor de éste

$$t_r = \frac{100k \times t_n(100-i)}{100kE-nt_n(100-i)} \qquad [3]$$

Ejemplo:—Se hace la emisión de un empréstito en 20 de agosto, pagando en esta fecha el 98 °/₀ del valor suscrito y venciendo el primer cupón trimestral en 1.° de octubre siguiente. Hallar el tanto real de interés de este empréstito, si se paga el 6 ½ °/₀ nominal y los impuestos a deducir son el 5'75 °/₀.

Nos encontramos con que el principio del período de producción de interés es el 1.° de julio y como el pago de la suscripción se hace en 20 de agosto, la diferencia son 50 días de año comercial, teniendo para las cantidades de la fórmula los valores

$$k = 360, \quad E = 98, \quad t_n = 6'50, \quad i = 5'75, \quad n = 50$$

y para el tanto buscado

$$t_r = \frac{360000 \times 6'50 \times (100 - 5'75)}{360000 \times 98 - 50 \times 6'50 \times (100 - 5'75)} = 6'306\ °/_0$$

5.° *Emisión con pago en varios plazos.* Este es un caso muy frecuente en la emisión de empréstitos, y consiste en la entrega de una pequeña cantidad al tiempo de hacer la suscripción, y después, en épocas prefijadas, se van entregando las cantidades restantes hasta completar el total precio de emisión de los títulos, el que puede ser lo mismo la par que más o menos cantidad como en los casos anteriores. Cuando la emisión se hace en estas condiciones el valor E, hasta ahora utilizado para los cálculos, corresponde en plazo de entrega al vencimiento medio de las entregas parciales (**293**), y una vez determinado este vencimiento medio nos hallaremos en alguno de los casos anteriores, casi siempre en el último de ellos, a los cuales remitimos al lector para la resolución correspondiente.

6.º *Empréstitos con premios.*—Para el acreedor son éstos un aumento de interés incierto, puesto que constituyen una lotería, mientras que para el deudor son un número cierto, pero con la particularidad de que no varía la importancia de estos intereses con la disminución que en la deuda producen sus amortizaciones, y en uno y otro caso es necesario para calcular el tanto real acudir al cálculo de probabilidades para saber la que existe de cobrar los premios, y que es la medida de esos aumentos de interés, saliendo del carácter elemental de nuestro trabajo por ser cuestión que debe resolverse por el Cálculo Financiero.

Observaciones. – 1.ª Cuando el interés sea libre de impuestos bastará hacer cero este elemento de las fórmulas.

2.ª En todos estos cálculos hemos prescindido del error que representa el que el pago de los intereses no sea anual, pues haciéndose varios pagos en la unidad de tiempo a que el tanto se refiere, los intereses cobrados pueden ser empleados en nueva producción, y con ello resultará el interés compuesto; pero este mismo error existe en todos los cobros de intereses cuando no se espera para hacerles al final del año, como sucede en las operaciones bancarias, alquileres en las operaciones no comerciales, etc., siendo la medida parcial en cada cobro la que determina la fórmula de Moser **(213)** y por la frecuencia de su existencia constituye en realidad un medio práctico de operar ya incluído en el precio de mercado que representan los tipos de interés o descuento, con lo cual es innecesaria la consideración de este error que en conjunto en el valor del empréstito habrá de calcularse por las fórmulas del Cálculo Financiero.

EJERCICIOS *números* **872** al **890** y **CCCXCII.**

492.—Valor real del empréstito.—Cuando la cantidad porque se emite un empréstito no coincide con el nominal, o no se hace la entrega en el principio de los períodos de producción de interés, hemos visto en el párrafo anterior que era necesario calcular el valor que correspondía al mismo, para los efectos de hacerle intervenir en la determinación del tanto real.

El valor real del empréstito será pues, la cantidad percentual a que equivalgan las entregadas en la suscripción, en el momento en que principian los períodos de producción de interés, y por consiguiente si la entrega se hace en el principio tan repetido de los períodos, el cálculo se reduce a una aplicación del tanto por cuanto, y si la entrega, se hace en fecha diferente a la de ese principio, aplicaremos la fórmula del valor primitivo **(219)** después de determinar el vencimiento medio si es que se hacen varias entregas en pago, como en los casos 4.º y 5.º del párrafo anterior.

Para la determinación de este valor real suele utilizarse en las obras de Cálculo el descuento comercial, estudiándose esta cuestión y la anterior como aplicación del vencimiento medio; pero ni es aplicación del vencimiento medio ni menos debe utilizarse el descuento comercial, puesto que los intereses del empréstito son de hecho vencidos y por consiguiente solo las fórmulas de esta clase de interés le serán aplicables.

EJERCICIOS *números* **901** al **905** y **CDLXXVII.**

493.—Acciones; emisión.—Las acciones son los títulos que representan las partes de capital de una Sociedad anónima o comanditaria, que por esta circunstancia se llaman sociedades por acciones.

Las acciones tienen un valor nominal de una parte alícuota del capital de la sociedad, pero claro está que es muy difícil que en ninguna época sea el valor real igual al nominal, puesto que siempre el título representa esa misma alícuota de capital y por consiguiente de los bienes que en total integran el patrimonio social, y claro está, que estos bienes sufren transformaciones, cambios y usos que les dan carácter variable en su valor. Además las acciones no admiten el reembolso sinó en el caso en que la sociedad liquide, es decir, cuando se disuelva, y al desaparecer, tienen que desaparecer los títulos que la representan en sus bienes.

Sin embargo, hay casos en que se dice que se amortizan las acciones, en forma casi idéntica a como se hace con los títulos de un empréstito, y así se considerarán para el cálculo; pero en tal caso no hay amortización, sinó un aumento en los intereses que corresponden a las acciones, algo así como los premios de los empréstitos en cuanto a los cálculos que hemos de estudiar.

La emisión de las acciones puede hacerse por los mismos procedimientos que los empréstitos (**484**), debiendo no obstante añadir la emisión por suscripción privilegiada, que consiste en hacerla concediendo un derecho llamado *de opción* a ciertas personas, que pudiendo ser cualesquiera, quedan reducidas a los poseedores de acciones anteriormente emitidas, y por consiguiente, esta forma de emisión sólo es aplicable al caso de un aumento en el capital o una transformación del mismo que exijan esa nueva emisión por parte de una Sociedad ya anteriormente constituída.

La emisión con derecho de opción es también aplicable a las obligaciones de cualquiera sociedad; y también ese derecho se concede con carácter exclusivo a los antiguos accionistas.

Para la emisión de acciones es preciso cumplir requisitos semejantes a los indicados para la de obligaciones.

494.—Clases de acciones. No siempre los capitales de las Sociedades están distribuídos en partes alícuotas del mis-

mo denominador, ni tampoco con idénticos derechos en cuanto a dicho capital para las diferentes acciones en que se halla distribuído, sinó que las acciones pueden ser de las clases siguientes:

Acciones de *numerario* o *de aportación*. Estas dos clases representan respectivamente la forma diferente en que se ha contribuído a la formación del capital de la sociedad; ya en metálico, en las de la primera clase, o ya en bienes diferentes en las de la segunda, y como se dice aportación a la cesión de bienes diferentes a metálico, de ahí el nombre de las acciones.

Acciones *ordinarias* y acciones *de preferencia*. Estas dos clases representan derechos diferentes por parte de los poseedores, respecto al capital de la sociedad, a los beneficios de la explotación a que la misma se dedica, o a ambas cosas a la vez; y ese diferente derecho está señalado por un privilegio de que gozan las acciones preferentes respecto de las ordinarias. Este privilegio puede tener formas diversas en cuyo detalle no entramos porque nos llevaría demasiado lejos.

Acciones, bonos o *partes de fundador*, son unas acciones especiales con que se remunera a los fundadores de una sociedad o a los que han hecho trabajos preparatorios de proyectos o estudios relacionados con el negocio a que había de dedicarse la sociedad. Casi siempre son acciones de derechos limitados a los beneficios que pueda obtener la sociedad por su negocio, aunque nada quita que puedan ser acciones ordinarias y aún preferentes; pero por efecto de esa limitación a sólo el derecho a los beneficios suele también denominárselas acciones *de beneficio*.

Las que son más comunmente llamadas acciones *de beneficio* son las que se entregan en cambio de las acciones amortizadas cuando se hace la operación así llamada y a la que antes nos hemos referido.

Acciones *liberadas* o *no liberadas*, con cuyas denominaciones se indica que el capital que se comprometió a entregar a la sociedad el suscriptor ha sido o no entregado completamente. Cuando la entrega de ese capital se hace por partes en diferentes épocas, cada una de esas entregas se llama *dividendo pasivo*, y se conoce con la denominación de *desembolso* el

importe de los dividendos pasivos satisfechos a cuenta del total nominal de las acciones.

Las acciones no liberadas exigen el cálculo especial de la cantidad total que representa el desembolso, puesto que esta cantidad es siempre la que en realidad resulta comprada o vendida cuando se transmiten las acciones. Este cálculo especial es una multiplicación o un tanto por ciento sencillo que ya saben calcular nuestros lectores.

Ejemplo: Hallar el nominal liberado que representan 47 acciones de la Sociedad R.A.B. que según los títulos, cada acción es de 500 pesetas nominales y tiene desembolsado el 82 %.

El desembolso o valor de cada acción es **(6)**

$$\frac{500 \times 82}{100} = 410 \text{ pesetas,}$$

lo que da para valor nominal liberado en total

$$410 \times 47 = 19270 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **CCCXIV** al **CCCXX**.

495.—Dividendos.—Los *dividendos* son las partes de capital que por cada acción se entregan para la constitución del de la sociedad, y también las partes que a cada acción corresponde en la distribución de los beneficios obtenidos por la misma sociedad.

Resulta por consiguiente que son de dos clases completamente opuestas los dividendos, y como la primera clase representa un desembolso por parte del poseedor de la acción, de ahí el que se llame dividendo *pasivo*, y porque el otro representa un cobro por el mismo, por eso se denomina dividendo *activo*.

Son por tanto los dividendos activos para las acciones lo mismo que los intereses para los empréstitos, si bien se diferencian en que en los dividendos no se conoce el importe antes de la fecha en que se han de pagar, según también dijimos, (**341**). Para el cobro de los dividendos activos llevan los títulos de acciones unos *cupones* de igual carácter que los correspondientes de los empréstitos (**490**).

EJERCICIOS *números* **917; 918;** y **CCCVIII** al **CCCXIII.**

496.—Negociación de cupones y títulos amortiza-

dos. – Cuando los intereses de los títulos de empréstitos se consideran de seguro pago en la misma fecha que vencen, cual sucede con todos los de valores públicos, los garantizados por el Estado y los de Sociedades de primera categoría en el crédito, puede obtenerse el pago anticipado de los cupones correspondientes, mediante el descuento, al que ya nos hemos referido en otra parte de esta obra (**338**) indicando entonces los cálculos que precisa esta operación.

El descuento lo hacen los Bancos desde la fecha en que el vencimiento queda incluído dentro del plazo bancario de 90 días en que han de efectuar operaciones, y así para los valores públicos españoles desde el día en que se paga un cupón se admiten a descuento los cupones del vencimiento próximo.

Es necesario tener muy en cuenta la existencia del cupón corriente en los títulos sobre los que se ha de efectuar alguna de las operaciones que luego estudiaremos, pues por causa de ese pago anticipado hay en circulación no pocos títulos a los que falta el primer cupón que haya de vencer a partir de la fecha en que se efectúa la operación.

También hay la misma falta de cupón durante un plazo antes de cada vencimiento, por causa de la necesidad de presentar los cupones comprendidos en facturas para obtener su pago en la fecha del vencimiento, pues debiendo ser reconocida la legitimidad de los cupones y su propiedad cuando proceda, ha de ser necesaria esa presentación antes del vencimiento, teniéndose por consiguiente la falta de cupón en los títulos.

Cuando los cupones son pagaderos en moneda extranjera el cálculo que exije su negociación es el mismo que el de efectos de comercio a plazo diferente que el de cotización, idéntico al estudiado en el cambio (**367** al **369**) y como entonces los cupones en caso de ser más de uno se relacionarán en facturas.

Los títulos amortizados tienen para su cobro un trámite idéntico al de los cupones, por lo que la Banca se encarga de su cobro mediante una comisión percentual o anticipa su valor mediante descuento como el de los cupones y efectos de comercio.

Ejercicios *números* **919** al **928**; y **CCCXXVI** al **CCCXXX**.

497.— Cálculo del derecho de opción.—El derecho de opción que tienen las acciones de una sociedad en las emisiones de obligaciones o de nuevas acciones, presenta en ciertos casos ventaja porque los títulos emitidos lo son a un tipo inferior al valor que les corresponde, bien porque se trate de acciones que tienen precios en Bolsa superiores al valor nominal, o bien porque el precio de emisión de las obligaciones sea menor que el valor real (**492**) del mismo empréstito; más el primer caso que el último

Estas ventajas pueden ser objeto de cesión por parte del poseedor de las acciones que dan el derecho de preferencia, y de hecho son materia de contratación. La negociación del derecho se hace en general de dos modos diferentes: o mediante la suscripción por el antiguo accionista a favor del nuevo, de un número de acciones nuevas, o también por la cesión real de bonos que representan ese derecho.

El valor exacto de estos bonos no es posible determinarle, al modo que se determina el de varias unidades que se conoce el precio; pero sí puede hallarse una fórmula matemática que dé el límite máximo de dicho valor.

Para hallar esta fórmula nos serán precisos los tres elementos siguientes:

a) El número de bonos de opción necesarios para suscribir una acción.

b) El valor que tienen los títulos viejos a que se equiparan los nuevos, o el que corresponde como valor real a que también antes nos hemos referido.

c) El valor actual de un título nuevo que se va a suscribir.

El primer elemento, que hemos de representar por n, será un valor sumamente fácil de hallar, pues siempre se determinará que, por ejemplo, se suscriba una acción por cada 2, 3, etc. que se posean, o varias acciones por otras varias; y si fuesen 3 por cada 7 acciones poseídas el valor de n sería $^3/_7$.

El valor de los títulos viejos se determinará en la forma que luego hemos de estudiar, bastando ahora para nuestro objeto que sepamos es una cantidad cualquiera que representaremos por A; y si se trata del valor real que corresponde a los nuevos títulos también sabemos cómo se halla (**492**), luego también podemos considerar que está representado por A.

El valor actual de los títulos que se suscriben, al que llamaremos V_s, tendrá un valor total formado por el entregado en la suscripción, o el vencimiento medio de las entregas parciales (**493**, 4.° y 5.° y **293**) y el valor de los bonos precisos para la suscripción, por lo que llamando V_b al valor de cada bono se tendría

$$V_s = nV_b + E$$

en cuya expresión E es el valor que se entrega o paga según las condiciones de emisión.

Teóricamente el valor V_s de los nuevos títulos debería ser el mismo de los títulos viejos disminuído en el valor de opción que corresponde a cada acción, es decir que según lo que hemos dicho sucedería

$$V_s = A - V_b$$

y sustituyendo a V_s el valor que hemos dicho antes le corresponde por su naturaleza y medios precisos para su adquisición, obtendríamos la siguiente ecuación:

$$E + nV_b = A - V_b$$

la que resuelta con relación a V_b nos da

$$V_b = \frac{A - E}{n + 1} \qquad [1]$$

fórmula mediante la cual determinaremos el valor de un bono de opción, obteniendo, claro está, el valor teórico, que es el que constituye el límite máximo, puesto que en la práctica son siempre más estimados los títulos viejos por la mayor facilidad con que pueden ser enajenados, y así el valor de la fórmula será también algo superior al valor verdadero que se obtendría por la cesión del derecho de opción.

Puede darse el caso que la emisión fuese de títulos gratuitos, en cuyo caso el valor de E es cero y la fórmula se convierte en

$$V_b = \frac{A}{n + 1} \qquad [2]$$

que al igual que la primera representa también límite de valor.

Cuando el valor V_s de los nuevos títulos tuviera otros elementos, porque los derechos en el capital de la entidad emisora fueren distintos del que tienen los títulos viejos, como en caso de voto plural, preferencia en las ganancias o en el capital o en ambos (acciones privilegiadas) entonces se tendría

$$V_s = P(A - V_b)$$

en la que P representa la relación de valor de nuevos a viejos títulos, sea esta relación entera o fraccionaria y con esta alteración las igualdades anteriores serían sucesivamente

$$E + nV_b = P(A - V_b) = PA - PV_b$$

$$V_b = \frac{PA - E}{n + P} \qquad [3]$$

fórmula más general porque si en ella hacemos $P = 1$ tendremos la primera, y anulando E resulta la segunda.

Ejemplo: La Sociedad M.I.V. cuyas acciones valen 2300 pesetas aumenta su capital con acciones emitidas a 490 pesetas, cuyos derechos en la sociedad serán de $^1/_4$ de las anteriores, concediendo el privilegio de suscribir 11 acciones nuevas por cada 18 antiguas que se posean, a cuyo fin a cada acción antigua entrega un bono de suscripción. Calcular el valor de cada bono.

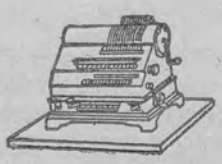
Los valores especiales de la fórmula [3] serán

$$A = 2300; \qquad E = 490; \qquad P = 0'25; \qquad n = \frac{11}{18}$$

y el resultado pedido

$$V_b = \frac{0'25 \times 2300 - 490}{\frac{11}{18} + \frac{1}{4}} = \frac{(0'25 \times 2300 - 490) \times 36}{31} = 89'03 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **929** al **934**; y **CCCXXI** al **CCCXXV**.



L

OPERACIONES SOBRE VALORES

498.—Operaciones que se efectúan con los valores.—Los valores mobiliarios pueden ser objeto de todas las transacciones lo mismo que cualquier otra clase de bienes, pero su extructura especial hace que sobre ellos se verifiquen operaciones privativas que son a las que ahora nos referimos.

Las operaciones sobre valores mobiliarios podemos establecerlas en dos grandes agrupaciones, de operaciones de Bolsa y operaciones que tienen por base los datos suministrados por las operaciones de Bolsa.

En el primer grupo se comprenden las negociaciones de esta clase de valores, negociaciones que tienen múltiples combinaciones, desde la simple compraventa al contado, que constituye la operación fundamental, hasta la reunión de cesiones de títulos condicionadas a ciertos requisitos que casi constituyen un juego sobre el valor futuro de los mismos valores. Mejor que un detalle de estas operaciones es el estudio de cada una en particular que ahora haremos.

El segundo grupo lo constituyen las permutas y conversiones de valores, pignoraciones y operaciones accesorias de seguros, transportes, depósitos, etc.

También pudieran quedar incluídas en este grupo las negociaciones hechas fuera de las Bolsas y especialmente en los Bancos, pero que, por su identidad con las mismas efectuadas en las Bolsas, hemos de estudiar al mismo tiempo, pues su separación tiene importancia en el Derecho y hasta en la Técnica, pero no es posible hacerla bajo el punto de vista del Cálculo.

499.—Negociación de valores.—Los títulos al portador se transfieren por la simple entrega, y de ahí que la mayoría

de los valores tengan este carácter, porque la simplificación de operaciones es una de las causas de prosperidad de los negocios. En cambio, los títulos nominativos exigen para su transmisión diversas formalidades, cuales la anotación en los registros de la entidad emisora, y a veces sobre los mismos títulos, no faltando el caso en que se establecen derechos de preferencia para la transmisión de los títulos, con objeto de que siempre sean las mismas personas las que como accionistas forman la sociedad o conserven una preponderancia que permita ser ellas las que la gobiernen y dirijan los negocios.

También en ciertos casos existe un derecho de transferencia, que bajo el punto de vista del cálculo es indispensable conocer, porque ha de intervenir en las fórmulas referentes a la transmisión de valores.

Cuando el título que se transmite no está liberado **(494)**, hay que tener presente que solo se hace la transmisión de la parte liberada, sustituyendo el adquirente al antiguo poseedor en la obligación de pagar los restantes dividendos pasivos.

500. – Formas de cotización. – La cotización de los valores mobiliarios es el precio que sirve de base a las diferentes operaciones con los mismos, siendo por consiguiente lo mismo que la cotización de los cambios **(355)**, y aún también recibe la misma cotización el nombre de cambio por semejanza con el precio de las monedas extranjeras.

Las formas de cotización son diferentes para los valores según que tengamos en cuenta la referencia al título o a los cupones; y respecto de éstos, hay dos sistemas generales de expresión de las cotizaciones.

El primer sistema, que suele llamarse *sistema francés*, y que pudiéramos denominar sistema *de Occidente*, consiste en expresar el valor del título comprendiendo en la cotización todos los derechos que tiene el poseedor, *tal cual* pueden ser ejercitados por el cedente, es decir, que el poseedor, si bien tiene derecho al cobro del cupón el día del vencimiento, sin embargo, no puede ejercer este derecho hasta esa fecha, y al transmitir el título, queda incluido en el precio de transmisión la parte de intereses que pueden haber correspondido desde el último vencimiento hasta la fecha de cesión. Si el título que se transmite es una acción a la que ha sido pagado un divi-

dendo a cuenta de los beneficios del año, en el precio se entiende que no va incluido el valor de ese dividendo a cuenta, pues habiendo pasado la fecha del reparto cuando se hace la transmisión, ha podido ejercer el derecho de cobro el cedente antes de la transmisión, y si el título que se negocia lleva unido el cupón correspondiente a ese dividendo a cuenta, será necesario comprender el valor de ese cupón con independencia del que tiene el mismo título. Este caso es frecuente en las operaciones sobre valores, y su conocimiento es indispensable porque no venciendo los dividendos activos hasta que al final del año se conocen los beneficios líquidos, pudiera tenerse dudas respecto al ejercicio del derecho de cobro a que se refiere la cotización francesa o de *tal cual*.

El segundo sistema de cotización es el *de Oriente* o *alemán*, también denominada cotización *en seco*, según la cual no queda incluído en el precio el valor de los intereses que corresponden desde la fecha en que venció el último cupón y la de la negociación, es decir, que se transmiten los derechos que tenía el cedente en el instante mismo posterior al vencimiento del último cupón mediante el precio cotizado, y después los que a partir de esa fecha haya ido adquiriendo por la parte de intereses corridos. Con la cotización *al seco* se hace necesario calcular el valor de esos intereses con independencia del valor del título o títulos negociados según la cotización, y como en el caso de que sean acciones las que se transmiten se desconoce el tanto por ciento de interés, de ahí el que en las Bolsas que cotizan así, se tenga un tipo de interés convencional a los efectos del cálculo del valor de la parte de cupón. Las cotizaciones *al seco* figuran siempre acompañadas del tipo de interés y de la fecha en que empiezan a contarse en la forma siguiente: «enero más intereses», «abril más intereses», etc.

Con respecto a los títulos, también son dos las formas de cotización, que son la cotización *percentual* y la cotización *por título*. Con la primera, el curso se refiere a 100 unidades nominales, mientras que en la segunda se indica el precio del título completo. También al enunciar las operaciones, unas veces se hace referencia al valor nominal y otras se indica la renta o interés que produce el nominal correspondiente.

Resta únicamente por examinar la *cotización de los títulos*

extranjeros, que pudiendo hacerse por cualquiera de las combinaciones de los cuatro sistemas anteriormente estudiados, presentan la especial circunstancia de poderse referir las cotizaciones a la moneda misma en que están extendidos los títulos, convirtiéndose después en la moneda nacional de la Bolsa a un *cambio fijo*. Este cambio, que más bien pudiera denominarse *cambio de reducción*, se establece en las Bolsas en el momento en que se admiten a la cotización los valores de que se trate, y puede por consiguiente, presentarse el caso de que valores cotizados en la misma moneda tengan cambios diferentes de reducción a moneda nacional. Además en la cotización al seco de los valores extranjeros, cuando se hace la cotización en la moneda de la Bolsa, hay que tener presente que los intereses corridos se calculan en la moneda del título y luego se reducen a la moneda de la Bolsa en base al cambio fijo a que antes nos hemos referido, lo cual origina dos cálculos separados e independientes.

501.—Operaciones al contado.—Las operaciones al contado son aquellas que se hacen entregando dinero y recibiendo títulos, o viceversa, constituyendo la forma más sencilla y natural de la contratación bursátil, siendo en su extructura idénticas a la compraventa de cualesquiera otra clase de bienes.

En las operaciones al contado, el pago del precio y la entrega de los títulos tienen lugar inmediatamente después de la ejecución del contrato, o en cuanto haya pasado el tiempo indispensable para la transmisión de los títulos. En la práctica y usos de las Bolsas, el tiempo de pago y recibo de títulos para operaciones al contado se entiende ser el que media hasta la primera sesión de Bolsa posterior al acuerdo de compraventa, salvo que por exigirlo los requisitos de transmisión haya de demorarse algo más.

Es de gran importancia técnica y jurídica la forma en que se dan las órdenes de Bolsa para cualesquiera clase de operaciones, y especialmente para las de contado; pero no entramos en su detalle porque para el cálculo nada importa una u otra forma.

Para las operaciones de contado no hay fijada limitación de cantidad, por lo que en la práctica no hay más límite que

la posibilidad material de entregar en títulos el nominal deseado.

502.—Operaciones a plazo.—Las operaciones a plazo consisten en una compraventa cuyo cumplimiento en pago y entrega del valor vendido, se prorrogan hasta una época determinada, que generalmente es el fin del mes en que se hace la contratación, y algunas veces también la mitad del mismo mes o el final del mes siguiente.

Las operaciones a plazo sobre valores pueden hacerse con el fin de adquirir los valores como se hace en la compra de toda riqueza, o ya para obtener un beneficio mediante la compraventa continuada en forma de especulación; o sea, que en los valores tienen las operaciones a plazo el doble carácter de las de moneda extranjera (**378**).

Estas operaciones son las que constituyen el fundamento de todas las de carácter de especulación en Bolsa, pues aunque también se hacen operaciones de contado con este carácter es solo como accidentales y para compensar la situación en que resulta el especulador.

La especulación que motiva la operación a plazo causará una ganancia para el comprador en el caso en que la cotización de los títulos haya ascendido, y de ahí la denominación de *alcista* con que se designa al comprador; por el contrario, el vendedor obtendrá ganancia cuando baje el precio o cotización de los valores, y de ahí que al vendedor se le llame *bajista*.

El contrato de compraventa a plazo en su pureza, y al que hasta ahora vamos refiriéndonos, es en realidad igual al contrato al contado, sin más que diferir el cumplimiento material, y es por esta circunstancia que se llama por algunos contrato de contado con vencimiento prorrogado.

Las negociaciones a plazo sólo pueden hacerse por múltiplos de una cantidad fijada por las leyes de cada Bolsa, cantidad que es siempre de importancia para limitar las especulaciones, además que por cantidades pequeñas serían de mayor importe los gastos de la operación que la ganancia que pudiera obtenerse en la especulación.

503.—Operaciones sobre diferencias. Las operaciones a plazo a que antes nos hemos referido son poco usadas,

siendo precisa la posesión de muy grandes capitales para especular con ellas.

La forma más corriente de contratar a plazo es la que pudiéramos llamar *compraventa simulada* o *en descubierto*, en la cual el que dice compra los títulos no tiene intención de recibirlos, y hasta algunas veces tampoco tiene el dinero necesario para ello, y el que se dice vendedor no posee los valores vendidos, siendo por consiguiente la intención de las dos partes la de especular con las *diferencias*. He aquí el porqué de la denominación de estas operaciones.

Operaciones sobre diferencias son por consiguiente, los contratos a plazo que se liquidan sin el cambio material de los títulos y del valor de los mismos; pero esta circunstancia usual no excluye el derecho del comprador para hacer que le sean entregados los títulos, ni el del vendedor de que le sean pagados totalmente los mismos títulos vendidos, siempre que una cualquiera de las partes exija el cumplimiento del contrato a plazo. En este último caso la operación que en principio era en descubierto se transforma en operación firme, aunque es más común designar como operaciones en firme todas las de que hasta ahora nos hemos ocupado, porque en todas ellas quedan las partes obligadas al cumplimiento del contrato.

504. – Operaciones dobles. – Las operaciones dobles son operaciones en firme que consisten en la combinación de una operación al contado y otra a plazo.

Suele definirse esta operación como el contrato constituído por una compra de valores mobiliarios al contado, con la venta simultánea de los mismos valores a plazo a la misma persona, y por un precio que se fija en el mismo momento de la compra.

La operación doble recibe el nombre de *report*, cuando tiene por origen la situación de un comprador a término que no quiere recibir los títulos comprados, y exigiendo su vendedor que la operación no se liquide por diferencias, sino que sea firme, necesita ese comprador una persona que le sustituya, lo que consigue por la operación doble, prorrogando su situación hasta otra fecha en la esperanza de que para entonces hayan tenido los valores un alza y pueda hacer ya la venta en firme de los títulos que no quiere recibir. Por el contrario, si

es la situación del vendedor la que motiva la operación doble entonces se llama *deport*, y consiste en que no pudiendo un vendedor a término liquidar una operación por diferencias, necesita quien haga por él la entrega de los títulos que no tiene, comprometiéndose a devolver igual cantidad en la fecha convenida, hasta que consigue que los valores hayan tenido una baja y pueda hacer ya la compra al contado más barato de lo que ha vendido en doble, con lo que resultarán terminadas las operaciones a plazo y dobles como resultaban en el caso de que el comprador podía convertir en firme la operación de diferencias que dió origen al report.

Las diferencias entre los precios de operaciones al contado y a plazo de una operación doble, se llama *precio de la doble* y también se designan con los nombres especiales de report y deport según la clase de operación doble a que se refieren. Estas diferencias o precios de las operaciones dobles son precisamente las cotizaciones de esta clase de operaciones, las que si no se indica nada, hacen referencia siempre al report.

505.—Operaciones con primas.—Son éstas de varias clases, aunque todas ellas consisten en convenir las partes contratantes que una de ellas entregará cierta cantidad llamada *prima* o también *opción* para variar el cumplimiento del contrato y hasta para dejar de cumplirle complementamente.

Como son de varias clases estas operaciones, iremos estudiándolas particularmente en la forma siguiente:

1.º *Prima de retirar.* - La operación que nosotros designamos con el nombre de prima de retirar es la que suele conocerse con los nombres de *dont* por los franceses, *call* por los ingleses, y *vorprämie* por los alemanes. Consiste esta operación en la compraventa a plazo con la facultad en el comprador de cumplir o no el contrato, pagando en este último caso una cantidad, la prima, y dando aviso al vendedor de su decisión en una fecha determinada, que se llama *día de la respuesta de primas*.

Si el comprador decide retirar los títulos dando cumplimiento al contrato a plazo, entonces se dice que *levanta la prima*, y si por el contrario decide rescindir la operación a plazo se dice que *abandona la prima*

2.º *Prima de entregar.*—Esta clase de primas se llama

put por los ingleses y *rückprämie* por los alemanes. Consiste en la opción por el vendedor con igualdad de circunstancias al caso anterior.

3.° *Prima doble.*—Se designa esta operación con los nombres de *option* y de *put and call* por los ingleses, *stellage* por los alemanes y *straddle* por los norteamericanos. Consiste en concertar la operación a plazo dando facultad al vendedor para decidir si ha de continuar vendedor, pagando la prima, o se convertirá en comprador de igual cantidad, pagando también la prima, pues por cualquiera de las dos operaciones por que se decida siempre resultará que abandona la prima de la otra.

4.° *Prima de cantidad libre.*—Se conoce con el nombre de *nochgeschäft* por los alemanes una operación de prima que consiste en conceder la facultad al que pague la prima (comprador o vendedor) para hacer que la operación se duplique, triplique, etc. La designación inglesa de esta operación es de *call of more* cuando el que tiene la opción es el comprador, y *put of more* cuando es el vendedor el que puede decidir el importe por que se ha de efectuar la operación.

5.° *Prima de plazo.* —Suele designarse esta clase de operaciones con el nombre de *operaciones a voluntad* y también en Francia con el de *mercado de descuento*, y consisten en convenir una prima para que la parte contratante que la pague pueda pedir el cumplimiento del contrato en la fecha que desee. Admite esta operación las combinaciones de fijar la fecha a partir de la cual pueda pedirse el cumplimiento, la fecha antes de la que debe hacerse, o dos fechas entre las cuales podrá elegirse la de liquidación y ejecución del contrato.

6.° *Primas reportables.*—Estas primas se contratan el día de la respuesta y han de ser contestadas el día de la liquidación. El efecto producido por una de estas primas en el contrato primitivo, es el de prorrogar la liquidación tanto de la operación como de la prima hasta el vencimiento próximo, es decir hasta el final de otro mes.

506.—Operaciones combinadas.—Las operaciones de especulación que reciben este nombre consisten en la reunión de varias operaciones de clases diferentes, casi siempre dos solamente, que se hacen con objeto de cubrirse en una situación que se juzga comprometida.

El número de operaciones de esta clase es poco menos que ilimitado, pues bastaría hacer el cálculo algebraico de las combinaciones que pueden resultar entre todas las operaciones estudiadas; y así los especuladores hacen en cada caso la combinación que está más en armonía con la defensa de sus intereses, según hemos de poder apreciar por medio del cálculo correspondiente.

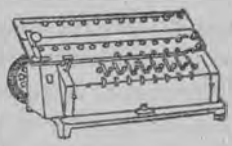
Cuando la combinación es de dos operaciones con prima, se dice que es *de prima contra prima*.

507. – Operaciones de pignoración.—Ya hemos dicho **(498)** que estas operaciones pertenecen al grupo de las que tienen por base las operaciones de Bolsa pero que en sí no son más que operaciones sobre valores.

En general, la pignoración de cualquier clase de bienes consiste en la entrega que se hace de ellos en garantía de un anticipo o por una concesión de crédito, y por consiguiente, las pignoraciones de valores podemos decir que son los contratos por los cuales se pone a disposición del propietario de los valores una cantidad determinada calculada en base al valor de los títulos que dicho propietario entrega en garantía.

Claro está que el valor de dichos títulos ha de ser el que les correspondería si se negociasen en Bolsa, y por consiguiente, la determinación del valor ha de ser hecha con arreglo a las operaciones de Bolsa, o fundamentada en ellas, según indica el grupo en que hemos colocado las operaciones de pignoración.

508.—Otras operaciones. – Con los valores mobiliarios se efectúan varias otras operaciones, todas fundamentadas en la negociación bursátil; tales son la *conversión*, que consiste en la transformación de un empréstito o clase de acciones en otros títulos de clase semejante pero de condiciones distintas; la *permuta*, que es el cambio de unos valores por otros, de cualquier clase que éstos sean; los *seguros*, que pueden ser, de transporte, de amortización o de cualquier otra clase y todos basados en el valor que corresponde a los títulos en las negociaciones de Bolsa.



LI

BOLSAS DE VALORES

509.—Definición de las Bolsas.—Es difícil definir la *Bolsa* por los diversos significados de esta palabra, pues con ella se indican el lugar en que se reunen los que han de tratar asuntos de comercio; la reunión misma anterior; el conjunto de las operaciones que se hacen en un día; la institución que facilita las transacciones de valores y mercancías, y hasta las oscilaciones de precios.

Cuando no se indica nada respecto al significado en que haya de tomarse la palabra Bolsa, se entiende que se refiere a la vez a la institución y al lugar en que se negocian los valores fiduciarios, es decir, los títulos representativos de valor, y en este sentido hemos de entenderla nosotros para el objeto de nuestro trabajo.

510.—Clases de Bolsas.—Hemos dicho que entenderíamos por Bolsa la institución y lugar de contratación de los valores, pero no sólo existen Bolsas de *valores* sinó que también las hay importantes en las que solamente se contratan *mercancías*.

La distinción de estas dos clases de Bolsas bien se ve que está en la materia sobre que se hacen las transacciones en ellas, y así en las Bolsas de valores se transmiten las monedas extranjeras y los títulos representativos de préstamos y grandes operaciones financieras y en las segundas se opera sobre mercancías disponibles o a entregar en cierto plazo, en condiciones prefijadas de calidad y medida, o sobre muestras.

De estas dos clases de Bolsas apenas hemos de ocuparnos

de las últimas, porque bajo el aspecto del cálculo sus operaciones son iguales a las mismas sobre mercancías hechas fuera de ellas y son las menos numerosas las que se hacen en las Bolsas, al paso que de las operaciones de Valores son pocas las que en ellas no se verifican, y cuando sucede ésto siempre en la operación se refiere a la Bolsa.

511.—Carácter de las Bolsas.—Las Bolsas tienen carácter de establecimientos públicos en la mayoría de los países, y como tales están consideradas por la legislación española (*), pero también son bastantes e importantes los países en donde tienen carácter de instituciones privadas, si bien siempre tiene sobre ellas el Gobierno cierta intervención especial de que carece en los demás mercados.

Consideradas las Bolsas bajo el punto de vista económico, son unos mercados en los que la organización ha alcanzado los mayores perfeccionamientos y donde las transacciones son más rápidas y originan menos gastos, teniendo además la garantía de un intermediario especial de grandes responsabilidades.

512.—Intermediarios en las Bolsas.—El desarrollo, la importancia y la fisonomía especial de las operaciones de los intermediarios de Bolsa, hacen que éstos sean un dato característico de la organización de estos mercados.

La misión de los intermediarios de Bolsa (agentes, corredores, etc.), es la de relacionar al comprador y vendedor hasta hacer que lleguen a un acuerdo; la de contratar en nombre de sus comitentes, tanto para compra como para venta o cualquier otra clase de operación sobre valores; y la especial de dar carácter oficial a las operaciones intervenidas, gozando a este respecto del privilegio de fe pública como notarios mercantiles.

La profesión de intermediario de Bolsa puede ser objeto de monopolio, como lo es en España, o bien tener régimen de libertad, según las costumbres y legislación especial de cada país.

513.—Colegios de Intermediarios.—Recibe el nombre de *colegio* la asociación de intermediarios, prescrita por la ley,

(*) Código de Comercio, artículo 64.

cuando tienen monopolio de intervención, y señalada por los reglamentos de cada Bolsa aunque haya libertad o sean Bolsas privadas.

El colegio de intermediarios tiene facultades especiales respecto a la admisión de los valores a la contratación, pues siendo responsables en las operaciones que intervienen y además consejeros de muchos de sus comitentes, la admisión o denegación de contratos oficiales de Bolsa para los valores, constituye ya un consejo general y una limitación a sus responsabilidades.

Para el gobierno del Colegio existe una *Junta sindical* que además gobierna la Bolsa en la mayoría de los casos e interviene para la admisión de los nuevos agentes.

514.—Admisión de valores a la cotización.—Los valores sobre que se opera en las Bolsas son de admisión forzosa según las legislaciones que las regulan o de admisión facultada al gobierno de la misma Bolsa.

La admisión facultativa puede a su vez ser exclusiva de la misma Bolsa o necesitar conjuntamente informe de otras entidades mercantiles y hasta del propio Gobierno de la Nación; pero de cualquier forma que sea hecha la admisión, los valores admitidos son los únicos que se incluyen en las cotizaciones oficiales sobre las cuales se hacen las transacciones y las operaciones sobre valores que antes hemos conocido.

515.—Mercado libre.—Con el nombre de mercado libre o *Bolsín* se conoce la organización gemela de la Bolsa en la que se hacen operaciones idénticas a la de ésta, con la sola diferencia de hacerse, ya sobre valores no admitidos a la cotización, ya por personas que no poseen carácter oficial de intermediarios, o bien en horas diferentes a las de contratación en la Bolsa.

Tiene gran importancia la existencia del mercado libre porque completa la institución de la Bolsa, hallándose formado en mayoría por Bancos y banqueros, que también hacen operaciones sobre valores fuera de Bolsa y a las que hemos de referirnos al estudiar los cálculos que necesitan las diversas operaciones.

516.—Liquidaciones.—Las operaciones a plazo, ya hemos dicho que se liquidan o cumplen en una fecha preestablecida, y por los usos bursátiles se han establecido casi exclusivamente los finales de mes; salvo ciertas excepciones motivadas por la marcha misma de los mercados, a las que se llama liquidaciones provisionales, y claro está que en cada final de mes son muchas las operaciones cuyo cumplimiento ha de tener lugar, por lo cual se efectúan los cumplimientos de contrato por

el sistema llamado de compensación mediante la intervención de la Junta del colegio de intermediarios y algunas veces de una organización especial llamada *cámara de compensación*.

Para estas liquidaciones se establece para cada contratante una doble cuenta por títulos y por dinero que haya de entregar y recibir, haciendo que las cantidades, tanto de títulos como de dinero, en que resulte han de entregar y recibir al mismo tiempo, sólo haga entrega o reclame se le entregue la diferencia. Estas cuentas son resumidas por agentes y banqueros, que a su vez, sólo harán entrega o recibo de las diferencias entre todas las cuentas parciales de que son comisionistas o contratantes.

Con este procedimiento se obtiene una gran simplificación en las operaciones, porque encargándose la Junta o Cámara de recoger las cantidades de títulos y dinero que corresponda entregar a los que tienen diferencias en contra, los entrega después a los que tienen las diferencias a favor, evitando transportes de títulos y dinero.

517.—Curso de compensación.—El curso de compensación es el que se establece en una liquidación general o provisional de ciertos valores para prorrogar las operaciones de report hasta la fecha de la nueva liquidación.

El report que se verifica por medio del cambio de compensación es más bien una simulación de la operación, cuya esencia está en dos contratos separados de compraventa: uno que es la segunda parte del que se liquida y por el cual quedan canceladas las obligaciones con el pago de las diferencias, y otro que se aplaza hasta la nueva liquidación.

Por esta característica del seudo report a que se refiere el cambio de compensación es por lo que los alemanes le denominan *operación de prolongación* y los ingleses *de continuación*.

518.—Remuneración de los intermediarios.—La remuneración que cobran los intermediarios de Bolsa por sus funciones recibe el nombre de *corretaje* y consiste en una cuota percentual sobre el importe de la operación con un mínimo para las operaciones de poca importancia.

Estas tarifas pueden consultarse en la *tabla* **XLIV.**

519.—Timbre de los contratos.—Los contratos que se celebran sobre

valores mobiliarios han de estar extendidos en papel especial timbrado, para satisfacer así un impuesto por cada una de las operaciones que se realicen.

El detalle se encuentra en la *tabla* **XLIV**.

520.—Organización y usos de las principales Bolsas.—Sería hacer esta parte de nuestro trabajo casi interminable si fuéseinos a detallar la organización y usos de las Bolsas, por lo que hemos de limitarnos a consignar aquellos datos necesarios para los cálculos de las operaciones, y aquellos otros que puedan ser necesarios para la ejecución de otras.

Presentamos esta organización resumida en la *tabla* **XLVI**.

521.—Boletines de cotización.—Los boletines de cotización son las relaciones de precios de todas las operaciones de Bolsa, incluso de los cambios extranjeros, según tenemos dicho **(359)**, y en ellos aparecen los precios de las diferentes clases de operaciones, ya en secciones separadas, ya en columnas diferentes.

También las cotizaciones tienen separación para los valores públicos y las acciones y obligaciones de sociedades, separando además los que son nacionales de los que sean extranjeros.

De igual modo que los listines de cambio los boletines de cotización pueden ser oficiales o particulares, si bien predominan los primeros publicados por las Bolsas, y de éstos toman los particulares los datos para publicar sólo aquella parte especial del que le publica o de utilidad más general.

La lectura de estos boletines no ofrece particularidad ninguna, puesto que estando encabezadas las columnas, en éstas hallaremos los detalles de clase de título, interés o dividendo, serie o fecha de emisión, desembolso, etc. y los precios alcanzados en las operaciones contratadas y hasta el precio pedido por el vendedor, llamado precio de papel, y el ofrecido por el comprador o precio de dinero, cuando no se realizó el contrato por diferencia en estas dos clases de precios.



LII

OPERACIONES DE BOLSA AL CONTADO

522.—Elementos de cálculo. —El problema fundamental de cálculo en cualquiera clase de compraventa de valores consiste en la determinación del importe de la compra o del producto de la venta.

Los elementos que han de intervenir en este cálculo han de ser necesariamente la cantidad de unidades compradas o vendidas, que en las operaciones de Bolsa se llama *nominal* y le representaremos por N en las fórmulas; el precio a que se hace la compraventa, que en este caso es el *cambio* o *cotización* que llamaremos C; y los *gastos* que origine el cumplimiento del contrato. Respecto a éstos es preciso hacer constar que los hay en relación o proporción con el importe y otros que son independientes del mismo, llamando así g a esos gastos proporcionales y G a los gastos fijos.

En algunos casos la cantidad comprada o vendida se expresa por la *renta nominal* R que es el importe del interés de los empréstitos (**490**) durante un año al tanto t de dicho interés.

523.—Cotización tal cual.—Recordaremos que la operación de multiplicar sirve para determinar el importe o valor de cierto número de unidades cuando se conoce el de una de ellas, y como la cotización C sabemos que es la expresión de este precio referido a cien unidades, el precio de una será la centésima del cambio y el importe de la compraventa para cotización tal cual y perceptual llamando E a ese importe o efectivo, será

$$E = \frac{NC}{100} \qquad [1]$$

y en esta expresión el nominal será el que esté desembolsado en el caso de tratarse de acciones sin liberar completamente (**494**).

En el caso en que en vez del nominal se exprese su renta anual, hallaremos dicho efectivo recordando que es (**212**)

$$R = \frac{Nt}{100}$$

y que por consiguiente el valor del nominal debiera ser

$$N = \frac{100R}{t}$$

valor que sustituido en la fórmula [1] nos dará

$$E = \frac{100R}{t} \times \frac{C}{100} = \frac{RC}{t} \qquad [2]$$

Cuando la cotización fuese por título, claro está que en vez de ser 100 la base del cambio sería ésta el nominal del título, al que representamos por N_t, teniendo para expresión fundamental del valor efectivo en este caso

$$E = \frac{NC}{N_t} \qquad [3]$$

la que se simplificará haciendo que el cociente $N \div N_t$ sea T que representa el número de títulos comprados o vendidos, teniéndose entonces para valor efectivo una simple aplicación de la operación de multiplicar que hace

$$E = TC \qquad [4]$$

sin que nunca en este caso se exprese el nominal por la renta total como sucedió antes.

Podemos comparar las fórmulas [1] a [3] con la que obtuvimos para el cambio extranjero en plaza incierta (**364**) y como entonces tendremos para los demás elementos de la fórmula en los tres casos considerados

COTIZACIÓN PERCENTUAL

POR NOMINAL

$$N = \frac{100E}{C} \qquad C = \frac{100E}{N}$$

POR RENTA

$$R = \frac{tE}{C} \qquad C = \frac{tE}{R} \qquad t = \frac{E}{RC}$$

COTIZACIÓN POR TÍTULO

$$N = \frac{N_t E}{C} = TN_t \qquad C = \frac{N_t E}{N} = \frac{E}{T} \qquad T = \frac{E}{C}$$

Ejemplos: 1) —Hallar el valor de 85.000 pesetas nominales de Deuda perpetua española del 4 °/₀ exterior que se cotizan a 82'70 °/₀.

Por la aplicación de la primera fórmula tenemos:

$$E = \frac{85000 \times 82'70}{100} = 70295 \text{ pesetas.}$$

2)—¿Cuántas acciones del ferrocarril del Norte de España se pueden adquirir con 25.000 pesetas si la cotización en Barcelona es de 507 pesetas por cada una?

Como se trata de una cotización por título hemos de servirnos de la última fórmula obteniendo

$$T = \frac{25000}{507} = 81'45 \text{ acciones} <> 81.$$

La equivalencia que aparece en el resultado de esta operación es representativa de las posibilidades prácticas de cumplimiento del mismo resultado, pues claro está que no ha de ser posible comprar fracciones de acción, y por consiguiente, sobrará una cantidad que sea el valor de esos 45 céntimos de acción, comprando únicamente las 81 que es la parte entera.

Por la gran sencillez de las demás fórmulas prescindimos de ejemplo resuelto, ya que se trata de simples aplicaciones de la multiplicación y división.

EJERCICIOS *números* **940** al **943; 957** y **CCCXXXI** al **CCCLII**, además que comprenden también este caso los indicados para cuando haya gastos.

524. – Cotización al seco. – 1.° *Cotización percentual.*— La variación que hemos de establecer en las fórmulas anteriores será la inclusión de los intereses corridos calculados al tanto según impuestos que ya conocen nuestros lectores (**491**), y añadir al cambio cotizado los intereses de 100 unidades durante los días perdidos modificación que solo hacemos en la fórmula [1] porque la cotización al seco nunca se halla en el caso de expresarse la cantidad por la renta anual.

Según ésto, la fórmula fundamental para cotización percentual es la siguiente:

$$E = \frac{N(C+I)}{100}$$

y si ahora calculamos los intereses I que corresponde a esas 100 unidades al tanto con impuestos (**491**), o al adoptado en la Bolsa (**500**), tendremos para dicho interés (**212**)

$$I = \frac{100nt_i}{100k} = \frac{nt_i}{k}$$

cuyo valor deberemos sustituir en la fórmula obteniendo

$$E = \frac{N\left(C + \frac{t_i n}{k}\right)}{100}$$

en la que se ve en seguida que será mucho mejor hacer el cálculo por análisis que aplicar la fórmula, por lo que aconsejamos se haga así en todos los cálculos directos, y sólo valerse de la fórmula para los indirectos que vamos a estudiar.

Si ahora despejamos el valor del nominal o del cambio que son los únicos que podemos necesitar calcular tendremos para estos cálculos indirectos

$$N = \frac{100E}{(C+I)} = \frac{100E}{\left(C + \frac{t_i n}{k}\right)} \text{ y } C = \frac{100E}{N} - I = \frac{100E}{N} - \frac{t_i n}{k}$$

Conocida la cotización al seco puede necesitarse calcular la equivalente tal cual, o viceversa, y como en tales casos se trata solo de una suma de cambio e interés en el primero y de una resta en el segundo nos abstenemos de nuevos detalles.

Ejemplos: 1) Las obligaciones de una sociedad alemana productoras de un interés de 5 °/₀ sobre el que grava un impuesto del 10 °/₀ y cuyos cupones se pagan en 1.° de abril y 1.° de octubre, se cotizan el 15 de agosto a 147 °/₀. Calcular el importe de una compraventa de 40.000 marcos nominales.

En este caso desconocemos el valor de ti y al calcularle según ya sabemos **(491)** nos da: $ti = 4'50$ °/₀, y como en Alemania se hacen los cálculos por el año comercial **(206)**, tendremos todos los elementos de la fórmula con los valores siguientes:

$N = 40.000$, $C = 147$, $ti = 4'50$, $n = 135$, $k = 360$

con lo cual la solución comprenderá las dos operaciones de cálculo del interés modificativo de la cotización y luego del efectivo de la compraventa, teniendo para la primera

$$I = \frac{4'50 \times 135}{360} = 1'6875 \text{ marcos}$$

puesto que debiendo ser multiplicado este número por otro bastante grande hemos de tener en cuenta las cifras necesarias para que el error no llegue al límite preciso; y para el importe pedido

$$E = \frac{40.000 \times (147 + 1'6875)}{100} = 59.475 \text{ marcos}$$

Si hubiéramos procedido por análisis el resultado obtenido sería:
Efectivo por la cotización

$$\frac{40.000 \times 147}{100} = 58.800 \text{ marcos}$$

Interés que debe añadirse por ser cotización al seco

$$\frac{40.000 \times 4'50 \times 135}{36.000} = 675 \text{ marcos}$$

y por suma de los dos resultados parciales obtendríamos como antes

$$E = 58800 + 675 = 59475 \text{ marcos.}$$

2) Hallar el nominal de coronas danesas en Deuda 4 °/₀ que pueden adquirirse en 24 de marzo en la Bolsa de Copenhague con 20.700 coronas efectivas, si la cotización es de 87'25 °/₀ y el cupón trimestral venció en 1.° de febrero.

El valor de los elementos que han de intervenir en la fórmula han de ser

$$E = 20.700, \quad C = 87'25, \quad i = 4, \quad k = 360 \quad n = 54$$

con los cuales calcularemos el valor del interés modificativo del cambio al seco para el que encontraremos:

$$I = \frac{4 \times 54}{360} = 0'60 \text{ coronas}$$

y de aquí aplicaremos la fórmula que da el nominal, teniendo

$$N = \frac{100 \times 20.700}{87'25 + 0'60} = 25.500 \text{ coronas}$$

en cuyo resultado hay que tener en cuenta que se desprecia el valor que sigue a las centenas porque no existen títulos que permitan la adquisición de nominales menores de ciento

2.° *Cotización unitaria.*—Cuando la cotización se hace por título es preciso tener en cuenta que los intereses no se refieren a tanto por ciento, como hemos hecho en el caso anterior, sino que son un número de unidades por cada título;

pero como no restan ya cotizaciones al seco por título, dejamos de hacer el estudio matemático especial.

EJERCICIOS *números* **CCCLIII** al **CCCLXII,** siendo casos que comprenden al actual los ejercicios indicados para las Bolsas extranjeras, si bien tienen gastos.

525. — Gastos en las operaciones de contado. — Ya conocemos la intervención que en las operaciones de Bolsa tienen los mediadores especiales que dan carácter oficial a las transacciones de las mismas, y la remuneración que cobran por su servicio, por lo cual, éste ha de ser el primer gasto, el que como la misma tarifa indica se denomina *gasto de corretaje*.

Pero además de este gasto, las más veces proporcional a la importancia de la operación efectuada, hay otros como los de correo y transporte de los valores comprados o vendidos, timbres y otros impuestos sobre operaciones de Bolsa, telegramas y remesa de fondos, todos los cuales si bien pueden tener cierta relación con el importe de la operación, hay algunos que no guardan relación ninguna, y así deberán quedar incluídos en un grupo especial que llamaremos *gastos fijos*; y complemento de estos desembolsos que originan las operaciones de Bolsa son las *comisiones* que a veces cobran los Bancos cuando se hacen las operaciones por mediación de ellos.

Esta comisión va muchas veces incluída en un solo concepto con el corretaje, y aunque para los efectos del resultado final ha de quedar unida a éste también hay veces que se cobra no sobre la misma cantidad que el corretaje, sino sobre la cantidad ya modificada por este gasto, por lo que será preciso tenerlo en cuenta al hacer los cálculos.

La comisión es siempre una cantidad por ciento o por mil, que como cálculo independiente de los demás de la operación sabemos hacer. Los gastos fijos, si son de remesa de fondos corresponderán a lo que ya conocen nuestros lectores (**344**); si es el telegrama constituye una cantidad fija que nada puede decirse de ella; si son los gastos de correo por el transporte, hay que diferenciar el franqueo como carta, o el especial de valores, el certificado, y el seguro como compensación del

riesgo de pérdida, pudiendo hacerse este seguro a Compañías especiales en vez de pagarse como franqueo al Estado. En cuanto al timbre e impuestos el primero es fijo para cada operación y el segundo unas veces es fijo y las más percentual como son las comisiones.

526.—Cálculos cuando hay gastos.—La forma práctica de hacer estos cálculos consiste en proceder por análisis, calculando cada elemento separadamente y uniéndoles por suma o resta según corresponda, porque la fórmula para tales casos, sobre ser engorrosa, larga y de fácil equivocación, no puede ser única para todos, pues según hemos manifestado, la comisión de Banca puede estar unida en una sola cantidad con el corretaje, puede estar indicada por separado refiriéndose al mismo valor que el corretaje, o puede indicarse por separado refiriéndose a la vez a cantidad distinta, según dijimos.

La *fórmula completa* con todos los gastos habría de ser, para la cotización tal cual y percentual

$$E = \frac{NC(1 \pm c_1)(1 \pm c_2)}{100} \pm G = \frac{NC}{100}(1 \pm c_1)(1 \pm c_2) \pm G$$

en la que c_1 y c_2 representan respectivamente las comisiones y corretajes que se refieran al valor de la compraventa sin gastos, y a este mismo valor después de añadirle o quitarle los primeros gastos, siempre reducidas a tanto por uno, aun que también pueden referirse a tanto por ciento introduciendo en el denominador tantos factores 100 como binomios de la forma $100 \pm C$ haya en el numerador; y G es el conjunto de los gastos que hemos llamado fijos; señalando la segunda disposición de la fórmula cuáles son las operaciones que habrían de efectuarse por el método analítico. Pero ni aún en esta forma puede servir la fórmula que nos ocupa, puesto que algunos de los gastos fijos se aplican al importe antes que la segunda clase de comisión, como sucede por ejemplo, con el timbre de las pólizas de Bolsa que siendo gasto fijo queda sumado al importe o restado del producto antes de aplicarle la comisión que representamos por c_2, teniendo así un error que si prácticamente podría despreciarse, quita toda fuerza de aplicación a la fórmula, porque prácticamente se hacen estos cálculos al mismo tiempo de redactar los documentos corres-

pondientes (pólizas, liquidaciones, cuentas) y por consiguiente por el método analítico. Es, pues, indispensable desechar el sistema de fórmulas que no pudiendo servir para todos los casos que exige la naturaleza contractual de todas las operaciones mercantiles, son además científicamente erróneas en algunos de estos casos.

En cuanto a los otros casos de cotización por título y al seco, claro está que sucederá lo mismo, y que tampoco ha de ser útil el empleo de la fórmula.

Ya que sólo es posible prácticamente el cálculo de estas operaciones por el método analítico y a medida que se van redactando los documentos que exige la operación, hay que tener presente que la intervención de los agentes se hace constar en las pólizas en que figurarán como partidas el importe de la compra según el cambio y forma de cotización ya conocida, el importe del corretaje (*) y el del timbre de la póliza, y después, de ésta se sirve el Banco que haya hecho la operación por cuenta de su cliente, bien poniendo como primera partida de su liquidación el importe de la póliza, o sólo la primera partida de ella, y calculando luego su comisión sobre esta primera partida de la liquidación, a lo que después se añaden los gastos fijos.

Cuando se quiere tener en cuenta los gastos de movimiento de fondos, el efectivo que resulta según los cálculos anteriores se considera como el valor de E en operaciones por apunte (**346**), y se calcula el nominal del efecto que correspondería a este efectivo en la forma conocida.

Ejemplo: Se adquieren en la Bolsa de Madrid 45 acciones del Banco de España por mediación del Crédit Lyonnais, para un cliente de este establecimiento. La cotización de las acciones es de 514 $^{0}/_{0}$, y además de los gastos propios de la intervención del Agente se origina la comisión $^{1}/_{2}$ $^{0}/_{00}$ que cobra el Crédit, y los gastos de la reposición de fondos hecha por orden de abono en cuenta, que cuesta el $^{1}/_{4}$ por mil y el timbre del resguardo correspondiente. Se remite por correo asegurado el extracto de inscripción de las acciones. Averiguar el coste total de estos títulos, siendo cada acción de 500 pesetas nominales completamente desembolsadas.

Procediendo por análisis, las operaciones que comprende el ejemplo a resolver son las de determinación del efectivo sin gastos, y después sumar

(*) Cuando este corretaje no es proporcional constituye un nuevo entorpecimiento para aplicación de la fórmula, haciéndola más errónea.

a éste por tratarse de compra, los correspondientes de corretaje, timbre, comisión, remesa de fondos y correo.

Para el cálculo del efectivo tendremos

$$E = 45 \times 5 \times 514 = 115650 \text{ pesetas.}$$

El resto de los cálculos dándoles la disposición práctica conveniente será el que sigue:

Efectivo según el Cambio.	Pesetas.	115650'00
Corretaje a razón del 1'50 °/₀₀	»	173'48 (*)
Timbre.....	»	30'00
Total de la póliza.....	»	115853'48
Comisión del Crédit Lyonnais, 0'50 por mil sobre el total de la póliza.....	»	57'92
Gastos de correo, a razón de franqueo de carta, certificado y seguro de 50.000 pesetas a 0'20 °/₀₀.	»	10'60
Seguro del resto del valor en una Compañía (**) al mismo tipo 0'20 °/₀₀ sobre pesetas 66.000.	»	13'20
Importe de la liquidación del Crédit.....	Pesetas	115935'20

y sobre este importe hemos de calcular los gastos de reposición de fondos que serían de

$$115935'20 : 4000 = 28'98 \text{ pesetas}$$

a las que se añadirían los 0'25 de timbre de resguardo del crédito en cuenta.

Si hubiésemos empleado la fórmula, el importe de la liquidación sería el que resultase de los valores siguientes de los diferentes elementos

$N = 22.500$, $C = 514$, $c_1 = 0'0015$, $c_2 =$ comisión y seguro $= 0'0007$
$G =$ timbre, certificado y franqueo carta $= 30 + 0'30 + 0'30 = 30'60$

lo que daría por resultado 115935'15 pesetas que se diferencia del resultado obtenido anteriormente en 0'05, error que puede despreciarse, pero que indudablemente en donde existe es en la aplicación de la fórmula, y que proviene del $^1/_2$ °/₀₀ de comisión sobre las 30 pesetas de timbre y de la necesidad del redondeo para el seguro.

La aplicación de la fórmula es pues, menos ventajosa que el cálculo analítico, porque aún en el caso todo lo más favorable para el resultado, como es el que hemos considerado, sólo nos dá una cantidad, sin el detalle de las parciales que se necesitan para cumplir las condiciones contractuales de la operación, en cuanto han de rendirse cuentas del resultado a una de las partes contratantes. En los casos desfavorables,

(*) En muchos casos se redondean en la práctica estas cantidades aproximándolas en menos de media décima.

(**) Es indispensable esta forma del seguro porque el correo no admite más de 50.000 pesetas en cada sobre.

como de corretajes mínimos, corretajes por título en cantidad fija, u otros semejantes, es todavía más desfavorable el empleo de la fórmula.

EJERCICIOS *números* **944**; **946** al **948**; **952**; **956**; **959**; **961** al **963**; **965**; **966**; **968**; **CCCLXIII** al **CCCLXIX**, además de todos los que se indican sin gastos, considerando en éstos los gastos de la intervención oficial.

PROBLEMAS combinados con cuestiones anteriores, los ejercicios *números* **1423**; **1439**; **1443**; **1449**; **1453**; y **1458**.

527.—Elementos que intervienen en la fórmula con gastos; cálculo de los mismos.—Bajo el punto de vista científico es igualmente importante la determinación de cualquiera de los elementos que integran el costo de la compra o producto de la venta, pero en la práctica no ocurre nunca calcular más que el nominal que se puede adquirir o es preciso vender, conociendo el efectivo y los gastos, pues éstos son cantidades fijadas de antemano por las tarifas correspondientes, y en algunas pocas veces también se ofrece el calcular el cambio de ciertas operaciones más para efectuadas que ya cumplidas.

Teniendo presente que el nominal sólo es necesario calcularle con aproximación (**523**), por defecto para el caso de compra y por exceso cuando se trate de venta, el error que da la fórmula queda compensado con exceso por esa aproximación, siendo por consiguiente ya de aplicación útil, aunque sea más útil todavía el método analítico.

La fórmula que daría el nominal será:

$$N = \frac{100(E \mp G)}{C(1 \pm c_1)(1 \pm c_2)} \qquad [1]$$

cuando la cotización se haga tal cual y por ciento, teniendo un resultado en moneda como nominal;

$$R = \frac{t(E \mp G)}{C(1 \pm c_1)(1 \pm c_2)} \qquad [2]$$

en el caso de cotización tal cual y percentual, con el nominal expresado por la renta y resultado que indicará la renta del nominal;

$$T = \frac{E \mp G}{C(1 \pm c_1)(1 \pm c_2)} \qquad [3]$$

cuando la cotización tal cual sea por título, siendo el resultado el número de títulos; y

$$N = \frac{E \mp G}{(C + I)(1 \pm c_1)(1 \pm c_2)} \qquad [4]$$

para la cotización al seco.

La aplicación del *método analítico* a la resolución de estos problemas exige se proceda por orden inverso, resolviendo cada problema parcial, y teniendo presente que los de tanto por cuanto se refieren al caso en que se conoce la suma o diferencia del número y su tanto por cuanto y se trata de hallar este número (**6**).

El cálculo del cambio tal cual, se hace por las fórmulas que anteceden en que respectiva y mútuamente se sustituyan en ellas el nominal (N, R o T) por el cambio, o bien por análisis en forma semejante a la del nominal y conforme al procedimiento del ejemplo que resolvemos.

Ejemplo: Disponemos de 125.000 pesetas que deseamos invertir en acciones de una Sociedad que tiene desembolsado el 80 % y se cotizan a 136'50 %, siendo los gastos de la operación los propios de la intervención oficial, una comisión supletoria del 2 ‰ y el correo. Hallar el nominal de acciones que se puede adquirir, si cada una de éstas es de 500 pesetas nominales.

Es necesario ante todo tener en cuenta que por no ser acciones completamente liberadas, para los efectos del valor de cada una en Bolsa sólo hemos de tener presente la parte desembolsada, que a razón del 80 % de 500 pesetas queda reducida la parte que se adquiere a 400 pesetas por acción.

Con este elemento empezaremos por determinar aproximadamente el franqueo fijándole en 55 pesetas, con lo que dispondremos para la adquisición de 124.945 pesetas, de las cuales se satisfarán los gastos de seguro de la remesa de títulos a razón de 0'05 pesetas por cada 250 aseguradas (el 0'20 ‰ aproximadamente), (*) y resolviendo este problema de tanto por cuanto queda disponible para los demás gastos y compra

$$\frac{124945 \times 1000}{1000'20} = 124920 \text{ pesetas}$$

sobre las que operaremos en la misma forma respecto de la comisión supletoria y tendremos:

(*) Por causa de esta aproximación siempre se dará el resultado redondeado por medias décimas, que es además la forma en que se paga el franqueo del seguro.

$$\frac{124920 \times 1000}{1002} = 124670'66 \text{ pesetas}$$

de las cuales corresponderá pagar el timbre de la póliza de Bolsa, que ascenderá a 50 pesetas, y resta para compra y corretaje

$$124670'66 - 50 = 124640'66 \text{ pesetas}$$

sobre las que se hará el último cálculo de tanto por cuanto para deducir el corretaje, que debe ser de $1\ ^1/_2\ ^0/_{00}$, y se tendrá:

$$\frac{124640'66 \times 1000}{1001'50} = 124453'98 \text{ pesetas (*)}$$

que tenemos disponibles para adquirir las acciones según el cambio, luego el nominal desembolsado que adquiriremos será:

$$\frac{124453'98 \times 100}{136'50} = 91175 \text{ pesetas,}$$

y el nominal que por fin podríamos comprar sería:

$$\frac{91175 \times 100}{80} = 113968'75 <> 113500 \text{ pesetas nominales}$$

para que el resultado esté de acuerdo con la posibilidad práctica de ejecución, teniendo por tanto como solución del problema

$$113500 : 500 = 227 \text{ acciones.}$$

EJERCICIOS *números* **949** al **951**; **953** al **955**; **957**; **958**; **964**; **971**; **CCCLXX** al **CCCLXXX**.

EJERCICIOS combinados de compra y venta, los *números* **960**; **967**; **970**; **972**; **CCCLXXXI** al **CCCLXXXV**.

PROBLEMAS combinados con cuestiones de capítulos anteriores, los ejercicios números **969**; **1427**; **1429**; **1437**; **1438**; **1440**; **1441**; **1450**; **1452**; **1457**; **DLII**; **DLXI** al **DLXV**; **DLXXI** y **DLXXII**.

Observación.—Para evitarse los errores que pueden provenir de las divisiones inexactas, sería conveniente que en vez de operar para cada operación con el resultado de la anterior, se operase con el quebrado indicado, haciendo al final todas las multiplicaciones primero y después la división por el producto de los divisores; si bien habrá casos en que los gastos fijos dificulten llegar hasta el final en estas operaciones indicadas, lo cual se salvará con hacer la división cada vez que se llegue a la introducción de un gasto fijo, y así el número de errores queda disminuído en cuanto es posible.

(*) Si el corretaje fuese un tanto por título se introducirá en los cálculos al mismo tiempo que el timbre, o se determinará aparte el tanto por mil que representa según la cotización, teniendo cuidado del número de cifras necesarias al límite del error del cálculo.

Regla de conjunta.—Sin la dificultad que origina la introducción de los gastos fijos en el preciso momento en que deben satisfacerse, se formaría una regla de conjunta en la que resultasen como segundos miembros de las igualdades los cuantos respectivos, y como primeros miembros las sumas o restas del cuanto con el tanto, sucediendo con estas conjuntas lo mismo que con la fórmula, que no tienen carácter de generalidad, y además su resultado solo es aproximado al verdadero. También las conjuntas adolecen del defecto de la dificultad por causa de la misma denominación genérica de los dos miembros de cada igualdad, pues en cualquier caso serán pesetas antes o después de aplicarlas el tanto por cuanto.

528.—Operaciones en Bolsas extranjeras.—Las operaciones de Bolsa son susceptibles de hacerse lo mismo en moneda extranjera que en moneda nacional, si bien sólo nos hemos referido a esta última hasta ahora.

Por lo que respecta a España son cálculos especiales de algunas operaciones en Bolsas extranjeras, las de cotizaciones al seco, ya que tales operaciones no se hacen en nuestras Bolsas, pero haciendo el estudio con el carácter de generalidad que venimos empleando, hemos de hacer separación de los resultados expresados en la moneda que es nacional en la Bolsa de que se trate, y resultados expresados en moneda diferente.

En cuanto a los resultados que hayan de expresarse en la misma moneda de la Bolsa, es indudable que los cálculos serán los que ya nos son conocidos por los estudios anteriores, y relativamente a esas otras operaciones cuyos resultados han de indicarse en moneda diferente, constituyen una combinación de operaciones de Bolsa y de compraventa de moneda extranjera.

Para hallar el costo de una adquisición de valores en moneda nacional, tendremos que hacer el cálculo de la cantidad de moneda extranjera en la forma que hemos estudiado en todo este capítulo, y después hallar la moneda nacional equivalente según el cambio (**364**).

Ejemplo: Deseamos conocer el coste de 25 acciones de la Compañía del ferrocarril P. L. M. cuya cotización en la Bolsa de París es de 1475, siendo el cambio de Madrid con Francia 39'80.

Como se trata de la Bolsa de París, la cotización anterior se refiere al valor de cada título, siendo el corretaje de 3 $^{0}/_{00}$, por lo que el costo de las acciones en francos franceses será:

$$25 \times 1475(1 + 0'003) = 36985'65 \text{ francos,}$$

y teniendo en cuenta la cotización de los francos, tenemos para el costo de las acciones en pesetas

$$\frac{36985'65 \times 39'80}{100} = 14720'30 \text{ pesetas}$$

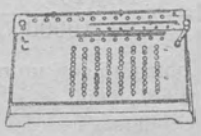
con la aproximación en menos de media décima.

Muchas veces los intereses o cupones de los valores en moneda extranjera son reducidos a moneda nacional al cambio del día en que se hace el cobro, o se recibe el aviso de cobro hecho en el extranjero, y conviene tener en cuenta el interés que producen estos valores, lo cual ha de ser forzosamente distinto para cada una de las cotizaciones de la moneda extranjera, así que, al igual que antes, tendríamos necesidad de multiplicar por el cambio de la moneda extranjera la renta que se encuentre producen los valores extranjeros.

EJERCICIOS *números* **973** al **984; CCCLXXXVI** al **CCCXCII**.
PROBLEMAS combinados, los *números* **1426; 1455** y **1456**.

529.—Cambio medio.—En las contrataciones bursátiles es muy frecuente necesitar el conocimiento de los promedios de costes y de cotizaciones a los cuales se denomina cambio medio. Estas cuestiones son por completo idénticas a las que ya estudiamos en el cambio extranjero **(371)** por lo que el lector tendrá por repetido aquí lo que entonces dijimos.

EJERCICIOS *números* **945;** y **CCCXCIII** al **CD.**



LIII

RENTAS Y BENEFICIOS

530.—Renta que producen los valores.—Es la renta el importe total de intereses producidos por los valores que se poseen, renta que desde luego ha de ser determinada en función de los diferentes tantos que nos son conocidos (**491**), teniéndose los dos casos de cálculo según el nominal o según el efectivo.

1.° *Renta en función del nominal.*—Este caso consiste en la aplicación del tanto por ciento según impuestos, por lo que llamando R a dicha renta se tendrá:

$$R = \frac{Nt_i}{100}$$

y como el tanto que se determinará al enunciar la clase de valores ha de ser el tanto nominal, la fórmula se transforma en esta otra

$$R = \frac{Nt_n(100 - i)}{10000}$$

Ejemplo: ¿Qué renta se obtendrá con un nominal de 86.000 pesetas en obligaciones de Peñarroya al 6 °/₀ anual, si el impuesto que corresponde a estos valores según la ley de utilidades es del 5'75 °/₀?

Los valores a intervenir en el cálculo son:

$$N = 86.000, \qquad t_n = 6, \qquad i = 5'75$$

y la renta pedida será también:

$$\frac{86000 \times 6(100 - 5'75)}{10000} = 4863'30 \text{ pesetas.}$$

2.° *Renta en función del efectivo.*—En este caso la renta será el tanto por ciento del efectivo que indica el tanto real, ya

calculado, o sea, que se tendrá:

$$R = \frac{Et_r}{100}$$

pero como el tanto real necesita cálculo previo, y ello ha de ser haciendo intervenir el cambio a que se cotizan o emiten los valores, es necesario sustituirle por su valor en función del tanto nominal (**491**, [2]), por la misma razón que en el caso anterior, y tenemos entonces:

$$R = \frac{Et_n(100 - i)}{100\,C}$$

fórmula que admitirá simplificación, haciendo desaparecer los dos factores 100, en el caso en que no haya impuestos o se opere con el tanto según éstos en vez del nominal, como sucedería siempre que este tanto con impuestos fuese conocido, así como en las deudas del Estado español que por ser el impuesto del 20 % tan fácil de calcular sabemos que el repetido tanto líquido es para las del 4 % igual a 3'20 y de 4 para las del 5 %.

Esa fórmula simplificada se reduce a la que determina la venta cuando se expresa en esta forma el nominal de una compraventa de valores (**523** y **527** [2]).

Ejemplo: Determinar la renta que producen 187.586 pesetas empleadas en Deuda perpétua exterior 4 % española adquirida al cambio de 85'15.

Como esta deuda carece de impuestos, los valores de la fórmula serán:

$$E = 187.586 \qquad t_n = 4 \qquad C = 85'15 \qquad i = 0$$

lo que nos permite emplear la fórmula simplificada teniendo

$$R = \frac{187586 \times 4}{85'15} = 8.812'02 \text{ pesetas.}$$

531.– Cálculos conociendo la renta a obtener. - Como caso inverso a los dos anteriores está aquel en que se conozca la renta, o mejor, que se desee obtener cierta renta, y haya que determinar el nominal o el efectivo necesario para ello, así como también el cambio que deberán alcanzar los valores para conseguir el propósito.

Despejando los valores incógnitos respectivos hallamos:

$$N = \frac{10.000R}{t_n(100 - i)}; \quad E = \frac{100RC}{t_n(100 - i)}; \quad C = \frac{Et_n(100 - i)}{100R}$$

Ejemplos: 1) Hallar el nominal necesario en títulos de la Deuda amortizable 4 °/₀ de España para obtener una renta anual de 18.000 pesetas.

Son los valores de la fórmula para este caso

$$R = 18.000, \qquad t_n = 4, \qquad i = 20$$

lo que da por resultado

$$N = \frac{10000 \times 18000}{4\,(100 - 20)} = 262.500 \text{ pesetas.}$$

2) Se desea obtener una renta de 20.000 pesetas comprando títulos del Empréstito de la Villa de Madrid de 1918 cuyo interés nominal es de 5 °/₀; si el cambio a que se cotizan estos valores es de 86'20, determinar el efectivo necesario para conseguir dicha renta teniendo en cuenta el impuesto de utilidades.

Los valores que intervienen en la fórmula serán en este caso

$$R = 20.000, \qquad C = 86'20, \qquad t_n = 5, \qquad i = 5'50$$

con lo cual el efectivo pedido ha de ser

$$E = \frac{100 \times 86'20 \times 20.000}{5\,(100 - 5'50)} = 343705'69 \text{ pesetas.}$$

3) Determinar el cambio a que habrán de cotizarse las obligaciones de la Sociedad Española de Construcción Naval del 6 °/₀ para que con un efectivo de 95.000 pesetas se pueda obtener 5.500 pesetas de renta anual.

Hemos de hacer intervenir como valores especiales los siguientes:

$$E = 95.000, \qquad R = 5.500 \qquad t_n = 6 \qquad i = 5'75$$

que darán para resultado pedido

$$C = \frac{95000 \times 6\,(100 - 5'75)}{100 \times 5500} = 97'67\ ^{\circ}/_{\circ}$$

EJERCICIOS *números* **1080** al **1085; 1088; 1090** al **1093; 1095; 1100; 1101; CDI** al **CDXXIII** y **1447.**

532. –Interés del dinero empleado en valores. – Se entiende por interés en la forma enunciada, el tanto real que resulta para el efectivo de una compra referido siempre a cien unidades de ese efectivo, teniendo en cuenta los gastos que origina la compra, los que nos son ya conocidos.

Para hacer este cálculo de interés se consideran compradas cien unidades de nominal, hallando el efectivo que las correspondería, y después nos encontraremos en el caso 4.° del párrafo **491** toda vez que el problema de que nos ocupamos es la determinación del tanto real que allí se estudia, y casi siempre la compra se hará en fecha distinta de la en que vencen los intereses.

Si se tratase de cotización al seco, entonces estaría deter-

minado ese tanto real de renta por uno de los tres primeros casos del mismo párrafo referido, al que remitimos al lector.

Este tanto real de interés es llamado por algunos *tanto de capitalización* teniendo como cuestión derivada de él la determinación del cambio que corresponde a un tanto real conocido.

EJERCICIOS *números* **1072** al **1079; 1086; 1087;** y **CDXXIV** al **CDXXVII**.

PROBLEMAS, los ejercicios *números* **1094; 1089;** y **CDXXVIII** al **CDXXXIII**.

533.—Gráfico del interés de los valores.— Los gráficos constituyen la expresión de los diversos tantos de interés que producen los valores según las diferentes cotizaciones que pueden alcanzar.

En su construcción, semejante a todo gráfico cartesiano (**62**) se destina el eje de las abscisas para medir en él las cotizaciones, tanto percentuales como por título, y en el eje de las ordenadas se marcan los tantos de interés que hayan de producir los valores según las cotizaciones que figuran en el otro eje, en la forma que aparece en la fig. 55.

Cuando se han señalado los distintos puntos de los ejes, se calculan los valores de esos tantos por la fórmula que hallamos en el párrafo **491** y los puntos que resulten como tantos de interés para cada una de las cotizaciones se unen por medio de una línea, que resultará quebrada, pero que habrá de ser curva si las cotizaciones se hacen variar por cantidades muy pequeñas, según puede también apreciarse en la fig. 55 en la cual se ha trazado la curva que correspondería al interés real que produce la Deuda Amortizable 5 % española; pero que igualmente puede comprender en el mismo gráfico cuantos valores se desee, siempre que se diferencien las curvas correspondientes a cada uno de ellos, por trazos o colores que permitan leer claramente los puntos de cada curva.

Para manejar el gráfico basta consultar el punto de la curva que corresponde a la cotización del momento del cálculo y leer en el otro eje el tanto correspondiente, lo que muestra la utilidad de este sistema porque una vez construído sirve para gran tiempo y además es de rápida lectura.

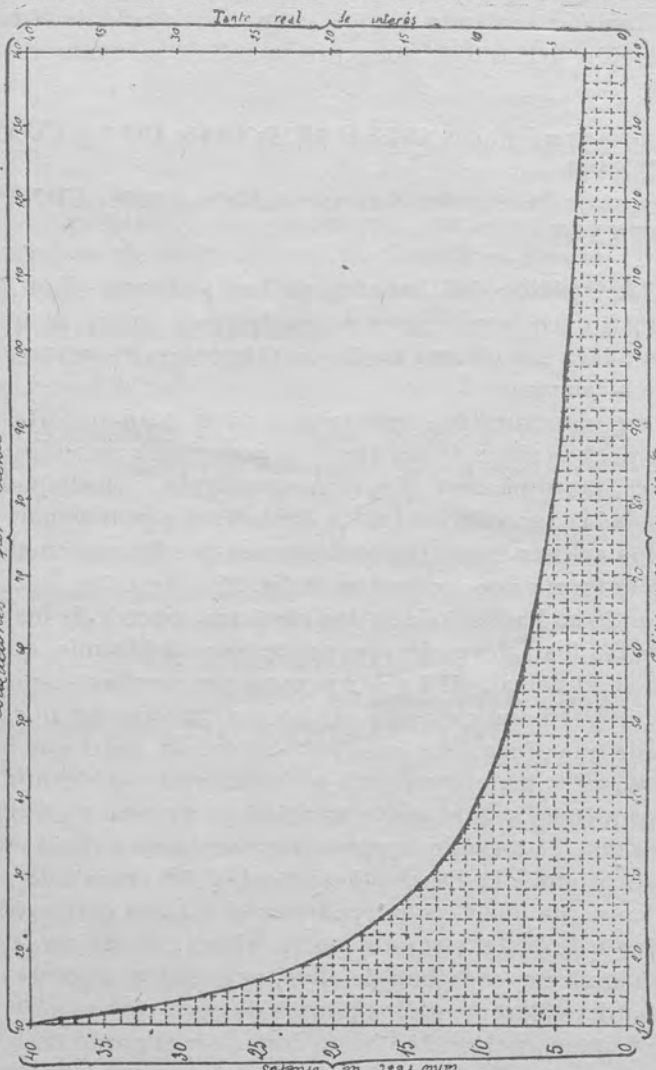


Fig 55. Interés real de valores mobiliarios.

Comparando este gráfico con el nomograma del interés (**301**, fig. 49) aún a simple vista se aprecia la semejanza de ambas curvas, puesto que son de igual especie, y como entonces puede construirse el gráfico en escala logarítmica con la consiguiente ventaja de ser así recta la línea que diera el tanto real. Remitimos, pues, al lector a lo que entonces decíamos para construcción y empleo de tales gráficos.

Si se considere oportuno pueden trazarse en el mismo gráfico lineas de interés correspondientes a distintos valores; pero como las diferencias en valores semejantes son muy pequeñas sólo resultan útiles estos gráficos múltiples cuando los valores difieren bastante en sus tantos con impuestos, pues de otro modo exigirían escalas demasiado grandes.

EJERCICIOS; el número **1388** y además pueden servir para este caso cualquiera de los múltiples valores que se indican en los ejercicios numéricos de este capítulo y de los anteriores.

534.—Cambio que produce un interés dado.—Se trata de un problema inverso del último estudiado y por consiguiente de las fórmulas que dan el interés real se deducirá las del caso que nos ocupa.

Partiendo de la fórmula [2] del párrafo **491** se deduce

$$E = \frac{t_n\,(100 - i)}{t_r} = C$$

puesto que ahora represantaremos por C el valor efectivo entregado por 100 unidades nominales en cotización al seco

Para que la fórmula anterior fuese exacta en cotización tal cual, sería indispensable que la fecha de la compraventa coincidiese con el principio de los períodos de interés, pero como ésto no sucede sino en algunos casos, debemos modificar la formula anterior deduciéndola de la [3] del citado párrafo (**491**) puesto que ésta se adapta a cualquier fecha sea o no coincidente con el principio del periodo del cupón por lo que calculando el valor E que ahora representamos por C se tiene

$$C = \frac{t_n(100 - i)(100k + t_r n)}{t_r 100k} \qquad [2]$$

fórmula que es la anterior a la que se han añadido los intereses durante la fracción de cupón que representa el tiempo n

según se hizo para el valor acumulado (**214**) y según se hace para hallar la cotización tal cual conocido el cambio al seco.

Aunque vemos que las dos fórmulas son bastante diferentes, suele verse en los libros sólo la primera como aplicable a la cotización tal cual, no mencionando ni la segunda ni la otra clase de cotización, pudiendo admitirse este error si sólo se desea conocer el cambio aproximado, ya que la completa exactitud sólo se obtiene modificando con los gastos (**525**) los resultados que dan las dos fórmulas que anteceden.

Ejemplos: 1).—Determinar el cambio que debe tener el 9 de febrero la Deuda perpetua interior española para que produzca un interés neto del 4'25 % anual.

Como esta Deuda es del 4 % nominal con el 20 % de los intereses por impuesto, si consideramos el año comercial para mayor comodidad tendremos para valores de la fórmula [2]

$$t_r = 4'25, \qquad t_n = 4, \qquad i = 20, \qquad k = 360, \qquad n = 40$$

que da para resultado pedido

$$C = \frac{4 \times (100 - 20) \times (36000 + 4'25 \times 40)}{4'25 \times 36000} = 75'60\ \%$$

2)—Hallar el cambio al seco que tendrán unas obligaciones cuyo interés nominal es el 6 %, si el impuesto es del 10 % de los intereses y quisiéramos produjeran el 5'50 % neto anual.

Nos serviremos de la fórmula [1] cuyos valores especiales son:

$$t_n = 6, \qquad t_r = 5'50, \qquad i = 10$$

que dan por resultado que se busca

$$C = \frac{6 \times (100 - 10)}{5'50} = 98'18\ \%$$

EJERCICIOS *números* **CDXXXIV** al **CDXLVI.**

535.—Ganancia o pérdida en compraventa de valores. Interés que representa.—Todas las ganancias o pérdidas son siempre la diferencia entre costo y venta (**15**), presentando en el caso que examinamos la particularidad de los cupones que pueden haber sido cobrados en el período que media entre ambas operaciones, que serán añadidos al valor de venta antes de hacer la sustracción que determina la ganancia, y estos mismos cupones hacen que en estas ganancias no se atienda al tanto por ciento total que se obtiene sobre coste o venta (**15**) sino que la ganancia total se considera como interés obtenido sobre el costo durante el tiempo comprendido entre la compra y la venta, cuestión de interés idéntica a las generales que ya son conocidas de nuestros lectores.

EJERCICIOS *números* **1096** al **1099; 1424; 1434** y **CDXLVII** al **CDLVI.**

LIV

OPERACIONES DE BOLSA A PLAZO

536.—Operaciones en firme.—Las operaciones a plazo que se hacen sin objeto de especulación, es decir, sólo para demorar la entrega o recepción de los títulos comprados no son más que operaciones al contado cuyo cumplimiento ha de tener lugar el día en que venza el plazo, por consiguiente, los cálculos que originan son los mismos que hemos estudiado para esas operaciones al contado.

La forma práctica de llevar a cabo el cumplimiento de todas las operaciones a plazo permite que los interesados puedan hacerlo entregando o recibiendo sólo las diferencias entre lo que habrían de cobrar y de pagar, y haciendo lo mismo con los nominales o títulos comprados o vendidos, por lo cual los cálculos se hacen en los mismos documentos llamados *cuentas de liquidación*, en las que constan los efectivos y gastos de cada compraventa y como resumen el saldo en moneda y en valores que el interesado entregará o recogerá, según puede verse en la cuenta de la página siguiente resuelta como ejemplo de estos casos.

537. - Cálculos de especulaciones a plazo.—Las especulaciones a plazo, que se liquidan por sólo las diferencias entre compras y ventas sin la entrega ni recogida de títulos que expresa la cuenta de liquidación que presentamos y que ya dijimos (**503**) constituían el verdadero mercado a plazo como especulaciones bursátiles, dan motivo a los cálculos especiales cuyo objeto es determinar:

1.° El beneficio o quebranto que resulta de una compra o venta a plazo.

D. **Bernardo Manzano,** de *Avila,* Cuenta de liquidación en fin de *marzo* de *1931,* con el **BANCO HISPANO AMERICANO.**

COMPRAS (Debe)

FECHAS		Interior 4 °/o	Exterior 4 °/o	Azucareras Preferentes	Nortes	Cambios.	Capitales		Corretajes.		Impuestos.	
Marzo....	3	150.000				71 10	106.650	—	133	30	7	20
»	12				40	289 35	11.574	—	32	—	2	70
»	16			85		101 15	42.988	75	64	50	1	20
»	24			15		100 90	7.567	50	11	35		30
		150.000		100	40		168.780	25	241	15	11	40
				Impuestos...		... ...	16	20				
				Corretajes...		... ...	430	—				
							169.226	45				
			Recoge									
			25.000 Interior 4 °/o									
			40 Nortes.									

VENTAS (Haber)

FECHAS		Interior 4 °/o	Exterior 4 °/o	Azucareras Preferentes	Nortes	Cambios.	Capitales		Corretajes.		Impuestos.	
Marzo....	18			100		101 80	50.900	—	76	35	2	40
»	20	125.000				72 —	90.000	—	112	50	2	40
		125.000		100			140.900	—	188	85	4	80
				Saldo deudor....		... ...	28.326	45				
							169.226	45				

2.° El beneficio o pérdida que se obtiene en una operación doble, referido a tanto por ciento.

3.° El mismo beneficio o pérdida para operaciones con primas en cualquiera de las formas de éstas que nos son conocidas.

4.° El beneficio o quebranto que puede resultar de una combinación de operaciones.

538.—Cálculo de operación por diferencias.—Las operaciones que se liquidan por diferencias son las combinadas y dobles, pues las operaciones a plazo cuando no hay más que una efectuada, no se liquidan por diferencias.

En general todas las operaciones a plazo, sean o no por diferencias, se liquidan por medio de la cuenta como el modelo presentado y por consiguiente los cálculos que exigen son los ya conocidos. Pero cuando se trate de conocer la diferencia que habría de pagarse en el caso de una operación a plazo que de firme se transforma en operación a diferencia porque las partes contratantes cambien respectivamente de posición, transformándose el comprador a plazo en vendedor al contado al cambio del día de la liquidación o al de compensación, y viceversa el vendedor a plazo, entonces es cuando ha de hacerse el verdadero cálculo de operación por diferencia.

Consiste este cálculo en determinar la ganancia o pérdida que para cada contratante motiva la operación, y para ello siendo el cambio del primer contrato a plazo c, y c' el cambio de compensación o de liquidación, resultará que la diferencia a pagar o cobrar ha de ser precisamente la que exista entre los dos valores efectivos según esos respectivos cambios (**320**), es decir que se tendrá:

$$D = (\mp E \pm E')$$

en la que los signos superiores corresponden a la situación de comprador a plazo y los inferiores a la situación de vendedor.

Sustituyendo ahora los valores efectivos por las expresiones que los determinan en función de los cambios respectivos, con la representación en los signos que ahora hemos dado y teniendo presente que los gastos de timbre y corretaje siempre tendrán que pagarse, resulta

$$D = \frac{N(\mp c \pm c')}{100} - G \qquad \text{y} \qquad D = T(\mp c \pm c') - G$$

en cuyas expresiones el signo positivo o negativo del resultado ha de indicar respectivamente cobro o pago de cantidades o diferencias, y las dos expresiones ya conoce el lector que son para cotización percentual o para cotización por título

Puede considerarse este cálculo como un caso particular del de ganancia o pérdida de operaciones de contado cuando no transcurre tiempo ni existen cupones que hayan podido cobrarse.

Ejemplo: Hallar la diferencia que cobrará o pagará un comprador a plazo de 625 acciones de la Compañía de los Caminos de Hierro del Norte de España al cambio de 512 pesetas por acción si se liquida la operación al cambio de 501.

Hemos de aplicar la última de las fórmulas por ser cotización por título y tomar los signos superiores por ser situación de comprador, con lo cual tendremos

$$D = 625 \times (-512 + 501) - G = 6875 - G$$

y como los gastos son de 0'40 pesetas por acción y el timbre de la póliza primera y de la de anulación, que respectivamente son de 6 y 0'50 pesetas, tenemos como diferencia final, que se deberá pagar por ser todos los signos negativos

$$D = 6875 + 625 \times 0'4 + 6'50 = 7131'50 \text{ pesetas.}$$

539. — Gráficos de la operación por diferencias. — En las operaciones a plazo liquidables por diferencias, el cálculo gráfico sirve para determinar en todo momento el importe de éstas cualquiera que sea el cambio a que se haga la liquidación, y una vez que ya se ha fijado el de la operación a plazo.

Pueden servir para estos gráficos cualquier clase de coordenadas, si bien las que más se emplean son las cartesianas ortogonales (**62**) pues estos gráficos son diagramas (**68**) en los cuales en el eje de las abscisas se miden las cotizaciones del valor de que se trate y en el eje de las ordenadas se expresan las ganancias y pérdidas que corresponden a la operación estudiada, y de esta forma resulta una función de dos variables cuya recta en coordenadas cartesianas pasa por el eje de las x en el punto de la cotización inicial o primera de las dos que producen la diferencia.

Ejemplo: Determinar la situación de un especulador de Bolsa que ha hecho una operación a plazo sobre 200.000 pesetas de Deuda 4 °/₀ interior al cambio de 70'80 °/₀.

Como no se indica cuál es la posición del especulador, si la de comprador o vendedor, determinaremos las dos situaciones, y teniendo en cuenta

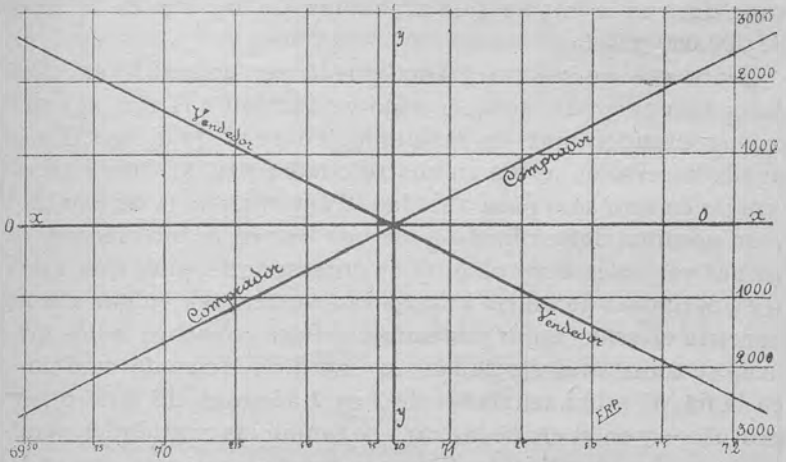


Fig. 56. Diagrama de operación por diferencias.

que las variaciones de la cotización del valor sobre que versa la operación son de 5 en 5 céntimos por cada una de estas variaciones, se tendrán 100 pesetas de ganancia o pérdida, y el resultado del cálculo gráfico será una línea recta, porque para cualquier cotización, la ganancia o pérdida será proporcional a las diferencias que representan los factores del paréntesis de la fórmula, y entonces los ejes y las paralelas correspondientes a cotización y resultado respectivo, van formando rectángulos semejantes cualquiera que sea la cotización alcanzada, con lo cual se tendrían las dos líneas de resultados que se indican en la figura 56.

En la forma que hemos indicado para la formación del gráfico sólo sirve éste para una operación determinada, pues para que una vez construído sirviera gran tiempo, necesita las dos condiciones de que sea aplicable a otro cambio inicial y a otras cantidades nominales de la operación.

Para que el gráfico fuese aplicable a cualquier cambio bastaría que en el eje de las x se tomasen las diferencias en más o en menos respecto del cambio inicial, como están en la figura 57, y para serlo a cualquier cantidad sería necesario trazar tantas líneas funcionales como de cantidades nominales deseáramos conocer los resultados de una operación, o al menos

de las cantidades que variasen de una a otra en cierta importancia, como sería por ejemplo 10.000 pesetas de una a otra línea, resultando entonces un nomograma de ejes concurrentes idéntico al de la fig. 14, página 91, y cuya construcción para cada línea es la misma que acabamos de hacer para la línea de 200.000 pesetas.

Para que un mismo gráfico pueda ser aplicable en cualquier tiempo y para todo cambio y cantidad a la vez, se construyen nomogramas de resultados como el de la fig. 57, que puede hacerse en uno o en cuatro cuadrantes, si bien bastará tenerle en uno sólo para que dados una diferencia de cambios y un nominal determinado podamos leer en la intersección de ambas variables el resultado que corresponde, pues que saber si es pérdida o ganancia es cosa tan elemental y vulgar que no necesita consideración matemática. Para construir estos gráficos se toma en el eje de las x las diferencias de cambio—en la fig. 57 están señaladas de 2 en 2 décimas de entero percentual — y en el eje de las y se toman las cantidades nominales, que pueden hacerse variar en forma semejante como nosotros lo hemos hecho de 20.000 pesetas por cada espacio de la

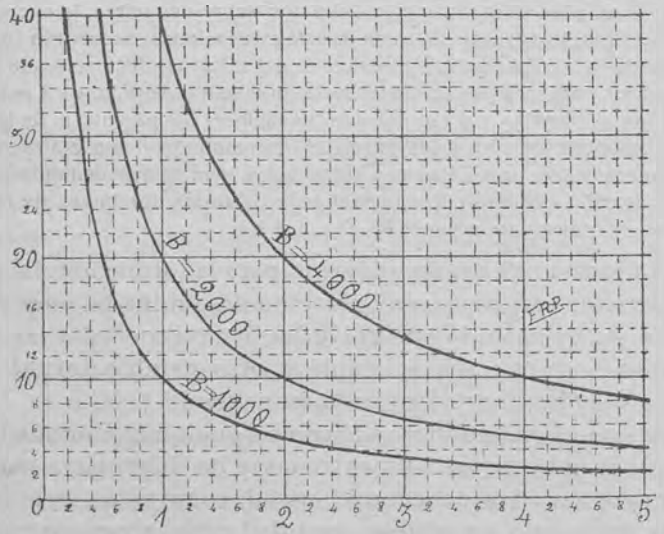


Fig. 57. Nomograma de operaciones de Bolsa.

figura y se señalan varios puntos que correspondan al mismo

resultado, los que unidos por la curva correspondiente nos daría cualquiera de las de la figura, y procurando construir diversas líneas podremos emplear el gráfico en todo caso, hasta para aquellos en que el punto de cruce de las dos ordenadas no coincida con línea funcional, sin más que dividir el espacio entre dos líneas en partes proporcionales a la diferencia que existe entre los valores de ellas y con la parte de espacio del punto de cruce, como ya se dijo se hacía en los nomogramas en general y en los de interés en particular (**301** y **302**).

Estos nomogramas curvos serán ventajosamente sustituídos por los de base logarítmica, como lo fueron los de interés, porque en ellos la significación y lectura es idéntica a los curvos, pero las líneas funcionales de cada resultado son rectas con la ventaja de su trazado y ahorro de tiempo en la formación de estos gráficos generales. Remitimos al lector a lo dicho respecto de los de interés para su construcción y aplicación (**301** y **302**).

540.—Operaciones dobles.—El cálculo que exige una operación doble es de dos clases; una de ellas idéntica a la que ya conocemos en las operaciones por diferencias y que consiste en determinar la cantidad a cobrar o pagar por efecto de la doble.

El otro cálculo que exigen las operaciones dobles es la determinación del equivalente en interés vencido, es decir, del tanto por ciento que representa el precio de la doble referido al periodo anual, teniendo en cuenta la duración o tiempo intermedio entre la operación firme y la operación a plazo que integran la doble.

Para este cálculo representemos por c_1 el precio de la operación en firme o al contado y por c_2 el precio de la operación a plazo que constituyen la doble. Es indudable que el precio de ésta es la diferencia $(c_2 - c_1)$, que es la que se indica en las cotizaciones, y el producto o precio de la doble por cien unidades efectivas empleadas en la operación de contado, como préstamo al plazo de la operación doble que venimos considerando, estará dado por la fórmula

$$t_d = \frac{100\,(c_2 - c_1)}{c_1}$$

en la que t_d es el tanto de la doble.

Para calcular ahora el tipo de interés vencido a que corresponde el tanto t_d de la doble hemos de tener en cuenta el plazo de ésta, al que designaremos por n, y que en la mayoría de los casos equivale a 30 días, pero que nada impide sea, como es en otros casos, de duración diferente. Con este plazo ya consideraremos que el valor hallado por la fórmula anterior sería un tanto de interés mensual para el caso más frecuente, por lo que bastará referirle al año para tener el resultado apetecido (**208**), siendo

$$t_d = \frac{12 \times 100(c_2 - c_1)}{c_1} \qquad [1]$$

la expresión que resuelve este problema para el caso más frecuente de plazo de un mes para la doble.

Generalizando la expresion encontrada resultaría

$$t_d = \frac{100k(c_2 - c_1)}{c_1 n} \qquad [2]$$

para cualquiera que fuese la duración de la operación.

Ejemplo: Calcular el tanto de interés vencido que produce el dinero empleado en operaciones de doble de compra firme y venta a plazo (*) si las cotizaciones respectivas de las dos operaciones son 78'50 y 78'90 y el plazo de la doble es de 25 días.

Los valores respectivos de los elementos de la fórmula serán en este ejercicio

$$c_1 = 78'50 \qquad c_2 = 78'90 \qquad n = 25$$

y por la aplicación de la fórmula [2] tenemos:

$$\frac{36000 \times (78'90 - 78'50)}{78'50 \times 25} = 7'33758\ \%$$

541.—Gráficos de la operación doble.—El objeto del cálculo gráfico de estas operaciones es la determinación a priori del tipo de interés a que equivale cada precio de la doble según las diferentes cotizaciones básicas de la operación, es decir, según los distintos valores de c_1.

El gráfico se forma para cada uno de los precios de la doble y siempre consiste en una línea recta que nos da los valores del tanto de interés vencido que hemos calculado antes.

(*) Operaciones de report.

Para conseguirlo por medio de coordenadas cartesianas ortogonales empezaremos por señalar en el eje de las abscisas las cotizaciones más frecuentes del valor de que se trate, como aparece en la fig. 58, y en el eje de las ordenadas señalaremos espacios que indiquen los tipos de interés, empezando por cero o por cualquier otro, y sobre el espacio limitado por los dos ejes se han de marcar los puntos que corresponden al tipo de interés y a cada cotización, puntos que unidos darán la línea funcional, en forma igual a las dos líneas de precios de la figura que respectivamente representan el interés para doble de duración de un mes y precios de 0'25 y 0'05, comprendidos entre las cotizaciones de 78 a 79 $^1/_2$ %.

Cuando se hacen operaciones dobles con gran frecuencia, es conveniente la construcción de gráficos para varios precios de doble, y hasta tantos como plazos sean sobre los que se opere. En todos estos gráficos la inclinación de la línea será siempre tanto mayor cuanto más elevado sea el precio de

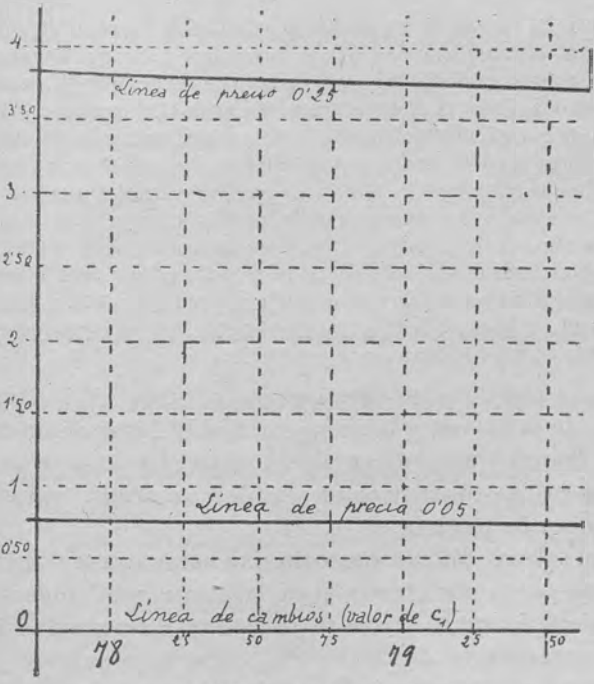


Fig. 58. Interés de los precios de operaciones dobles.

la doble y menores las cotizaciones básicas, pudiendo tener otras líneas funcionales si se emplean otras clases de coordenadas, si bien aconsejamos en estos casos servirse de las cartesianas según hemos hecho.

La formación de muchos gráficos de esta clase constituirá una tabla de consulta para cualesquiera operación que se trate de efectuar, más útil que las tablas numéricas por la mayor facilidad de su consulta.

542.– Cálculo de prima simple.—La operación a plazo con prima simple hemos dicho podía ser para entregar o retirar (**505**) según que el que tiene la opción pagando la prima sea el vendedor o el comprador.

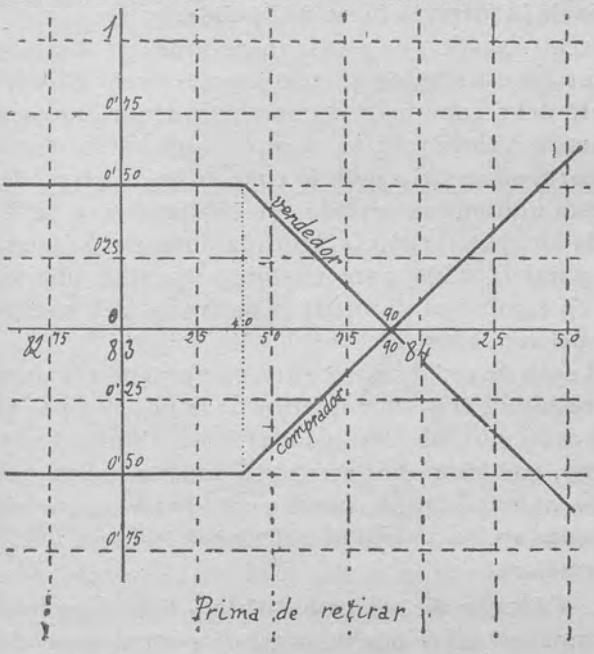
El cálculo de estas operaciones consiste en determinar el importe de la prima a pagar y la ganancia o pérdida que resulta por la operación a plazo si se cumple el contrato, para comparar los dos resultados, determinar la posición más beneficiosa y decidirse por ella.

Ejemplo: Si se trata de un comprador de Deuda Perpétua Exterior española a plazo, al cambio de 83'90/50, lo que quiere decir que el cambio de la operación a plazo es de 83'90 % y la prima a pagar del 0'50 %, resultará que para cambios superiores al de la operación gana el comprador y desde luego se decide por el cumplimiento de la operación, pero cuando los cambios sean inferiores a 83 90 tendrá una pérdida y necesitará por consiguiente compararla con el importe de la prima a pagar para poder elegir.

En el caso que nos ocupa para todo cambio comprendido entre 83'90 y 83'40 % la pérdida del comprador será menor convirtiendo en firme la operación a plazo que anulándola por el pago de la prima; para el cambio de 83'40 es la pérdida igual pagando la prima que recogiéndola, y para cambios inferiores al de 83'40 se decidirá por el pago de la prima porque el cumplimiento de la compra le causa mayor pérdida.

Resulta por consiguiente que la pérdida está limitada al importe de la prima, y la ganancia puede llegar a una cantidad todo lo grande que pudiera imaginarse, por lo que la operación con prima constituye en realidad un seguro para la parte que hubiera de pagarla.

En cuanto al cálculo que originan estas operaciones, se reduce a un tanto por ciento, el de la prima, y además a la aplicación de la fórmula de operaciones por diferencias (**538**), teniendo presente la comparación entre el resultado de esta aplicación y el importe de la prima sólo para el caso en que el



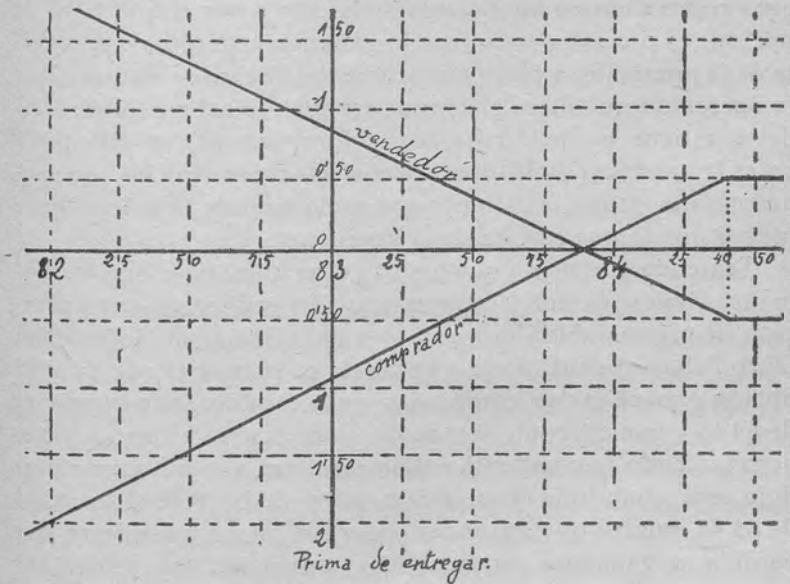


Fig. 59. Gráficos de prima simple.

resultado de la fórmula fuese de pérdida.

El CÁLCULO GRÁFICO de estas operaciones se hace en igual forma que los estudiados anteriormente; y refiriéndole a tanto por ciento del resultado de la operación, tendríamos para caso de *prima de retirar* y en el ejemplo que antes decíamos, la fig. 59, parte superior, según la cual en esta clase de operaciones está limitada la pérdida del comprador y la ganancia del vendedor, pues según la figura la línea del resultado permanece paralela al eje para cualquier cambio inferior al de 83'40, y en cambio es ilimitada la ganancia del comprador o pérdida del vendedor.

En el caso de *prima para entregar* y siendo la misma operación, resultará el gráfico inferior de la fig 59 en la cual aparece indicado que las limitaciones y las ilimitaciones de los resultados, son ahora por completo opuestas al caso anterior.

Como antes dijimos, pueden utilizarse otras clases de coordenadas en las cuales se construirá la línea funcional en forma semejante.

543.—Cálculo de prima doble.—Esta operación exige los mismos cálculos que la anterior e igual procedimiento, pues como siempre ha de pagarse la prima por el que tiene la opción, es preciso determinar la ganancia o pérdida que resulta de la operación a plazo sin prima, decidiéndose siempre por la operación que diera ganancia, y teniendo así que la pérdida del que tiene la opción ha de ser forzosamente la diferencia entre la ganancia de la operación elegida y la pérdida que representa la prima, existiendo ganancia cuando la prima fuese menor que la que resulta de la operación.

Teniendo en cuenta que los cálculos numéricos son sumamente fáciles, damos la *representación gráfica* de una operación de prima doble sobre acciones de la Sociedad Metalúrgica Duro Felguera contratada a 64'15/45, en la cual el que tiene la opción ganará como comprador para cambios superiores al de 64'15 y ganará como vendedor para los inferiores a éste, pero teniendo que pagar la prima resultará que su mayor pérdida será cuando la liquidación haya de hacerse al cambio de 64'15, puesto que entonces pagará la prima y resultará sin pérdida ni ganancia por cualquiera operación que se decida, sea compra o venta, y a medida que los cambios de liquida-

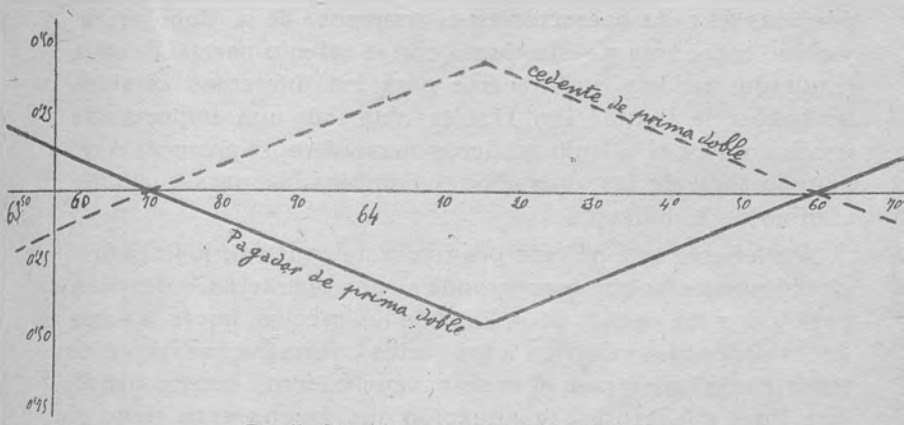


Fig. 60. Situación de contratantes de prima doble.

ción se aparten del expresado, irá disminuyendo su pérdida hasta quedar equilibrada para los cambios de 63'70 como vendedor y 64'60 como comprador, teniendo a partir de estos dos cambios una ganancia tanto mayor cuanto más se aparte la cotización de liquidación, lo mismo si sube que si baja. Con tales situaciones el gráfico que resultaría habría de ser el de la fig. 60, en el que también presentamos calculada la situación del que cede la opción, o cobrador de la prima.

En éste puede construirse el gráfico de escala logarítmica (**71**) para que a la vez que se conoce el resultado en total pueda apreciarse la proporcionalidad de las variaciones, pero como la construcción es en todo semejante a la que hemos indicado, sin más que determinar mayor número de puntos de la línea funcional, prescindimos de más detalles que resultarán inútiles.

544. — Operaciones combinadas. — Las operaciones combinadas no pueden someterse a reglamentación especial para el cálculo, tanto por el sinnúmero de casos a que pueden dar lugar, cuanto porque las combinaciones de operaciones no exigen que sean simultáneas en la contratación, sino que únicamente tienen la simultaneidad en el vencimiento, y por consiguiente los cálculos han de hacerse por separado para cada una de las operaciones que integran la combinación.

Resulta por tanto, que las operaciones combinadas no tienen más cálculo común que la suma o resta de ganancias y

pérdidas de cada operación en el momento de la liquidación, y como esta suma y resta, junto con el cálculo parcial de cada resultado, tendría que hacerse para los diferentes cambios probables de liquidación, resulta ahora de una importancia mucho mayor el cálculo gráfico, porque siempre presenta el resultado final de las operaciones combinadas para cualquier cambio de liquidación.

Para hacer este *cálculo gráfico* basta construir la línea funcional particular que corresponde a cada operación, y después, para todos los puntos de la línea de los precios, hacer la suma de las ordenadas relativas a los varios contratos que hayan de tener cumplimiento en el mismo vencimiento, determinando una línea que exprese la situación que en conjunto tiene el operador. Esta línea se llama la *resultante* del cálculo y su formación se facilita determinando sólo los puntos correspondientes a aquellos en que haya variación de sentido en las líneas de los contratos parciales, en la forma que puede verse en la fig. 61, en la que se representan las tres operaciones de vendedor al cambio de 80 % y prima simple de 0'25 para un nominal de 100.000 pesetas, cuya línea es la *I I I*, comprador de igual cantidad a plazo firme y cambio de 79'70 %, de la que es línea funcional la *II II*, y vendedor al cambio de 80'45 % y con prima simple de 0'35, que tiene por línea funcional la *III III III*.

En este ejemplo se han hallado las dos resultantes; *AAA* para sólo las dos primeras operaciones determinando las dos ordenadas correspondientes, la 1.ª al cambio de 79'45, en que por tener en una de ellas ganancia igual a la pérdida de la otra se tiene la resultante igual a cero; y la 2.ª para el cambio 79'75 que por ser el principio del descenso de la ganancia de la operación *I* habría de tener cambio de dirección la resultante, y por fin, se observa que el descenso de la línea de la operación *I* es igual al ascenso de la línea de la operación *II*, por lo que la resultante *AA* sigue horizontal a partir de este momento. Para la otra resultante *BBB* puede hacerse la suma de ordenadas bien de las tres operaciones de la combinación o mejor aún de sólo las de la operación *III* y de la resultante antes hallada *AAA*, para solo tener que operar con dos líneas, determinando el punto cero igual que en el caso de la primera resultante; el punto de ganancia máxima correspondiente al cambio de término

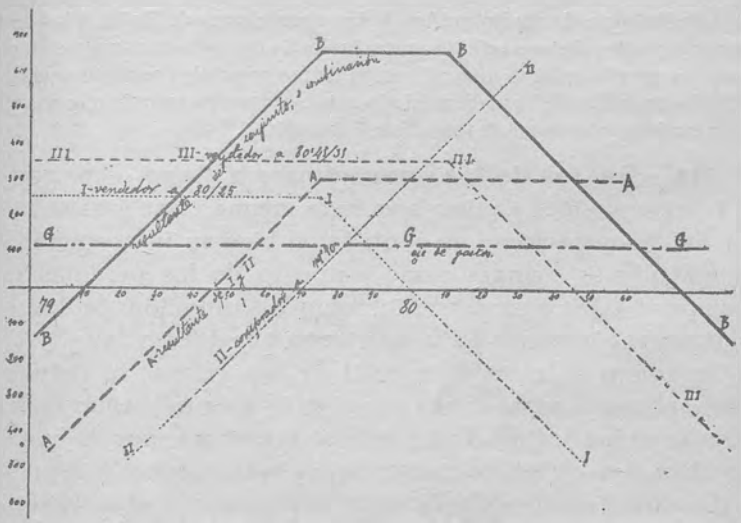


Fig. 61. Operaciones de Bolsa combinadas

del ascenso de la primera resultante; el punto de principio del descenso de la ganancia final, que será el mismo en que disminuye la ganancia de la operación *III*, y por último, la inclinación de la resultante *BBB*, que estará determinada por una paralela a la línea de la operación *III*.

Del mismo modo pueden determinarse las resultantes de operaciones hechas sobre cantidades distintas, si bien será siempre preciso un gráfico para cada clase de valores sobre que se especula, porque es así como únicamente se pueden comparar cotizaciones y resultados.

Como en los casos anteriores, pueden ser muy útiles para las operaciones combinadas el uso de diagramas logarítmicos (**71**), en cuyo caso la suma de ordenadas que antes indicamos para hallar la resultante ha de entenderse suma de los números de las ordenadas pero no de su valor gráfico, porque siendo estas distancias logaritmos resultaría producto en vez de suma Cuando la escala logarítmica esté en los dos ejes de coordenadas se tendrán líneas funcionales en los que la curvatura nos da a conocer la proporcionalidad de cada ganancia o pérdida respecto de la anterior.

Aunque puedan emplearse toda clase de coordenadas, está casi exclusi-

vamente limitado el estudio gráfico de las operaciones de Bolsa a las cartesianas a que nos hemos referido, prescindiendo del estudio completo en otra clase porque ello es sólo una aplicación de los principios generales ya estudiados y cuyo detalle haría demasiado extenso nuestro trabajo que sólo tiene un carácter elemental de inmediata aplicación.

545. – Gastos de las operaciones a plazo. —Los gastos de las operaciones a plazo son de la misma clase y naturaleza que los de operaciones de contado, si bien su intervención en los cálculos es siempre como aumento de las pérdidas que ocasionan estas operaciones o como disminución de las ganancias, según vimos en la operación por diferencias.

En cuanto al cálculo especial de los gastos, se reduce a unas aplicaciones del tanto por ciento o por mil según se hace constar en las tarifas de corretajes y timbres, por lo que su sencillez nos releva de presentar ejemplo especial resuelto.

Cuando se trata de aplicar los gastos al cálculo gráfico se halla el importe de los mismos y se traza una línea paralela al eje, en la forma que aparece la línea *GGG* en la fig. 61, considerando esta línea como eje después que haya sido hecha la construcción, pero haciendo la construcción con arreglo al caso en que no hubieran de ser considerados los gastos. De este modo resultará siempre que los gastos señalan un aumento de pérdidas o disminución de ganancias cualquiera que sea la operación.

EJERCICIOS *números* **985** al **1038** y **CDLVII** al **CDLXIX**, de los cuales pueden servir para cálculo gráfico todos los que especialmente se indica y los que piden hallar resultados de ganancias y pérdidas.



LV

BOLSAS DE MERCANCÍAS

546.—Caracteres generales de las operaciones de Bolsas de mercancías.—No todas las mercancías del comercio son aptas para la negociación en las Bolsas, ya que haciéndose estos contratos sin tener a la vista las mercancías, ni siquiera la muestra de ellas, es indispensable que sean susceptibles de expresarse por *tipos* perfectamente determinados.

Restringida por naturaleza la transacción en las Bolsas a sólo ciertos artículos, han ido especializándose cada una de las Bolsas existentes en algunos que casi exclusivamente se negocian en ellas, pero en cualquiera de las Bolsas se hacen las contrataciones en base a un tipo según decíamos, tipo que no es preciso que tenga existencia real, pero que forzosamente ha de estar de tal manera determinado, que no ofrezca dudas para su aplicación y comparación con las cualidades de las mercancías realmente entregadas o recibidas, por efecto de las contrataciones.

La misma restricción a que nos referimos hace que las contrataciones no se hagan por cantidades cualesquiera, sinó por múltiplos de una que también determinan los reglamentos de cada Bolsa y que se denomina *lote*, sin que éste haya de ser múltiplo de la cantidad a que el precio se refiere.

En cuanto a la forma de contratar en las Bolsas de mercancías, es semejante por no decir idéntica a las de valores, y así tenemos los contratos *en disponible* o *al contado* y los contratos *para entregar* o *a plazo*.

Para que la semejanza de las operaciones en estas Bolsas sea aún mayor con las de valores, también ahora las opera-

ciones están intervenidas por *corredores* que tienen la facultad de fijar el precio de los artículos.

547 - Operaciones firmes.—Su cálculo fundamental.—Establecidas las dos clases de operaciones o especies de contratos celebrados en las Bolsas de mercancías, hemos de señalar ahora otra división en razón a la finalidad que pretenden los contratantes

Unas operaciones tienen el carácter de especulación, y otras el de satisfacer las necesidades de la industria, alcanzando la seguridad de que las primeras materias que se cotizan en las Bolsas no han de faltar al industrial, ni su precio ha de quedar sujeto a las grandes oscilaciones.

Las operaciones que han de satisfacer las necesidades de la industria son todas operaciones en firme, y ateniéndonos al aspecto del cálculo, que es el que a nosotros interesa, representaremos por c el precio cotizado en la Bolsa, por n el número de unidades a que este precio se refiere, por N el número de lotes contratados, por L el nominal de cada lote, es decir, el número de unidades que le forman y por V el valor del contrato y así tendremos que la cantidad de mercancías contratadas estará dada por

$$N \times L$$

y resolviendo ahora la regla de tres que resulta del precio, unidades a que éste se refiere y valor del contrato, el importe del último será:

$$V = \frac{cNL}{n}$$

pero hemos de tener además en cuenta que la cantidad representada por L no siempre está expresada en la misma clase de unidades que las n del precio, pues tomando por ejemplo el café en la Bolsa del Havre, el lote es de 500 sacos de café, y el precio se refiere a 50 kilos, por lo cual será indispensable para el cálculo que refiramos ambas cantidades a la misma clase de unidades. Para ello atenderemos al número de unidades que expresan el lote, al que llamaremos l, y a la medida de cada una de estas unidades, que representaremos por m, siendo preciso además considerar la *tara* de cada una de esas

unidades. Ahora bien: la tara se expresa siempre por un tanto por 100 que se deducirá del nominal de medida de cada lote, por lo que se referirá a tanto por uno en la forma que se conoce, y llamándola t resulta para el nominal de cada lote

$$L = lm(1 - t)$$

y sustituyendo este valor en la fórmula que antes hallamos resultará el siguiente:

$$V = \frac{cNlm(1 - t)}{n}$$

en el cual todavía hemos de hacer intervenir el importe de la remuneración del corredor, pero antes de hacerlo habrá que considerar que esa remuneración constituye un gasto motivado por el contrato y que por consiguiente aumentará el valor de la compra y disminuirá el de la venta, lo cual motiva que haya de intervenir esta remuneración con el signo de ambigüedad, y si le representamos por g referido a tanto por uno, tendremos:

$$V = \frac{cNlm(1 - t)(1 \pm g)}{n}$$

que es la fórmula definitiva del importe del contrato, y en la que del signo de ambigüedad ha de corresponder el superior al caso del comprador y el inferior al vendedor.

Ejemplo: En la Bolsa de Hamburgo se han comprado 7 lotes de café de 500 sacos cada uno, con un peso de 60 kilog. el saco, tara oficial de $2\,{}^1/_2\,{}^0/_0$. El precio es de 136 marcos por 50 kilog. y el corretaje de $1\,{}^1/_2\,{}^0/_{00}$. Determinar el importe de este contrato.

Haciendo las reducciones a tantos por uno, tenemos para valores de las cantidades que intervienen en la fórmula:

$$N = 7, \quad l = 500, \quad m = 60, \quad t = 0'025,$$
$$g = 0'0015, \quad c = 136, \quad n = 50$$

y tomando ahora el signo superior de la ambigüedad por tratarse de compra, hallaremos por resultado

$$V = \frac{136 \times 7 \times 500 \times 60(1 - 0'025)(1 + 0'0015)}{50} = 557.755'38 \text{ marcos}$$

los cuales serían reducidos a la moneda nacional del operador, si no era la misma de la Bolsa, al cambio que corresponda el día de la operación **(364)**.

548.—Cálculos derivados en las operaciones fir-

mes.—De todos los elementos que intervienen en la fórmula fundamental hallada en el párrafo anterior solamente el c y N pueden necesitarse calcular, porque los demás están previamente determinados por las tarifas, y aunque teóricamente tengan igual importancia hemos de limitar la deducción de las fórmulas para estos dos elementos.

De ellos el más importante es el que expresa el número de lotes comprados o vendidos, y que será necesario calcular cuando se tenga o se desee tener disponible una cantidad en una fecha determinada, y en vista de esa cantidad disponible saber por qué cantidad haya de efectuarse la operación de Bolsa en vista también de las cotizaciones.

El valor N estará determinado por la expresión

$$N = \frac{Vn}{clm(1 - t)(1 \pm g)}$$

con la misma interpretación del signo doble del último factor.

El otro elemento a calcular no ha de ser tan necesario, puesto que no es tan arbitrario como la cantidad, ya que aun cuando fuese necesario que tuviese cierto valor el precio para hacer posible una operación, no es posible que una sola voluntad lo encierre en el límite preciso, como limita al elemento N. De igual forma que antes despejaríamos el valor del precio y encontraríamos

$$c = \frac{Vn}{Nlm(1 - t)(1 \pm g)}$$

Ejemplos: 1). Determinar los lotes que podrían adquirirse con 800.000 marcos en el supuesto del ejemplo anterior.

Los valores a emplear serán los mismos que entonces excepto el N que ahora es incógnita y en su lugar tenemos el valor total de la compra, $V =$ 800.000, con lo que resulta:

$$N = \frac{800.000 \times 50}{136 \times 500 \times 60(1 - 0'025)(1 + 0'0015)} = 10 \text{ lotes}$$

tomando sólo la parte entera del resultado, puesto que ahora nos sucede lo mismo que en el caso de operaciones sobre títulos en que el nominal hallado no se ajusta a las condiciones prácticas.

2) Hallar el precio a que se cotizaría el café en Hamburgo para que una compra de 7 lotes importase 550.000 marcos.

Como las demás condiciones son las de los dos ejemplos anteriores, el quebrado que resuelve el problema según la fórmula antes encontrada será:

$$c = \frac{550000 \times 50}{7 \times 500 \times 60(1 - 0'025)(1 + 0'0015)} = 156'54 \text{ marcos}$$

549.—Operaciones en descubierto.—Las operaciones en descubierto que se hacen en las Bolsas de mercancías tienen iguales clases de primas que en las Bolsas de Valores y por consiguiente han de motivar idénticos cálculos, tanto numéricos como gráficos, produciendo cuentas de liquidación en los casos de varias operaciones de un especulador al mismo vencimiento, en cuyas cuentas se indica por una parte la cantidad a cobrar o pagar y las entregas o retiradas de mercancías, en forma igual a la de operaciones sobre valores que se halla en la página 590. Por esta identidad damos aquí por reproducido lo dicho en el capítulo anterior.

550.—Liquidación especial de operaciones a plazo.—A pesar de la identidad de contratación de las operaciones a plazo en las Bolsas de mercancías y en las de valores, según acabamos de decir, presentan las primeras caracteres especiales en la liquidación de las operaciones a plazo en la fecha en que las mercancías a entregar se han convertido en disponibles, pues siempre en las Bolsas de mercancías han de liquidarse las compraventas a plazo mediante la entrega de las mercancías por el vendedor y el dinero por el comprador y además ha de hacerse la liquidación no por el precio contratado, sino por el que haya en la fecha para las operaciones de contado.

Para hacer esta liquidación se emplea un talonario *(filière)* que sirve para retirar la mercancía, el cual se endosa por el primer vendedor al primer comprador, por éste al segundo comprador y así sucesivamente hasta llegar al último comprador en firme y que ha de retirar la mercancía que comprende el talonario.

Por las operaciones de compraventa que se cumplen por cada endoso, se hacen los cálculos parciales como de operaciones en firme y se lleva cuenta de la diferencia que resulta para cada contratante, que será diferencia a cobrar o a pagar, y al final se liquida la diferencia del primer vendedor en razón al precio de su contrato y al de contado del día.

Para facilitar estas operaciones existe en unas Bolsas un intermediario especial llamado *filièriste* (liquidador) que lleva cuenta semejante a la del ejemplo siguiente:

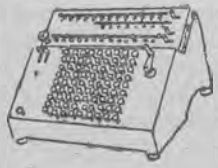
Suponiendo que *A* haya vendido una partida cualquiera a *B* al precio de 45, que este último la revendiera a *C* a 45'90, éste a *D* a 44, y por fin, éste la revende a *E* a 46, siendo el precio de contado el día de la liquidación 46'50, tendremos que *A* extenderá factura a su comprador al precio de 46'50 que es el precio del día, y los demás extenderán facturas por sus respectivos precios de contrato, liquidando al final *A* con *B* la diferencia entre el precio de 46'50 a que hizo la factura y el de 45 que es el contratado, resultando de todo ello la cuenta siguiente:

OPERACIÓN		SUMAS	
	Por	A recibir	A pagar
Talonario de *A* a *B*.....	A	46'50	
Endoso de *B* a *C*.....	B		0'60
» *C* a *D*.....	C		1'90
» *D* a *E*.....	D	2'00	
Recogida de mercancía por *E*.....	E		46'00
Diferencia de primer contrato.....	A		1'50
» » »	B	1'50	
Totales iguales.....		50'00	50'00

La causa de que se haga la primera operación al cambio de contado del día en vez del convenido para ella a plazo, está en que el talón o *filière* ha de servir para recoger las mercancías, y se ha de extender como si se tratase de operación al contado para facilitar el servicio de los almacenes.

También puede hacerse y se hace en algunas Bolsas las liquidaciones por medio de Cámaras de Compensación o de liquidación cuyo funcionamiento y cálculos son los mismos que hemos efectuado, como lo son también en los casos en que la *filière* se extienda el día de la venta con efectos para retirar el día del vencimiento de la operación, lo que sucede en las operaciones en descubierto, teniéndose entonces casos en que el creador de una *filière* llega a ser comprador de la misma para anular su venta y liquidar las diferencias, y en estos mismos casos la cuenta que ponemos más arriba tiene por primera partida el verdadero precio de venta faltando las dos últimas partidas por innecesarias.

EJERCICIOS *números* **1102** al **1112**; y **CDLXX** al **CDLXXV.**



LVI

CONVERSIÓN DE VALORES

551.—Cálculos que origina la conversión de valores.—Aunque no es posible establecer unas condiciones típicas y constantes para la transformación de valores por la operación de conversión (**508**), podemos, sin embargo, dejar sentado que se efectúa siempre a base de equivalencia o proporcionalidad del valor efectivo, del valor nominal o de la renta del valor que se transforma y de aquel en que queda convertido, resultanto por consiguiente, que la conversión de valores origina los cálculos que determinen esa igualdad o proporcionalidad, teniéndose tres casos semejantes que estudiamos a continuación.

552.—Conversión a base de valor efectivo.—Se emplea esta forma de conversión para la transformación de la deuda del Tesoro en deuda del Estado, cuando llegado el vencimiento de la primera o en época próxima al mismo se hace la llamada *consolidación* de la deuda.

Se hace la conversión a base de igual valor efectivo para la transformación de la deuda del Tesoro en deuda del Estado que se emite en el momento de la conversión, fijando el tipo de emisión y aquel porque se acepta a la conversión la deuda del Tesoro. El primero es siempre inferior a la par y el de la última sólo en raros casos es superior al valor nominal, admitiéndose sin embargo como valor efectivo para la conversión, los intereses corridos de la deuda a convertir desde el último cupón vencido, con lo cual resulta que el valor efectivo de ella se ha de calcular del modo que ya se conoce para las cotizaciones al seco (**524**).

Para el caso en que se determinen los dos cambios correspondientes de las deudas, y representando por N, C y E respectivamente el nominal, cambio y efectivo de la deuda que se emite y por las mismas letras con acento N', C' y E' el nominal, cambio y efectivo de la deuda que se ha de convertir, la condición de emisión del nuevo valor será

$$E = E'$$

en la que sustituyendo los valores de sus miembros según las fórmulas halladas para la compraventa (**523**) se tiene

$$\frac{NC}{100} = \frac{N'C'}{100}$$

que al simplificar nos da por relación fundamental

$$NC = N'C'$$

de donde se deduce para el problema principal de las conversiones, que es el nominal obtenido de la nueva deuda que se emite, el valor

$$N = \frac{N'C'}{C}$$

igualdad que servirá del mismo modo para encontrar también los cambios respectivos de las dos deudas o el valor del nominal preciso para obtener otro cualquiera en la conversión, que respectivamente habrían de ser:

$$N' = \frac{NC}{C'} \qquad C = \frac{N'C'}{N} \qquad C' = \frac{NC}{N'}$$

Ejemplos: 1) Calcular el nominal que se obtendrá en Deuda Perpetua al 4 °/₀ Interior por la conversión de 140.000 pesetas de obligaciones del Tesoro admitidas a la conversión al tipo de 101 °/₀ si el tipo de emisión de la Deuda es de 72 °/₀.

Los elementos de este problema tienen los siguientes valores:

$$N' = 140.000, \qquad C' = 101, \qquad C = 72$$

por lo cual el resultado que se busca ha de ser

$$N = \frac{140.000 \times 101}{72} = 196388'88 \text{ pesetas.}$$

Fijándonos ahora en el resultado anterior y en la posibilidad de obtención en títulos de la Deuda que se emite, haremos constar que en el caso de conversión no se redondea el nominal en la forma en que se hacía en el caso

de compra o venta en Bolsa **(523)**, sino que el resto que se obtiene por el redondeo en la posibilidad de obtener títulos exactos se entrega al suscriptor en un título especial llamado *resíduo*, y que en el caso que nos ocupa habría de ser por 88'88 pesetas.

2) Hallar el nominal necesario en títulos de una deuda cuyos nominales son de 5.000, 2.500 y 500 pesetas para obtener 150.000 pesetas nominales de otra deuda que se emite al cambio de 87'95 % si los valores de la primera se admiten a la conversión al cambio de 64 %.

Los valores especiales del problema serían

$$N = 150.000, \qquad C = 87'95, \qquad C' = 64,$$

con lo cual el resultado obtenido ha de ser

$$N' = \frac{150.000 \times 87'95}{64} = 206.132'81 \text{ pesetas}$$

y si ahora nos fijamos en la posibilidad de obtención de este nominal, hemos de convenir forzosamente en que o hemos de conseguir menos de las 150.000 pesetas de la nueva deuda, lo cual admitimos que no haya de hacerse, o hemos de necesitar mayor nominal en la deuda convertida, hasta el total posible aproximado por exceso, que sería de 206.500 pesetas.

El cálculo de los cambios no ha de ser necesario en la práctica porque se determinan por la entidad emisora de la nueva deuda y para dicha entidad el cálculo de los tipos de emisión y admisión a la conversión se hace por los procedimientos del Cálculo Financiero, que cae fuera de nuestro campo, y que por consiguiente nos impide resolver ejemplo que pudiera ser de utilidad a la vida de negocios.

Hasta ahora hemos considerado el caso en que la cotización de los dos valores convertido y emitido fuese percentual, pero como nada impide el que esta operación se haga para valores que se coticen a un tanto por título, en el caso en que así fuese, tendríamos para la relación fundamental de la conversión a base de efectivos

$$TC = T'C'$$

de donde despejaríamos los valores de títulos que puedan obtenerse, y títulos necesarios para suscribir una cantidad determinada de ~~títulos~~ títulos emitidos, que respectivamente tendrían por fórmula

$$T = \frac{T'C'}{C} \qquad \text{y} \qquad T' = \frac{TC}{C'}$$

Ejemplo: Se emiten obligaciones de una Sociedad en conversión de otras anteriores, fijando el cambio de emisión en 472 pesetas por título y el

de admisión a la conversión en 285 pesetas. Hallar los títulos que podrá obtener un propietario de 628 títulos viejos.

En este caso se trata de calcular el valor de T, siendo los elementos que han de intervenir en el cálculo

$$T' = 628, \qquad C' = 285 \qquad C = 472$$

por lo que se tendrá por resultado

$$T = \frac{628 \times 285}{472} = 379'19 \text{ títulos}$$

pero como no es posible obtener ahora simplemente un resíduo de título sino que ha de expresarse el valor nominal que le corresponderá, de ahí las dos formas de solucionar este resultado, absurdo prácticamente al parecer, y que son entregar la entidad emisora en efectivo al propietario de los títulos viejos las 92 pesetas que representan el valor efectivo de la fracción de título nuevo redondeando el resultado como en el caso de compraventa, o bien resolver la regla de tres que determine el valor nominal del resíduo en razón al nominal de cada título y al valor de emisión atribuído. Para el caso que nos ocupa, si el nominal de cada título fuese de 500 pesetas el resíduo tendría un valor de

$$\frac{500 \times 92}{472} = 97'45 \text{ pesetas.}$$

553. Conversión a base de valor nominal. - Esta clase de conversión se emplea para el caso de acciones de Sociedades cuando se hace cambio del capital, expresando entonces más que el nominal el número de acciones viejas necesarias para obtener otro número de acciones nuevas, así por ejemplo, si una Sociedad modifica el importe o composición de su capital por cualquiera de las múltiples causas en cuyo detalle no podemos entrar, y por cada 7 acciones viejas se obtiene en la conversión 2 acciones nuevas, entonces se considerará como nominales bien esos mismos números 2 y 7 o los que resulten de calcular en función de ellos el nominal verdadero de las acciones a convertir.

También se hace esta clase de conversión para la transformación de una clase de deuda en circulación, en otra también en circulación, cual sucede con la Deuda Perpetua Exterior de España que puede convertirse en Interior de igual tipo en proporción de nominales respectivos y sin tener en cuenta para nada el cambio de cada una en las Bolsas.

Por causa de la fijeza del nominal, cualquiera que sea la situación de los valores en el mercado y en el aspecto econó-

mico, los cálculos que exije esta especie de conversión se reducen a resolver una regla de tres por la proporcionalidad existente entre el número de títulos entregados y recibidos en la conversión y las bases de ésta, pues llamando V a los títulos viejos que se cambian por los A emitidos, el poseedor de T títulos viejos recibirá T', teniendo como proporción fundamental

$$V : A :: T : T'$$

de la que inmediatamente se calcula cualquier término conociendo los demás.

Ejemplos: 1) Una Sociedad ha reducido el capital nominal mediante la conversión de sus acciones, que antes eran de 1.000 pesetas cada una, en otras de 250 pesetas, y entregando 5 acciones nuevas por cada 5 viejas. Hallar el número de acciones nuevas que obtendrá un accionista que posee 48 acciones viejas.

Calculando la equivalencia de nominales en la conversión, se tiene que por cada $5 \times 1.000 = 5.000$ pesetas nominales en acciones antiguas se obtienen $250 \times 5 = 1.250$ pesetas en acciones nuevas, y por consiguiente el nominal que corresponderá al ejemplo propuesto será:

$$\frac{48000 \times 1.250}{5.000} = 20.000 \text{ pesetas}$$

las cuales componen 80 acciones nuevas, que es el resultado que se busca.

2) Para convertir una deuda en otra, se concede a los poseedores de la deuda a convertir un 15 % de prima sobre el nominal que se entrega a la conversión, y en estas condiciones se desea conocer el nominal que se obtendrá por la conversión de 346.700 pesetas de la deuda que se recoge.

Constituye este caso una aplicación del tanto por ciento **(9)** por la que resulta que el nominal obtenido en la conversión será:

Nominal entregado.....	Ptas.	347700
Prima de 15 %.....	»	52155
Nominal obtenido.....	»	399855

y si ahora no hubiese títulos por la cantidad exacta también se entregaría los resíduos de que antes hemos hablado.

Puede ser muy importante en esta especie de conversión, cuando se trata de acciones, el conocer la cantidad necesaria de acciones antiguas que se precisan para obtener un mínimo de acciones nuevas, porque este mínimo es a veces indispensable a fin de tener ciertos derechos en la Sociedad cuyo capital se transforma, caso que es el contrario al del ejemplo primero y que indudablemente se resolverá por la misma regla de

tres en que la incógnita sea el nominal de acciones antiguas, problema que por su sencillez nos evita la presentación de ejemplo resuelto.

554.– Conversión a base de renta.—Se hace esta clase de conversión cuando se desea prorrogar o hacer indefinido el reembolso de una deuda, o bien cuando habiendo diferentes clases de empréstitos de que es deudora una entidad, se desea obtener la unificación de todos ellos; lo que se consigue estableciendo condiciones de conversión que permitan a los poseedores de los valores a convertir seguir disfrutando de la misma renta, líquida con el nuevo nominal que se les entregará después de la operación.

El verdadero problema que se presenta en este caso de conversión consiste en la determinación de la proporcionalidad de los nominales que han de entrar en la permuta, en vista de las cotizaciones de cada clase de deuda al momento de la conversión.

Para ésto si llamamos C, E, t_n e i respectivamente al cambio, valor efectivo, tanto nominal de interés, y a los impuestos que gravitan sobre éste, referidos todos a la deuda en que haya de convertirse la otra, y por C', E', t'_n e i' a los mismos valores para la deuda que haya de ser convertida, es indudable que para la primera tendremos como tanto real de interés que produce (**491**, 2.°)

$$t_r = \frac{t_n(100 - i)}{C}$$

lo que da anualmente una renta efectiva de

$$R = \frac{Et_n(100 - i)}{100C}$$

y por idéntica razón para la segunda deuda esta renta efectiva habría de ser

$$R = \frac{E't'_n(100 - i')}{100C'}$$

valores que han de ser indudablemente iguales, teniendo

$$\frac{Et_n(100 - i)}{100C} = \frac{E't'_n(100 - i')}{100C'}$$

y si ahora tenemos presente que no hemos de operar con los valores efectivos, sinó con los nominales respectivos, podremos hacer intervenir en estas fórmulas dichos nominales sólo con sustituir las dos cantidades E y E' por las expresiones que sirven para calcularlas (**523**), con lo cual se tiene:

$$\frac{NCt_n(100 - i)}{100 \times 100\ C} = \frac{N'C't'_n(100 - i')}{100 \times 100C'}$$

expresiones que por simplificación se convierten en

$$\frac{Nt_n(100 - i)}{100 \times 100} = \frac{N't'_n(100 - i')}{100 \times 100}$$

en las cuales podemos quitar los denominadores que son iguales y tendremos:

$$Nt_n(100 - i) = N't'_n(100 - i')$$

de las que ya es posible despejar el valor de N' como nominal a encontrar, teniéndose:

$$N' = \frac{Nt_n(100 - i)}{t'_n(100 - i')}$$

fórmula que nos indica que *la conversión en base a la renta de los valores es independiente de las cotizaciones que tengan estos valores en Bolsa y sólo depende de los tantos efectivos de interés que producen estos mismos valores.*

Ejemplo: Si el Estado español tratase de unificar todas las deudas en circulación convirtiéndolas en Perpetua Interior del 4 °/₀, averiguar el nominal que correspondería entregar en títulos de la Deuda amortizable del 5 °/₀; y en títulos de Deuda Perpetua Exterior para que los tenedores de la Deuda obtuviesen la misma renta efectiva.

1) Para el primer caso podemos simplificar la fórmula suprimiendo los factores de los paréntesis por tener los dos valores el mismo impuesto sobre la renta, y así las cantidades con que hemos de operar serán:

$$N = 100 \qquad t_n = 4 \qquad t'_n = 5$$

y el resultado del problema:

$$(100 \times 4) : 5 = 80 \text{ pesetas nominales}$$

las cuales serán por consiguiente de Dueda Amortizable 5 °/₀ que se entregarán por cada 100 que se hayan de obtener en Deuda Perpetua 4 °/₀ Interior.

2) Para el segundo caso los valores que intervienen son:

$N = 100 \qquad t_n = 4 \qquad t'_n = 4 \qquad i = 20 \qquad i' = 0$

y por consiguiente el resultado ha de ser:

$$\frac{100 \times 4\,(100 - 20)}{4 \times 100} = 80 \text{ pesetas nominales}$$

que también han de ser entregadas en Deuda Exterior para obtener 100 en Denda Interior.

555.—Permuta de valores. – La permuta es la cesión de un nominal en una clase de valores en cambio de otro nominal en otra clase diferente de la primera.

El cambio a que nos referimos se hace siempre a base de igualdad de efectivos entre los valores cambiados y por consiguiente en el aspecto del cálculo es completamente idéntico al primer caso de conversión, al cual remitimos a nuestros lectores.

EJERCICIOS *números* **1039** al **1047** y **CDLXXVI.**



LVII

PIGNORACIONES

556.—Problemas que origina la pignoración.—La pignoración, (**507**) suele clasificarse en razón de las dos formas que se indican en la misma definición, de *pignoración en préstamo*, recibiendo inmediatamente el importe de la cantidad concedida y que garantizan los valores; y *pignoración en crédito*, si no se recibe inmediatamente la cantidad concedida y garantida; pero esta distinción, importante bajo el punto de vista administrativo y contable, por la cuenta corriente con interés que origina la última forma (**386**), es completamente inútil bajo el punto de vista del cálculo, porque las dos clases originan iguales operaciones matemáticas.

Son estas operaciones, las de determinación del importe del préstamo o del crédito cuando se conocen la clase y nominal de los valores entregados y el precio que les corresponde en Bolsa, o cualquiera de estos elementos si se conocen los demás del cálculo principal. Además será necesario calcular como secundario y con absoluta independencia los gastos de corretaje y timbre que cause la operación, (*) a todos los cuales se añadirá otro de carácter especialísimo que es la determinación del cambio llamado *de reposición*, que consiste en el límite al cual pueda bajar la cotización de la garantía para que se considere subsistente el contrato de pignoración y a partir de cuyo límite se exige el aumento de la garantía o bien la reducción del préstamo o crédito, en la cantidad bastante

(*) Estos cálculos son sencillas aplicaciones del tanto por mil o de cantidad fija de tarifa que por su sencillez no merecen tratarse con especialidad.

para que esté comprendido en el margen de la fracción de valor que se anticipa en toda pignoración, pues es norma general que el valor de la garantía excederá siempre en cierta proporción al del préstamo que garantiza.

También quizás pudiéramos decir que son cálculos originados por las pignoraciones los de determinación del interés, pero si la pignoración se hace en préstamo es éste un problema ya tratado, y si se hace en crédito también conocemos lo relativo a la cuenta corriente con interés que origina, por lo que no hemos de volver sobre el modo de hacer estos cálculos.

557.—Problema fundamental de la pignoración.— En lo que respecta a las pignoraciones, el margen de valor sobre el cual no se entrega cantidad alguna en préstamo, es siempre un tanto por ciento, expresándose por el quebrado equivalente que señale la parte de valor a que ha de corresponder la entrega en préstamo; así si, por ejemplo, sobre un valor se toma como margen de garantía el 40 %, se dirá que se presta solamente sobre los $^{3}/_{5}$ que son precisamente el equivalente del 60 % del valor que se pignora y que resta disponible para recibir en préstamo.

De lo dicho se deduce fácilmente que el problema fundamental de las pignoraciones consiste en determinar esa fracción del valor del bien pignorado, lo que por consiguiente se obtendrá por la multiplicación de dicho valor por la fracción que expresa el importe a que puede ascender el préstamo.

Si el valor se representa por V y la fracción por $^{n}/_{m}$ es indudable que el importe P que puede obtenerse por la pignoración, lo mismo en préstamo que en crédito ha de ser:

$$P = \frac{Vn}{m}$$

y sustituyendo ahora el valor de V por el que corresponde al bien que se pignora en función de su nominal y cambio, y que será el mismo de la compraventa (**523**), se tiene como fórmula fundamental de las pignoraciones

$$P = \frac{NC}{100} \times \frac{n}{m} = \frac{NCn}{100m}$$

si se trata de cotización percentual, y

$$P = \frac{TCn}{m}$$

si es unitaria la cotización del valor pignorado.

Ejemplo: Hallar la cantidad que se obtendría por la pignoración de 40 acciones del Banco de España de 500 pesetas nominales cada una, si se cotizan a 536 % y en esta clase de valores se anticipan los $^4/_5$.

Los valores que hemos de hacer intervenir son:

$$N = 40 \times 500 = 20.000, \qquad C = 536, \qquad n = 4, \qquad m = 5$$

y el resultado que se pide en el ejemplo será:

$$P = \frac{20.000 \times 536 \times 4}{100 \times 5} = 85.760 \text{ pesetas.}$$

558.—Cálculo del nominal y cambio.—Partiendo de las fórmulas que anteceden nos será fácil despejar las cantidades N, T y C que entran en ellas para conocer el nominal preciso para obtener en préstamo cantidad predeterminada, y el cambio de esa misma operación.

Las expresiones que darán tales valores serán

Cotización percentual	Cotización por título
$N = \frac{100mP}{Cn}$	$T = \frac{Pm}{Cn}$
$C = \frac{100mP}{Nn}$	$C = \frac{Pm}{Tn}$

Ejemplos: 1) Hallar el número de acciones de la Compañía de los Ferrocarriles del Norte de España que se necesitará pignorar para tener un crédito de 450.000 pesetas, siendo los $^3/_5$ la cantidad que se concede por esta clase de valores, y si la cotización en Bolsa es de 487 pesetas por acción.

Debemos determinar el valor de T siendo los demás valores los siguientes:

$$P = 450000, \qquad C = 487, \qquad n = 5, \qquad m = 5$$

con lo cual tendremos:

$$T = \frac{450000 \times 5}{487 \times 5} = 1550'65 <> 1551 \text{ acciones.}$$

2) Determinar el cambio que han de alcanzar las Cédulas Hipotecarias del Banco Hipotecario de España, sobre las que conceden los $^4/_5$ de su valor en pignoración, para obtener 62.000 pesetas en préstamo con 145 cédulas de 500 pesetas nominales cada una.

Son los valores de la fórmula para este caso particular:

$$P = 62.000, \qquad N = 145 \times 500 = 72.500, \qquad n = 4, \qquad m = 5$$

de los cuales establecemos el siguiente quebrado como solución del problema

$$C = \frac{100 \times 5 \times 62.000}{72.500 \times 4} = 106'89\ \%$$

559.- Cálculo de la reposición.—Para el límite del cambio o sea el *cambio de reposición* está señalado generalmente el que descienda en su 10 % del que se establece como base de la operación, por lo cual el cálculo que origina se reduce a una operación mental de tanto por ciento (**9**).

Cuando se llega al límite de ese cambio sabemos que hemos de calcular la garantía a reponer y si llamamos R al importe de este nominal a reponer, es indudable que el nuevo nominal después de la reposición ha de ser el antiguo N más lo repuesto R, y como también el nuevo cambio por el descenso se ha convertido en

$$C - 0'1C = C - \frac{C}{10}$$

el valor de este nuevo nominal en garantía según el cambio descendido habrá de ser

$$(N + R)\left(C - \frac{C}{10}\right)$$

valor que para conservar el mismo importe del préstamo o crédito, ha de ser equivalente al que tenía la primitiva garantía al primitivo cambio, lo que expresaremos por la igualdad

$$\frac{(N + R)\left(C - \frac{C}{10}\right)}{100} = \frac{NC}{100}$$

la que simplificada por desaparición de denominadores se convierte en esta otra

$$(N + R)C(10 - 1) = NC \times 10$$

y de aquí, despejando el factor en que entra la incógnita R y simplificando tenemos sucesivamente

$$N + R = \frac{10NC}{C(10 - 1)} = \frac{10N}{10 - 1}$$

y para valor de la incógnita

$$R = \frac{10N}{10 - 1} - N$$

que por reducción del entero del segundo miembro a quebra-

do, y efectuando sucesivamente las operaciones que van estando indicadas, se transforma en esta otra:

$$R = \frac{10N \quad (10-1)N}{10-1} = \frac{N[10-(10-1)]}{10-1} = \frac{N}{10-1}$$

que es ya la fórmula que señala el medio que hemos de seguir para calcular el nominal a reponer.

Como el resultado final es independiente del cambio y de 100, es indudable que también ha de servir por igual para cotización percentual y para cotización unitaria y que por consiguiente podemos sentar que *la garantía que ha de reponerse en las pignoraciones es siempre igual a la novena parte de la primitiva*, continuando, claro está, la condición de reposición para el caso en que el descenso de la cotización sea el 10 % de lo que sirvió de base.

Ejemplo: Determinar el nominal que deberá entregarse en acciones de la Sociedad CHAIM para reponer la garantía de un préstamo de 125.000 pesetas efectivas hecho sobre las citadas acciones cuando se cotizaban a 496 pesetas por acción de 500 nominales, si el cambio actual es de 446 pesetas por acción, el límite de descenso era del 10 % y se prestaron los tres cuartos del valor.

Calculando el nominal de la primitiva garantía según las fórmulas del párrafo anterior, hallaremos que el número de acciones habrá sido

$$T = \frac{125000 \times 4}{496 \times 5} = 335 \text{ acciones}$$

cuya novena parte serán las necesarias para la reposición, hallando como resultado pedido

$$R = \frac{335}{9} = 38 \text{ acciones},$$

ya que en ambos casos ha de hallarse el resultado por exceso.

360.—Reducción del préstamo.—La disminución del préstamo por causa del descenso en la cotización ha de calcularse teniendo presente que dicho préstamo es función del valor de la garantía, pues es indudable que también sufrirá las variaciones semejantes a las de este valor, y en todo caso dicha reducción ha de ser de un importe directamente proporcional al descenso de la cotización, y si se quiere puede calcularse el importe del préstamo con el nuevo cambio, y entonces la reducción será la disminución de este resultado respecto al anterior.

Ejemplo: Calcular la reducción del préstamo anterior para el caso de no poderse reponer la garantía.

Basta plantear la proporción de

$$496 : 496 - 446 :: 125000 : x$$

que da por resultado pedido

$$x = \frac{125000 \times 50}{496} = 12600'80 \text{ pesetas,}$$

resultado que acostumbra a redondearse en la práctica.

EJERCICIOS sobre pignoraciones, los *números* **1048** al **1066** y **CDLXXVIII** al **CDLXXX**.

PROBLEMAS de pignoraciones con otras cuestiones antes estudiadas, los *números* **1432; 1446; 1454; 1459;** y **DLXVI** al **DLXX**.

561. Pignoraciones graduales.—Se denomina así la compra de valores con el producto de una pignoración, repitiendo pignoración y compra todas cuantas veces sea posible.

El cálculo necesario en estas operaciones ha de ser determinar el total obtenido por las sucesivas pignoraciones y el límite a que dicho total puede alcanzar teóricamente.

Siendo A el valor que se dispone para la primera pignoración y p/q la fracción que expresa la cantidad que puede obtenerse, y que después se emplea en compra de nuevos títulos, la cantidad que se posee en valores después de la compra será la suma del primitivo valor A y el $A \times \frac{p}{q}$ obtenido en la primera pignoración.

Ahora bien: por la pignoración y sucesiva compra habrá sido necesario pagar ciertos gastos que habrán sido el corretaje de compra y de pignoración y además el timbre de las pólizas de las dos operaciones, pero cualquiera que sea el importe de estos gastos siempre pueden expresarse con suficiente aproximación en tanto por ciento o mil, y representarse por G por uno, con lo cual el valor $A \times \frac{p}{q}$ que se obtiene en la primera pignoración después de hecha la compra, produce un aumento del valor poseído en títulos equivalente al producto

$$A\left(\frac{p}{q} - G\right)$$

Este valor es el que se pignora de nuevo y el líquido obte-

nido se vuelve a emplear en otra compra, operaciones ambas que en conjunto originan otros gastos proporcionales iguales a G, y que por consiguiente, por la segunda operación, el aumento que sufre el valor poseído en títulos una vez hecha la compra siguiente a la segunda pignoración, ha de ser

$$A\left(\frac{p}{q} - G\right)\left(\frac{p}{q} - G\right) = A\left(\frac{p}{q} - G\right)^2$$

Este valor sufre otra pignoración y con el producto de ella se compran nuevos títulos por valor de

$$A\left(\frac{p}{q} - G\right)^2\left(\frac{p}{q} - G\right) = A\left(\frac{p}{q} - G\right)^3$$

y al final de n pignoraciones y compras subsiguientes el total valor efectivo de títulos poseídos estará dado por la suma

$$A + A\left(\frac{p}{q} - G\right) + A\left(\frac{p}{q} - G\right)^2 + A\left(\frac{p}{q} - G\right)^3 +$$
$$+ A\left(\frac{p}{q} - G\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A\left(\frac{p}{q} - G\right)^n$$

que constituye una progresión geométrica decreciente de razón $\left(\frac{p}{q} - G\right)$ por lo cual si representamos por Σ al valor total de los títulos poseídos, dicho valor será:

$$\sum_0^n = \frac{A - A\left(\frac{p}{q} - G\right)^n \times \left(\frac{p}{q} - G\right)}{1 - \left(\frac{p}{q} - G\right)} = \frac{A - A\left(\frac{p}{q} - G\right)^{n+1}}{1 + G - \frac{p}{q}} =$$

$$= \frac{A\left[1 - \left(\frac{p}{q} - G\right)^{n+1}\right]}{1 + G - \frac{p}{q}} \qquad [1]$$

Ya que conocemos el valor de los títulos que se pueden adquirir, determinaremos el obtenido por las pignoraciones con solo restar del resultado que da la fórmula anterior el valor que primeramente se poseía, es decir el valor A.

En cuanto al *límite máximo* que puede llegar a tener la fórmula anterior corresponderá al caso teórico en que las pig-

noraciones y compras llegasen al infinito, en cuyo caso la potencia indicada en el numerador de la fórmula se reduce a cero por ser la base menor que la unidad y entonces se tiene

$$\Sigma = \frac{A}{1 + G - \frac{p}{q}} = \frac{Aq}{(1 + G)q - p} \qquad [2]$$

fórmula que es solamente teórica porque llegado a cierta cantidad mínima, que determinan los Bancos y establecimientos que pignoran, ya no es posible repetir la operación y por consiguiente no es exacto que se llegue a un número de pignoraciones tan grande como se desee para que la fórmula encontrada nos dé el *valor al límite*.

Otra causa que hace que tampoco sea posible en la práctica la realización de estas pignoraciones graduales hasta el infinito, es la imposibilidad de encontrar títulos de valor lo bastante pequeño para adquirir cualquier cantidad. Esta causa de imposibilidad en cuanto al límite de las operaciones graduales de pignoración es también causa de error en el resultado que da la fórmula [1], pues según llevamos dicho en varios lugares, en las compras hay residuo de valor efectivo que no es posible emplear en la adquisición de títulos por no haberlos del nominal tan pequeño como sería preciso.

No obstante el error que acabamos de señalar, la fórmula dará resultados prácticos de gran valor para los casos raros en que puedan ser administrativamente posibles las pignoraciones graduales.

Ejemplo: Hallar el límite que podría alcanzarse por medio de pignoraciones graduales con un capital compuesto de 125 acciones de la Compañía Arrendataria de Tabacos de 500 pesetas nominales cada una, si el cambio a que se cotizan en Bolsa es de 255 %, los gastos que originan estas operaciones son el 1 ½ ‰ de corretaje de la compra, 1 ‰ de corretaje de la pignoración y 1 ½ ‰ de timbre de las dos operaciones en conjunto, y siendo de ⅘ la fracción que señala el importe de los préstamos.

Para aplicar la fórmula hemos de calcular previamente el valor efectivo de esas acciones, que será

$$\frac{125 \times 500 \times 255}{100} = 146.875 \text{ pesetas,}$$

y además el valor de G, para lo cual nos encontramos con que el conjunto de los gastos asciende a 4 ‰, que por 1 será 0'004, con lo cual ya aplicamos la fórmula con los siguientes valores especiales:

$$A = 146.875, \qquad G = 0'004, \qquad p = 4, \qquad q = 5$$

de donde tenemos para el límite pedido

$$\frac{146.875 \times 5}{(1 + 0'004)5 - 4} = \frac{734.375}{5'020 - 4} = \frac{734.375}{1'02} = 719.779'41 \text{ pesetas.}$$

EJERCICIOS *números* **1067** al **1071.**

562.—Formas de pignoración de mercaderías.—Las pignoraciones de mercancías suelen ser grandemente diferenciadas de las que se hacen con los valores, tanto porque el fin de las de mercancías por los Bancos es de ayuda más propiamente directa a la Industria y al Comercio, cuanto por los cuidados de la garantía y la representación de ella.

Las pignoraciones de valores constituyen en la mayoría de las veces operaciones de capitalistas, y siempre la garantía está bajo la vigilancia directa del establecimiento prestamista o de sus representantes también banqueros, mientras que las pignoraciones de mercancías se hacen por los comerciantes o industriales en espera de venderlas, proporcionando a los primeros los medios de pago de sus compras y a los últimos los fondos necesarios para continuar la producción hasta la época de venta de productos terminados.

Por estas diferentes circunstancias nacen también distintas formas de pignoración de mercancías. Hemos hablado en otra parte (**333** y **337**) de las *letras de cambio documentarias*, sin entrar en detalle de la causa de esta denominación, y ahora hemos de añadir que se llaman así los efectos de comercio a los que acompañan los documentos que prueban la propiedad de mercancías en camino, y que servirán para recogerlas a la llegada a su destino, forma mediante la cual el vendedor obtiene el descuento de los efectos girados a cargo del comprador, endosando al Banco los documentos de propiedad de las mercancías, y éste a su vez los endosará al comprador en el momento de cumplir el requisito de la aceptación o pago, o bien los utilizará para vender las mercancías precisas para resarcirse de sus anticipos.

También se hacen anticipos sobre mercancías que se conservan en los almacenes del deudor, si bien esta operación es sumamente arriesgada para la Banca y más que pignoración de mercancías constituye créditos o préstamos con garantía

personal por descuento de los efectos que antes llamamos papel de crédito (**328**).

Más propio de este grupo de operaciones son los anticipos hechos pignorando mercancías en forma semejante a las pignoraciones de valores, mediante el depósito de los artículos en almacenes del propio Banco o en otros cualesquiera, y con póliza intervenida por Corredor.

De cualquiera de las tres formas anteriores de pignoración de mercancías, la venta de ellas exige la cancelación del anticipo hecho interviniendo el Banco acreedor, y cumpliendo requisitos que entorpecen no poco las operaciones de compraventa, por lo cual se hace la pignoración por medio de los Warrants (**321**), que permiten transmitir la mercancía pignorada sin cancelar el préstamo ni deshacer el depósito.

El Warrant consta de dos partes iguales, en cada una de las cuales se detallan las mercancías depositadas en los almacenes de quien le extiende (*), y las circunstancias del préstamo concedido sobre ellas. Cada una de esas dos partes representan respectivamente la propiedad de las mercancías y el resguardo del anticipo, y solo estando las dos unidas se pueden retirar del almacén los géneros comprendidos en el Warrant. La transmisión de una sola o de las dos partes conjuntamente se hace por endoso, aunque el documento esté extendido en forma nominativa, y cuando se concede un préstamo se endosa solamente a favor del acreedor el resguardo de garantía, y se hace constar en ambas partes el importe y condiciones del anticipo según hemos dicho. El propietario de las mercancías sigue teniendo la disponibilidad de ellas en cuanto a la venta, pudiendo hacer ésta mediante el endoso del resguardo de propiedad y recibiendo en pago de la venta solo la diferencia entre el valor de las mercancías y todas las deudas que constan en el documento. El comprador si desea retirar las mercancías compradas cancela el préstamo y recoge el resguardo de garantía para con las dos partes hacerse entrega de los géneros.

(*) Aunque generalmente los warrants se extienden por los almacenes generales de depósito, también pueden serlo por particulares, como sucede en algunos países, entre ellos Inglaterra donde hay los *docks-warrants* y los *warehouse-warrants* según sean los almacenes generales o casas particulares quienes los extiendan.

A la vez el que hace el anticipo tiene la disponibilidad de su crédito, porque también puede endosar su resguardo como un efecto de comercio, y puede también con solo esta parte del warrant hacer que se vendan las mercancías si no fuese pagado al vencimiento del préstamo.

Complemento de todas estas formas de pignoración son las operaciones de report **(504)** en las contrataciones de mercancías a plazo y hasta la misma pignoración de mercancías futuras contratadas a plazo en las Bolsas.

563.—Descuento de letras documentarias.—Esta forma de pignoración puede ser considerada solo como descuento de efectos de comercio sobre cuyos cálculos hemos dado suficientes detalles en el capítulo XXXII, evitándonos hacer repeticiones que nada aclararían. Lo mismo sucede con el descuento de efectos garantidos por mercancías en poder del deudor.

564.—Pignoración con depósito o con warrant.—Estas operaciones son las de verdadera pignoración y en ellas se hace preciso determinar el importe del anticipo, de forma semejante a la de las pignoraciones de valores y tomando por base el precio de mercado de las mercancías (*), por cuya causa solo se admiten en garantía mercancías que tienen frecuentes cotizaciones en mercados vecinos para poder vigilar estas cotizaciones y determinar en vista de ellas las reposiciones de la garantía o la disminución del préstamo, todo cual si se tratase de valores u otra garantía cualquiera, si bien en las mercaderías se concede en anticipo un tanto por ciento mucho menor, que no suele pasar del 60 %, y que casi siempre es solo del 50 %, pues además de las mayores oscilaciones de los precios, existe en los géneros las mermas y alteraciones naturales y otros riesgos que precisan desembolsos que deben pagarse antes que la deuda que garantizan.

Obtenido el préstamo, que motiva iguales cálculos que los de pignoración de valores, pueden ser descontados los warrants en la forma en que se hace el descuento de letras de cambio y demás efectos **(334)**, restando solo como cálculo especial el de la cancelación antes del vencimiento.

(*) Si se trata de mercancías sin cotización oficial debe ser certificado el precio por un corredor de comercio.

Cuando las mercancías de un warrant son vendidas antes de que venza la pignoración y se endosa a favor del comprador el resguardo de propiedad es muy frecuente en éste cancelar el préstamo, y en tal caso acceden los Bancos a bonificar los intereses no vencidos, aunque no estén obligados a ello, mediante indemnización de 5 a 15 días de intereses o durante todo el plazo que falta por vencer a un tipo inferior en 1 o 2 % al convenido para el préstamo. En este caso puede ser conveniente determinar los días que son equivalentes al tipo del préstamo, a los intereses según el tanto reducido, y para ello representaremos por x esos días y por a la rebaja en el tipo de interés, con lo cual este tipo reducido será

$$t - a$$

y la igualdad a que nos referimos

$$\frac{Ctx}{100} = \frac{C(t-a)n}{100}$$

de donde resulta para el valor buscado

$$x = \frac{100C(t-a)n}{100Ct} = \frac{n\,(t-a)}{t}$$

Ejemplo: Un Banco que presta sobre mercaderías al 6 % de interés se encuentra solicitado de cancelar un préstamo sobre warrant al que faltan para vencer 20 días, mediante la indemnización de unos días de interés. Este Banco que tiene de costo del descuento **(330)** el 3'45 % ha de obtener un beneficio por toda la operación de préstamo que se cancela anticipadamente, y rebaja el 1 ½ % durante los días de anticipo de la cancelación; determinar los que cobrará al deudor como indemnización que se le propone.

Por la aplicación de la fórmula tenemos

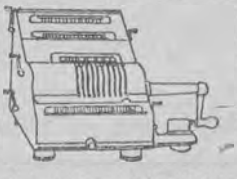
$$\frac{20(6-1'5)}{6} = 15 \text{ días.}$$

565.—Pignoración de materias de oro y plata.—Se hacen estas pignoraciones en la misma forma que las de valores con un tanto por ciento mayor de anticipo por la mayor fijeza y facilidad de enajenación de estos bienes, y además presentan los cálculos que origina, la particularidad de necesitar hacerse dos veces, pues reconocidos los lingotes como de metal fino y admitidos a la pignoración, se necesita el ensayo de ellos para conocer su verdadero valor y en tanto que se hace el ensayo se concede un anticipo provisional calcula-

do a una ley preestablecida, que suele tener por límite máximo la del sistema monetario, liquidando la diferencia después del ensayo con arreglo a lo que resulte de él.

También ahora se originan los mismos gastos que en las pignoraciones de valores y además el propio del ensayo a que es preciso someter los lingotes para saber con exactitud su valor, y como este gasto especial suele ser un tanto alzado su carácter fijo no requiere nuevos detalles.

EJERCICIOS sobre pignoraciones de mercancías y metales, los *números* **1303** al **1308;** y **CDLXXXI** al **CDLXXXV.**



LVIII

ESTUDIO GENERAL DE ARBITRAJES

566.—Concepto de arbitrajes.—Podíamos definir el arbitraje como un cálculo de elección, pues que su objeto es determinar cuál es el medio más beneficioso de realizar una operación mercantil.

El arbitraje será por consiguiente un cálculo simulado y preventivo que si no es el cálculo propio de la operación ejecutada es el medio indispensable para su ejecución, puesto que del resultado de este cálculo depende el que la operación se ejecute en una o en otra forma, ya que entre todas existirá alguna diferencia, y de aquí que se llame *operación de arbitraje* la que se ejecuta para beneficiarse con las diferencias que existan entre las varias formas de cumplimiento de la operación principal.

567.—Procedimiento del cálculo.—Para hacer un arbitraje se han de efectuar los cálculos suponiendo las operaciones realizadas y referidas a igual número de unidades, por los procedimientos que se utilizan cuando las operaciones han sido ejecutadas, procedimientos que ya nos son conocidos, y después se comparan los resultados obtenidos según todos los medios que hay para ejecutar la operación, para elegir el que sea más beneficioso para el operador, porque le dé un producto mayor o exija menos esfuerzos o desembolsos por parte del mismo.

Los cálculos han de referirse a igual número de unidades para todas las formas de ejecución de la operación de que se trate, porque de otro modo no sería posible establecer la comparación característica del arbitraje, y siempre que tales cálcu-

los se efectúan se toma como número tipo de unidades 100 o bien 1, por la facilidad de operar con estos números, aunque puede tomarse cualquier cantidad como en efecto se hace en operaciones especulativas sobre el beneficio de las diferencias.

568.—Objeto de nuestro estudio.—Por lo que dejamos dicho parece que no hemos de hacer ahora sino repetir los estudios hechos con anterioridad para las diferentes operaciones mercantiles que hemos ido considerando; pero claro está que si éste hubiese de ser el trabajo que nos resta, no habíamos de formar parte exclusiva con los arbitrajes.

Las operaciones de elección de procedimiento para la ejecución de una operación mercantil, han de ser semejantes en muchos casos, y las operaciones simuladas lo serán también en circunstancias idénticas, de donde deduciremos la necesidad de formular leyes o procedimientos generales que sirvan para hacer la elección sin repetir el cálculo, pudiendo ser este trabajo de comparación general, objeto de un estudio independiente del mismo de las operaciones.

Con estas ligeras ideas bien puede comprenderse que esta parte de nuestro trabajo ha de servir para conocer de modo general el medio más beneficioso para realizar una operación cuando las circunstancias de su ejecución sean normales y similares a las usuales en la vida de negocios que hemos venido considerando hasta aquí.

Los estudios de los arbitrajes, como deducción de normas para la elección de las operaciones, constituyen una interpretación matemática de las condiciones económicas en que se desarrollan las mismas operaciones, y teniendo presente que estas condiciones económicas sufren alteraciones en su cuantía y permiten combinaciones de varias operaciones simples en una sola operación de arbitraje, conviene, a la vez que se hace el estudio de carácter general a que ha poco nos referíamos, disponer resultados múltiples de las combinaciones más frecuentes para tener facilidad en esa elección sin recurrir al nuevo cálculo. Estos, datos dispuestos en forma de consulta, pueden afectar la forma de cuadros en que sólo se conozcan las operaciones y combinaciones previamente calculadas; pero con los mismos resultados que se presentan en los cálculos puede deducirse la ley de variación de las combinaciones a

que dan origen, disponiéndolos en forma de gráfico, en el cual las líneas que dán el resultado porque puede hacerse la elección, tendrán curvatura o inclinación con respecto a los ejes del cálculo que permitan prolongarlas con facilidad, ampliando de este modo los datos que contendría un cuadro y permitiendo mejor dar grandes combinaciones y resultados en menor espacio.

Vemos, pues, que nuestro estudio ha de ser de carácter numérico y gráfico; numérico para conocer las leyes generales de operaciones similares, y gráfico para dar a estas leyes el mayor carácter beneficioso posible, para su consulta y operación de arbitraje consiguiente.

Nos queda por fin una parte que considerar para saber el campo en que hemos de desenvolver nuestro trabajo, puesto que siendo diversas las especies de arbitrajes cabe que hayamos de estudiarlas todas; pero también hemos hecho observar, en no pocas ocasiones, que nuestro objeto es el estudio de aquellas operaciones necesarias en el comercio en cuanto es intermediario en la circulación que pone los productos al alcance del consumidor, pero que caían fuera de nuestro objeto aquellas otras operaciones mercantiles que tienen por fin regular la circulación y aprovecharse de las variaciones de valor para obtener por sólo estas variaciones un beneficio, operaciones estas últimas que se llaman de especulación; y en consecuencia caerán fuera de nuestro campo los arbitrajes que tengan ese carácter de especulación, según hemos manifestado en diversas otras ocasiones.

569.—Importancia y utilidad de los arbitrajes.—Las condiciones actuales de las economías mundiales exijen que siempre que haya de ejecutarse una operación, se estudie detenidamente las condiciones de probabilidad de beneficio que en la misma haya de obtenerse, y por tanto todas las operaciones exijirán cálculos preventivos que manifiesten del modo más aproximado posible los resultados de estas operaciones.

Parte de estos cálculos preventivos son los de arbitraje, luego su importancia ha de ser extraordinaria, y hemos de obtener tanta mayor utilidad, cuanto mayores sean las facilidades de los cálculos, y más aún si conseguimos suprimirlos, como decimos puede llegarse a verificar por las tablas de arbi-

trajes y medios gráficos a que nos hemos referido, así pues, el calculista encontrará en estas últimas páginas beneficios más directos que los encontrados en las anteriores; de aquí que los cálculos de arbitrajes sean en la dirección de los negocios de un uso constante y hasta los únicos que hayan de efectuar los directores de las empresas en que la división del trabajo administrativo sea grande.

Considerados los arbitrajes como medios de obtener algún beneficio por medio de lo que llamamos antes operación de arbitraje, constituyen el medio por excelencia para nivelación de precios en los distintos mercados, pues los especuladores se hallan en contacto con todos esos mercados y compran o venden en unos u otros según el sentido de las diferencias, absorviendo el sobrante momentáneo de un mercado para cederlo en el lugar de falta.

570.—División de los arbitrajes.—Podemos establecer la clasificación de los arbitrajes atendiendo a dos aspectos principales de los mismos, como son el objeto sobre que recae la operación arbitrada y el fin que se persigue con la misma operación, puesto que ya en otras varias ocasiones de este trabajo hemos hecho notar que por medio de los cálculos de arbitraje podían tener principio operaciones de especulación. Resultan, pues, las dos clasificaciones siguientes:

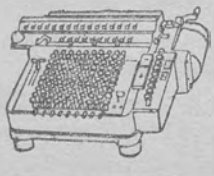
1.° *Por el objeto.* Pueden ser los arbitrajes sobre cambios y operaciones de cobro y pago en general, a los que se llama *arbitrajes de banca; arbitrajes sobre valores*, si las operaciones son de adquisición y venta de valores mobiliarios; *arbitrajes sobre metales preciosos*, si son estos bienes los que han de comprarse o venderse o emplearse como medios de pago; y *arbitrajes sobre mercaderías*, cuando se trate de compraventa de géneros de comercio.

2.° *Por el fin.* Han de distinguirse los arbitrajes *de especulación* de los *arbitrajes de elección*, en la forma antes enunciada; pero esta división es sólo importante técnicamente, puesto que el cálculo de las dos especies es el mismo, o sólo tiene el de especulación la determinación de una diferencia de importes entre las varias formas de la elección.

571.—Cobros y pagos en el país en que se opera.—El desarrollo adquirido por los Bancos, que hizo desaparecer la operación llamada de

cambio nacional **(353)**, ha hecho también que no sea posible efectuar operaciones de verdadero arbitraje para los cobros y pagos de cantidades en el mismo país en que se opera, puesto que las comisiones que cobran los Bancos por los giros que ceden, órdenes que ejecutan, y transferencias entre cuentas de sus clientes **(343)**, y el importe del cambio de los efectos como pérdida de plaza, independiente del descuento **(333)** son equivalentes y no permiten más elección que el determinar si un cobro haya de hacerse por remesa del deudor o giro del acreedor, pero como una y otra forma tienen según decimos el mismo gasto, sólo resultará entre ambos medios la diferencia de plazo, ya que suponiendo invariable la fecha en que el deudor haga el pago por cualquiera de los medios de realizar la operación, resultará para el acreedor que negociando letra a cargo del deudor tendrá un descuento y esperando la remesa perderá intereses, que en general se compensarán.

Si este descuento e intereses fuesen distintos, podría admitirse el arbitraje, y así sucederá en la práctica en que el acreedor perderá intereses a un tanto más bajo que el que le aplicaría el Banco **(388**, 1.º**)** decidiéndose por que el deudor le haga remesa, con lo cual tendrá además la ventaja de evitar el riesgo de devolución del giro **(347)**, por lo que *siempre que en la moneda nacional sea posible hacer elección o arbitraje entre los medios de cobrar una cantidad será el más beneficioso para el acreedor la remesa por apunte de su deudor*, si bien ésto no siempre es posible, porque las condiciones de venta pueden determinar el medio que haya de emplearse para la reposición del importe de la venta.



LIX

ARBITRAJES DE CAMBIO DIRECTO

572.—Arbitraje sobre cambios: Su división.—El arbitraje sobre cambios tiene por objeto hallar el medio mejor para cobrar o pagar una cantidad de moneda extranjera, es decir para el traslado de fondos de una plaza a otra.

Pueden establecer el arbitraje, el que debe pagar una deuda en plaza extranjera, con objeto de conocer cuál sea la vía menos costosa; el que haya de cobrar un crédito, para elegir el medio que produzca mayor cantidad; y el que trate de obtener un beneficio con el desequilibrio de los cambios convirtiéndose en deudor o acreedor según sus conveniencias.

Los arbitrajes pueden distinguirse en las tres clases siguientes, según la causa que los motiva:

a) Arbitrajes de deudor o de pago.

b) Arbitrajes de acreedor o de cobro.

c) Arbitrajes de especulación.

Cualquiera de los que hayan de hacer un arbitraje han de examinar todas las vías posibles de ejecución de la operación para conocer la más conveniente; pero los medios de cobrar o pagar una cantidad de moneda extranjera constituyen el cambio trayecticio (**353**) tal como hoy ha de entenderse la palabra cambio, luego esas combinaciones serán las mismas que hemos visto podían existir al tratar de las operaciones de cambio, y en general hemos de hallarnos con las dos principales de medio directo o indirecto, teniendo en consecuencia una división de arbitrajes en

1.°, arbitrajes de cambio directo, llamado comúnmente arbitraje *simple*, y

2.º, arbitrajes sobre el cambio indirecto, conocido con la denominación de *complejo* o *compuesto*, por tratarse de combinaciones de cambios, subdividiéndose éste según el número de plazas que entran en la combinación, si bien este número que teóricamente puede ser ilimitado no ha de alcanzar en la práctica sino valores muy pequeños, por causa de las grandes dificultades que se presentan cuando hayan de ser varias las plazas que comprenda el arbitraje, y en tales condiciones, casi siempre en la combinación de cada uno de los medios de cobro y pago, no entran más que tres plazas, y en muy pocas ocasiones cuatro, no pasando nunca de este número a no ser en algunos casos de especulación.

573.—Comparación de los cambios recíprocos.— Los cambios recíprocos (**372**) de dos plazas no son iguales en la práctica según se calculen con la cotización de una o de otra, y esta diferencia es la que puede dar origen al arbitraje.

Para conocer la plaza más ventajosa, debemos distinguir entre que las dos cotizaciones se hagan por inciertos, por ciertos, o a igual o diferente plazo, en la forma siguiente:

1.º *Cotizaciones contrarias.*— Sean las dos plazas P_c y P_i que respectivamente se cotizan por C_c en la primera sobre la segunda como plaza cierta esta primera, y por C_i en la segunda sobre la primera siendo la segunda plaza incierta, es indudable que las dos cotizaciones C_c y C_i se hallan expresadas en la moneda de P_i y por consiguiente cabrá el arbitraje cuando se tenga

$$C_c \lessgtr C_i$$

2.º *Cotizaciones semejantes.*—Si las dos plazas cotizan las dos el cierto o las dos el incierto, resulta que sus cambios C' y C'' están expresados en dos monedas diferentes y que para su comparación hemos de calcular los cambios recíprocos por la proporción que los une (**372**), en la cual sean las bases de los cambios B' y B'', y llamando C'_r y C''_r a los cambios recíprocos que resultan según la cotización de la otra plaza se tienen las dos proporciones

$$C' : B' :: B'' : C''_r$$
$$C'_r : B' :: B'' : C''$$

de las que resulta para esos cambios recíprocos

$$C''_r = \frac{B'B''}{C'} \qquad \text{y} \qquad C'_r = \frac{B'B''}{C''}$$

y el arbitraje podrá tener lugar cuando suceda

$$C''_r \lessgtr C'' \qquad \text{o bien} \qquad C'_r \lessgtr C'$$

en cuyas desigualdades podemos sustituir los cambios recíprocos calculados por los valores de sus respectivos cálculos antes encontrados, y obtendremos sucesivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{B'B''}{C'} \lessgtr C'' \\ \dfrac{B'B''}{C''} \lessgtr C' \end{array}\right\} B'B'' \lessgtr C'C''$$

3.° *Cambios a plazo diferente.*—Teniendo en cuenta que la mayoría de las cotizaciones se refieren al plazo vista, en el que también se hacen la inmensa mayoría de las operaciones de cambios, las más de las veces hemos tenido que referir las cotizaciones a plazo distinto, por lo que para simplificar utilizaremos esta transformación, y haremos que la cotización a plazo largo sea la C' puesto que podemos elegir para esa plaza la notación deseada, y resultará que en las expresiones que señalan la posibilidad del arbitraje hemos de introducir el factor $\frac{D}{D-n}$ o el $\frac{D-n}{D}$ según que la cotización que se reduce de plazo sea de plaza incierta o fuere de plaza cierta, y hecha esta reducción de plazos nos encontraremos en uno de los casos anteriores por cuyas fórmulas establecemos la posibilidad del arbitraje.

574.—Arbitraje de cotizaciones contrarias.—Según la expresión de comparación de los cambios recíprocos en este caso, si consideramos que sea P_c la plaza cierta y P_i la plaza incierta, las cotizaciones de la desigualdad del arbitraje serían respectivamente C_c y C_i y hallando el valor que resulta según ambas cotizaciones para una cantidad de moneda extranjera a cobrar o pagar, llamando M_c la moneda nacional de la plaza cierta y M_i la moneda nacional de la plaza incierta tendremos (**365**, 1.° y 2.°):

$$M_i = M_c \times \frac{C_i}{B} \qquad \text{o bien} \qquad M_c = M_i \times \frac{B}{C_i}$$

$$M_c = M_i \times \frac{B}{C_c} \qquad \text{o sea} \qquad M_i = M_c \times \frac{C_c}{B}$$

De estos valores que resultan para la operación que motiva el arbitraje, los que dan M_i son el coste de moneda de plaza cierta que haya de cobrarse o pagarse en esta plaza cierta, es decir, que haya de retirarse o situarse, y como indudablemente los mayores valores de M_i corresponderán a la mayor de las dos cotizaciones, también tendremos que *para trasladar fondos de plaza cierta a plaza incierta conviene el cambio más alto* porque así se obtendrán más unidades de moneda de la M_i y *para trasladar fondos de plaza incierta a cierta convendrá el cambio más bajo* porque así será preciso desembolsar menos unidades de M_i.

Si ahora hacemos el razonamiento con los valores de M_c nos hallaremos con que serán tanto menores estos valores cuanto mayores sean los cambios, por lo cual también ahora *para trasladar fondos de plaza cierta a incierta conviene el cambio más alto*, porque exige desembolsar menos monedas M_c y *para trasladar fondos de plaza incierta a cierta conviene el cambio más bajo*, puesto que así se obtendrán más unidades de M_c.

Ejemplo: Un exportador español tiene que cobrar una cantidad de libras esterlinas y desea conocer si dará orden a su banquero de que venda en Madrid esta moneda donde el cambio es de 33'15 o encargará a su deudor de tomar cheque sobre Madrid siendo el cambio de Londres para las pesetas 33'19.

Se trata de enviar fondos de la plaza de Londres que es cierta a la de Madrid que es incierta, y por tanto lo más conveniente será que se remita de Londres cheque sobre Madrid porque así se obtendrán más pesetas, o lo que es lo mismo, que conviene el cambio de Londres por ser el más alto.

575.—Arbitraje de cotizaciones semejantes.—Cuando las dos plazas cotizan el cierto o el incierto, hemos visto que es posible el arbitraje cuando se tenga

$$B'B'' \lessgtr C'C''$$

y si consideramos que cada uno de los signos de desigualdad corresponde a un cambio recíproco, y que además las plazas

pueden ser las dos ciertas o las dos inciertas, hemos de distinguir los casos que se deriven de esa duplicidad y empezaremos tomando la expresión

$$B'B'' > C'C''$$

que nos da para *plazas inciertas*

$$\frac{B'B''}{C'} > C'' \qquad \text{y} \qquad \frac{B'B''}{C''} > C'$$

según las cuales el acreedor de la plaza P' obtiene mayor cantidad de su moneda vendiendo en la plaza contraria P'', es decir, haciendo que su deudor compre por apunte y haga remesa, y también el acreedor de la plaza P'' obtiene mayor cantidad de su moneda vendiendo en la plaza contraria, o sea haciéndose remesar, luego a los dos acreedores conviene la remesa. Si consideramos los deudores, vemos que tendrán menor desembolso operando en su plaza, o sea comprando ellos y remitiendo a los acreedores.

En el caso de *plazas ciertas* nos hallamos con que los cambios recíprocos son los contrarios de plazas inciertas, o sea, que el arbitraje será posible cuando se tenga

$$B' > \frac{C\,C''}{B''} \qquad \text{y} \qquad B'' > \frac{C'C''}{B'}$$

según las cuales los acreedores obtienen mayor cantidad de sus monedas con cambios menores, o sea en este caso con los recíprocos, que indican ventaja vendiendo en la plaza del deudor, es decir, haciéndose remesar; y los deudores desembolsarán menos monedas con los cambios más altos, que en este caso son los de sus plazas, luego les conviene comprar en ellas y remitir, por lo que son iguales las condiciones del arbitraje en plaza cierta o incierta y podemos sentar de un modo general, que *cuando el producto de las bases es mayor que el producto de las cotizaciones, conviene la remesa para cualquiera situación y plaza.*

2.° Si partimos de la expresión

$$B'B'' < C'C''$$

en el caso de *plazas inciertas* será:

$$\frac{B'B''}{C'} < C'' \qquad \text{y} \qquad \frac{B'B''}{C''} < C'$$

cuyas expresiones indican que el acreedor obtendrá mayor cantidad de sus monedas vendiendo las extranjeras en su propia plaza, lo que ha de hacerse por trata a cargo del deudor, y éste desembolsará menos monedas comprando las extranjeras en la plaza del acreedor, o sea, haciéndose girar por él.

Si fuesen las dos *plazas ciertas* las desigualdades de recíprocos habrán de ser

$$B' < \frac{C'C''}{B''} \qquad \text{y} \qquad B'' < \frac{C'C''}{B'}$$

según las cuales el acreedor obtendrá más monedas suyas con el menor cambio, que es el cotizado en su propia plaza, por lo que venderá la trata hecha a cargo del deudor; y éste desembolsará menos con el cambio alto que es el recíproco de su plaza, luego su interés está en hacerse girar, y *en cualquiera de las dos situaciones o plazas, si el producto de las bases es menor que el producto de las cotizaciones conviene la trata.*

Ejemplos: 1) Cotizándose en Madrid los francos suizos a 137 y en Zurich las pesetas a 73'10 determinar el medio más ventajoso de cobrar una venta hecha por un comerciante suizo a otro de Sevilla.

La base de los cambios en las dos plazas es 100, siendo las dos inciertas, por lo que multiplicando los cambios y las bases se tiene:

$$137 \times 73'10 = 10014'70$$
$$100 \times 100 = 10000$$
$$137 \times 73'10 > 100 \times 100$$

luego el mejor medio será que gire el comerciante suizo por ser el menor de los dos productos el de las bases.

2) Los francos belgas se cotizan en Nueva York a 4'97 y en Bruselas el cambio del dollar es de 19'95. Determinar el medio mejor de pagar un crédito sobre la Habana.

Esta última plaza regulariza sus operaciones extranjeras por las cotizaciones del dollar, siendo la base de cotización en Nueva York 100 y en Bruselas 1, por lo que se tiene:

$$B'B'' = 100 \times 1 = 100$$
$$C'C'' = 4'97 \times 19\ 95 = 99'1515$$

y de aquí para las condiciones del arbitraje nos hallamos en el primer caso, en el que siendo el mayor producto el de las bases se elegirá la remesa para cumplir la operación.

576.—Regla de los 10000.—La condición anterior de los arbitrajes directos suele llamarse *regla de los diez mil* por los franceses porque siendo 100 casi todas las bases de cotización

de París y casi todas las del franco en las demás plazas, nos hallamos con que el producto $B'B''$ es en tales casos 10000, y con arreglo a esta circunstancia resulta que *si el producto de las cotizaciones excede de diez mil conviene la trata*, y *si no llega a esta cantidad conviene la remesa*, forma en la que suele enunciarse la regla de los 10000.

577.—Regla de los agios.—Con esta denominación se conoce por los arbitrajistas la condición de arbitraje cuando las cotizaciones se expresan a tanto por ciento de beneficio o daño, como sucedía antes con el cambio nacional y aún con muchos casos del extranjero; pero hoy no quedan de esta forma de cotización más que las de Unión Escandinava y algunas de América referidas al dólar, por lo que la importancia de esta regla ha quedado muy reducida. La expresión general para este caso se deduce de la desigualdad conocida, pues siempre se tendrá que el beneficio o daño sumado o restado de la base de cotización (100 en este caso) nos dará la cotización percentual general, es decir, que llamando A' y A'' los tantos de beneficio o daño respectivos, se tendría:

$$C' = 100 - A' \qquad \text{y} \qquad C'' = 100 + A''$$

puesto que siempre una plaza cotizaría beneficio y otra daño, y si ahora hacemos los productos de estas cotizaciones, hemos de tener para condición del arbitraje

$$10000 \lessgtr (100 - A')(100 + A'')$$

en la que al ejecutar las operaciones indicadas se obtiene

$$10000 \lessgtr 100 \times 100 + 100A'' - 100A' - A'A''$$

y restando ahora 10000 de ambos miembros resulta qne será posible la elección en el arbitraje cuando sea

$$100A'' - 100A' - A''A' \lessgtr 0$$

de donde obtenían los prácticos de un modo aproximado la condición del arbitraje suprimiendo el último término del primer miembro por ser muy pequeño en relación a los otros dos, resultando

$$100A'' - 100A' = 100(A'' - A') \lessgtr 0$$

expresión cuyo signo depende del que corresponde a la suma

algebraica de los agios y como ese signo será positivo cuando el producto de los cambios sea mayor de 10000 y negativo en el caso contrario, se tiene que *si la suma algebraica de los agios es positiva, conviene la trata; y si es negativa, conviene la remesa.*

578.—Beneficio de un arbitraje.—Por beneficio del arbitraje debe entenderse el que resulta como diferencia entre los dos medios de operar.

En estos cálculos el que interesa es el beneficio relativo, por que el total no puede establecerse *a priori*, y además presenta la particularidad de que no tiene quebranto correspondiente porque siempre se elige la combinación que arroje beneficio. Una vez conocido el beneficio relativo podría calcularse el total por una simple multiplicación, para la cual deberemos tener en cuenta las cifras que necesita ese beneficio relativo si el total ha de tener una aproximación dada, y siendo cantidad de la operación la de la moneda en que haya de expresarse el beneficio.

Para calcular este beneficio relativo bastará dividir la diferencia entre las dos cotizaciones recíprocas por aquella a que haya de referirse el beneficio, por lo que éste sería:

$$\left(\frac{B'B''}{C'} - C''\right) : C'' = \left(\frac{B'B'' - C'C''}{C'}\right) : C'' = \frac{B'B'' - C'C''}{C'C''} \qquad [1]$$

si las dos cotizaciones son semejantes, y

$$\frac{C' - C''}{C''} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{C' - C''}{C'} \qquad [2]$$

si fuesen cotizaciones contrarias.

En estos casos el beneficio se referirá las más de las veces a la cotización más baja para representar de este modo lo mismo que el beneficio de los cambios en las cotizaciones por medio del agio, y si tuviésemos cotizaciones de este género el beneficio estaría dado por

$$\frac{100(A' - A'') - A'A''}{100} \qquad [3]$$

referido al caso de cambios a la par.

Ejemplos: 1) Hallar el beneficio que se obtendría elegiendo la cancela-

ción de un crédito de francos suizos por trata, si se cotiza esta moneda en Barcelona a 75'20 y las pesetas en Ginebra a 137'10, y la cantidad a cobrar ha de ser de 78500 francos.

Hemos de hacer aplicación de la fórmula [1] en que los valores sean

$$B' = 100; \qquad B'' = 100; \qquad C' = 75'20; \qquad C'' = 137'10$$

y el beneficio relativo será

$$\frac{100 \times 100 - 137'10 \times 75'20}{137'10 \times 75'20} = 0'00355928 \text{ por uno} = 0'355928\ \%$$

en el que se ha prescindido del signo por la razón dada anteriormente; y el beneficio total habría de ser

$$\frac{0'355928}{100} \times (78500 \times 0'752) = 204'52 \text{ pesetas.}$$

ya que el beneficio ha de obtenerse en pesetas y para ello hemos de reducir los francos suizos esta moneda, reducción que está indicada en el paréntesis del producto que antecede.

2) Londres cotiza Nueva York a 4'5748 y en Nueva York el cambio de la libra esterlina es de 4'427. Determinar la ganancia obtenida en el arbitaje.

Aplicando la fórmula [2] y refiriendo el resultado al cambio más bajo, tenemos como valores especiales

$$C' = 4'5748 \qquad C'' = 4'427$$

con lo que el beneficio pedido será

$$\frac{4'427 - 4'5748}{4'5748} = 0'01194 = 1'194\ \%$$

referido ese beneficio a dólares.

579. – Gastos en el arbitraje.—En los arbitrajes directos que venimos considerando no tienen influencia sensible los gastos porque suelen ser casi siempre iguales en las dos plazas y por consiguiente si se opera en una de ellas se ahorran los gastos de la otra, y sólo quedará como gasto que origina la elección, el telegrama o franqueo si se opera en plaza distinta de la en que se reside, pues en tal caso deberá pasarse a otra persona orden de operar.

Aunque vemos la poca importancia que tienen los gastos en el arbitraje directo, pueden sin embargo ser considerados para obtener una mayor aproximación entre los resultados sobre que ha de hacerse la elección, mucho más si en las dos plazas arbitradas tienen esos gastos importancia diversa.

La existencia de los gastos no impide el que se haga uso de las reglas precedentes del arbitraje, puesto que aún siendo de-

ducidas para cambios netos, valen igualmente para cambios no netos *cuando se trata de cobrar o de pagar*, puesto que siempre ha de ser posible sustituir en las expresiones anteriores los cambios cotizados por los que resultan de considerar los gastos (**369**).

580.—Gráficos del arbitraje directo.—Tienen por objeto estos gráficos el expresar el beneficio producido por la elección, según ya hemos estudiado, y su construcción se hace tomando uno de los ejes del gráfico, que será conveniente sea el de las abscisas, como representante de las cotizaciones de una plaza, y en el otro eje se expresarán los beneficios.

Para establecer ahora cuáles sean los beneficios que corresponden a una cotización de una plaza según las demás de la otra, se representa por una línea cada cotización de la plaza que no corresponda al eje y cada punto de esta línea indicará el beneficio del cambio que tenga la misma ordenada.

Así por ejemplo, si nos fijamos en la fig. 62 vemos que en el eje de las abscisas están indicadas las cotizaciones de Madrid sobre Londres, y para las que en esta última plaza tiene la peseta hay una línea para cada cambio. Considerando una cualquiera de estas líneas vemos que el punto cero de beneficio corresponde a la cotización de Madrid igual a la que representa la línea, porque entonces no es posible el arbitraje; y también vemos que una de estas líneas, la del cambio 33'50 por ejemplo, da una diferencia por ciento de 0'60 aproximadamente para el cambio de 33'30 en Madrid y por cada punto de la línea del cambio de Londres tendremos un beneficio señalado por una línea horizontal correspondiente al cambio en Madrid que esté en la misma vertical.

581.—Construcción del gráfico.—Para construir el gráfico cuando sean las cotizaciones contrarias basta calcular un beneficio de cada cotización con otro cualquiera de la otra plaza, y uniendo el punto de este beneficio con el de la otra cotización del eje, se tiene la línea de todos los beneficios para esa cotización.

Ejemplo: Si la cotización de la peseta en Londres es de 35'50 el beneficio que corresponde al cambio de 35 en Madrid será

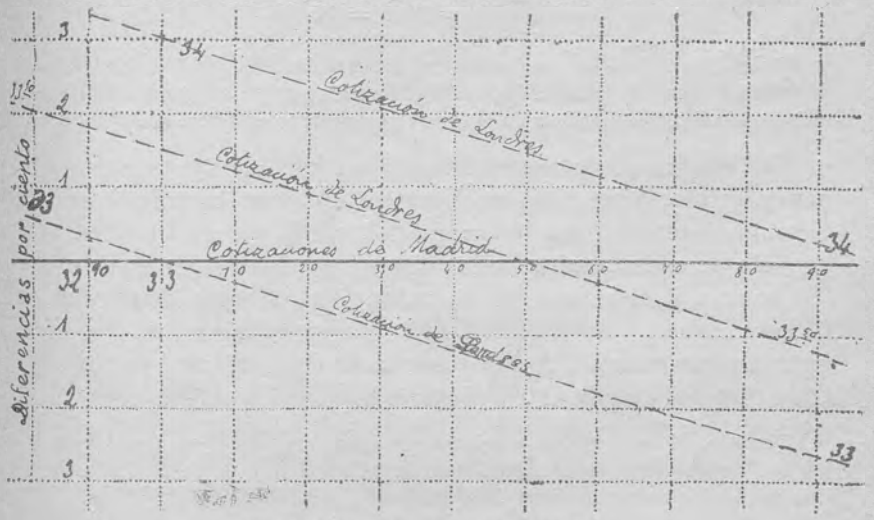


Fig. 62. Arbitraje de cotizaciones contrarias.

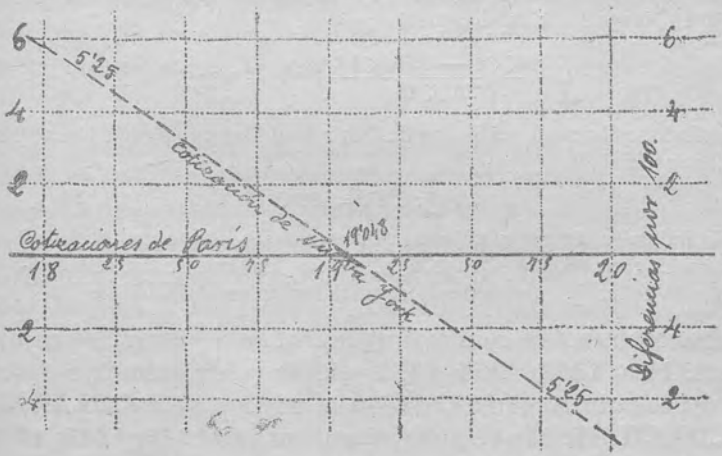


Fig. 63. Arbitraje de cotizaciones semejantes.

$$\frac{35'50 - 35}{35} = 0'01\widehat{5} = 1'\widehat{51}\ \%$$

y señalando este beneficio en la vertical del cambio 35 de Madrid, hallamos un punto que con el del cambio 35'50 de Madrid en el eje determinan la recta del cambio 35'50 de Londres en la forma que aparece en la fig. 62.

Del mismo modo determinaremos todas las líneas que fuesen precisas, y cuando se necesite conocer beneficio para cambios intermedios a los marcados en el eje se dividirá el espacio de cada cambio en las partes precisas y se buscarán los puntos de beneficio que corresponden a estas divisiones. Si los cambios son intermedios a los que señalan las líneas, se traza una paralela con la separación conveniente, como en toda interpolación y extrapolación gráfica (**69** y **70**).

Ejemplo: Si necesitáramos saber cuáles eran los beneficios para el cambio 35'20 en Londres trazaríamos una paralela a los $^2/_5$ del espacio de las dos trazadas a contar desde la del cambio 35.

Cuando las *cotizaciones fuesen semejantes*, la construcción del gráfico es idéntica, aunque exige determinar el cambio recíproco.

Ejemplo: Si tomamos las plazas de París y Nueva York resulta la fig. 65, en la que calculado el beneficio que corresponde a los cambios 18 en París y 5'25 en Nueva York, tendremos:

$$\left(\frac{100 \times 1 - 5'25 \times 18}{5'25 \times 18}\right) 100 = 5'82\ \%$$

y hallándose ahora el recíproco de París según el cambio de Nueva York tendremos también

$$100 : 5'25 = 19'048$$

según indica la figura, y uniendo con este punto el que en la vertical de, cambio 18 corresponde al beneficio hallado, tenemos la línea de la figural pudiendo hallar del mismo modo cuantas fueren precisas.

EJERCICIOS sobre *condición general* de arbitraje los *números* **1345** al **1349; 1355; 1356** y **1380;** sobre *beneficio* del arbitraje los *números* **1347**; **1350** al **1352; 1375; CDLXXXVI** al **CDXCII** además de poderse utilizar los **1345; 1346; 1355; 1356** y **1380:** sobre *gráficos* los *números* **1353; 1354; 1369; 1372,** siendo posible utilizar también los de cálculo numérico: sobre *beneficio* en arbitraje doble de *especulación* los *números* **CDXCIII** al **D.**

LX

ARBITRAJES DE CAMBIO INDIRECTO

582.—Objeto del arbitraje indirecto de cobro y pago.—Los cálculos en el arbitraje de cambio indirecto se hacen para determinar el medio más ventajoso de cobrar o pagar una cantidad de moneda extranjera, entre todos los posibles, incluso el de remesa o trata directa. Este arbitraje, pues, resulta de un número de combinaciones extraordinariamente grande, por lo que forzosamente se ha de limitar el objeto de estos cálculos a la existencia posible de pocas combinaciones si ha de resultar claro, y así, del mismo modo que en los cálculos del cambio indirecto (**374**), hemos de limitarnos ahora al estudio con una sola plaza intermedia, aunque claro está que este estudio permitirá comparaciones de resultados en que se varíe la plaza intermedia y así se amplíe el número de combinaciones.

583.—Comparación de medios directos e indirectos.—Una de las combinaciones entre que es posible la elección en el arbitraje indirecto es el de medios directos e indirectos, pero en estos últimos existen siempre los gastos de lo menos dos de las tres plazas, siendo por consiguiente mucho mayores en relación, en el medio indirecto que en el directo y hacen que salvo casos excepcionales *siempre convengan más los medios directos que los indirectos para cobros y pagos.*

Esta circunstancia hace que en los arbitrajes de cobro y pago se limite el estudio al caso de medio indirecto forzado, porque solo en tales casos cabe la elección de estos medios más desventajosos, pero repetimos que nuestro estudio es

aplicable a cualquier combinación indirecta que se haga en la especulación.

584.—Resolución general del arbitraje indirecto. – Siempre ha de sernos posible la descomposición del arbitraje en los dos parciales que le constituyen, pues si son las plazas que entran en el cálculo las P' P'' y P''', las cotizaciones respectivas serían C'_2 y C'_3 en la primera; C''_1 y C''_3 en la segunda, y C'''_1 y C'''_2 en la última, y tomando como plaza intermedia la P''' debemos considerar que faltan las cotizaciones C'_2 y C''_1 que deberán ser calculadas en función de las otras para reducir el arbitraje indirecto a directo ya conocido, y por tanto el problema de arbitraje indirecto comprenderá las dos partes de determinación de paridades y condición de arbitraje en la forma siguiente:

1.° *Cálculos de las paridades.*.—Para este cálculo debemos considerar siempre cotizaciones unitarias (**364**), a fin de evitarnos la referencia a base determinada, ya que para la condición del arbitraje es idéntico se considere una u otra base. Además serán cotizaciones del mismo plazo porque de no serlo se referirán al mismo en la forma conocida (**366**) antes de calcular las mismas paridades.

También nos es conocido que las paridades a calcular son las cotizaciones C'_2 y C''_1 que consideramos faltan en la realidad del mercado, y tendremos:

$$C'_2 = C'_3 C'''_2 \qquad \text{y} \qquad C''_1 = C''_3 C'''_1$$

2.° *Condición de arbitraje.* – Esta condición marcará la posibilidad de elección y a la vez la combinación indirecta (**374**) de cumplimiento de la operación; y para este cálculo que nos ocupa, bastará nos fijemos en que las paridades que acabamos de hallar son cotizaciones unitarias y en consecuencia la posibilidad del arbitraje directo entre P' y P'' estará dada por el producto de ambas cotizaciones comparado con el producto de las bases, que será la unidad (**575**), o sea, que la condición de posibilidad del arbitraje indirecto ha de ser

$$C'_2 C''_1 = C'_3 C'''_2 C''_3 C'''_1 \lessgtr 1$$

que puede escribirse en esta forma:

$$1 \lessgtr C'_3 C'''_1 \times C'''_2 C''_3$$

según la cual *la posibilidad del arbitraje indirecto es el producto de las condiciones de posibilidad de los cambios directos que le integran.*

El sentido de la desigualdad de este producto no se puede determinar de un modo general, porque los dos factores que le constituyen son también miembros de otras desigualdades ambiguas con respecto a 1, pero sí que la formación de este producto nos dirá la combinación que será más ventajosa.

Para tener además la posibilidad de un arbitraje directo calcularemos la par política (**376**) haciéndolo con la combinación indirecta más ventajosa y estableceremos luego la posibilidad de arbitraje entre esta par política y las cotizaciones directas como si fuese el cambio directo.

Ejemplo: Determinar la combinación más ventajosa para que un industrial de Sevilla pueda cobrar un crédito en Egipto por medio de Londres, si el cambio de las libras esterlinas en España es de 33'80; el de las pesetas en Londres 33'76; el de las libras esterlinas en Alejandría 106, y el de las libras egipcias en Londres 94'45.

Los valores especiales son (**360** y **364**):

$$C'_3 = 33'80; \quad C''_3 = \frac{106}{100}; \quad C'''_1 = \frac{1}{33'76}; \quad \text{y} \quad C'''_2 = \frac{94'45}{100}$$

por lo que las dos condiciones parciales de los dos cambios directos que han de integrar la operación serán:

$$\frac{33'80 \times 1}{33'76} > 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{94'45 \times 106}{100 \times 100} > 1$$

las cuales indican que conviene la trata para las dos operaciones (**575**).

585.—Beneficio y especulación.—Las operaciones especulativas sobre los cambios se hacen a base de algunos arbitrajes, y en el caso en que exista la posibilidad de la elección entre los diferentes medios directos e indirectos, el especulador se convierte a voluntad en pagador y cobrador de las cantidades de la moneda en que es posible el arbitraje, y muy especialmente en el caso en que la posibilidad exista entre cotizaciones u operaciones a diferentes plazos, pues entonces siendo comprador o vendedor de las divisas a plazo puede especular aunque no posea realmente éstas y si llegado el vencimiento de esos plazos de compra o venta no quiere convertir la operación en contado, puede continuar su posición por medio de algunas operaciones de doble idénticas a las estudiadas en las operaciones de Bolsa (**504** y **540**).

Una vez elegida la forma de operar en las posibilidades del arbitraje, se calculan las diferentes operaciones como de cambio indirecto con tratas o remesas (**375**) y al final resultará una diferencia que constituye el beneficio del arbitraje, pudiendo calcularse este beneficio percentual sin más que partir de que fuese ésta la cantidad de las operaciones. Como estos cálculos son los que ya se conocen de cambio indirecto y de los que acabamos de hacer para elegir el arbitraje, prescindimos del ejemplo resuelto que nada aclararía, remitiendo al lector a los párrafos citados.

586. — Cotizaciones cifradas. — Se llaman así unos estados en que se reunen las paridades en tredos plazas, calculadas en la forma que acabamos de ver y referidas a varias plazas intermedias y varios cambios para cada una de éstas.

Para que las cotizaciones así obtenidas rindan utilidad en la elección del medio de cobro y pago que constituye el arbitraje, se las dispone en la forma que puede apreciarse en el estado siguiente:

Cotizaciones cifradas entre Barcelona y Valparaíso

PLAZAS INTERMEDIAS	CAMBIOS COTIZADOS				Paridades resultantes	
	de plaza intermedia		sobre plaza intermedia		en Barcelona — Pesetas por 100 pesos	en Valparaíso — Pesos por 100 pesetas
	sobre Barcelona	sobre Valparaíso	en Barcelona	en Valparaíso		
Londres.....	33'75	38'30			88'12	113'48
»		38'30	33'80		88'25	113'31
»	33'75			38'40	87'89	113'78
Nueva York...	13'05	11'50			88'12	113'48
» »	13'05			8'65	88'58	112'88
» »		11'50	7'65		87'98	113'66

La consulta de estas cifras sirve para el arbitraje determinando cuáles son las plazas y cambios más ventajosos para una operación; pero para ser útiles necesitan una gran extensión, que se suple con ventaja con el cálculo gráfico que pasamos a estudiar y cuyo empleo para el arbitraje es igual al de estas tablas, por lo que nos abstenemos de más detalles.

587.—Gráficos del arbitraje indirecto.—Los gráficos de este arbitraje sirven para expresar las cotizaciones cifradas para cualquier cambio entre las plazas que intervienen en la operación y son por consiguiente la generalización de las tablas de cotizaciones cifradas para que ocupen poco espacio y contengan el mayor número posible de datos.

Estos gráficos han de ser tantos como plazas intermedias sean susceptibles de ser utilizadas en la operación, empleándose en ellos uno de los ejes para marcar las cotizaciones de la plaza intermedia para una de las monedas, según puede verse en la fig. 64, en que el eje de las abscisas tiene marcados los cambios de la peseta en Londres; el otro eje señala las

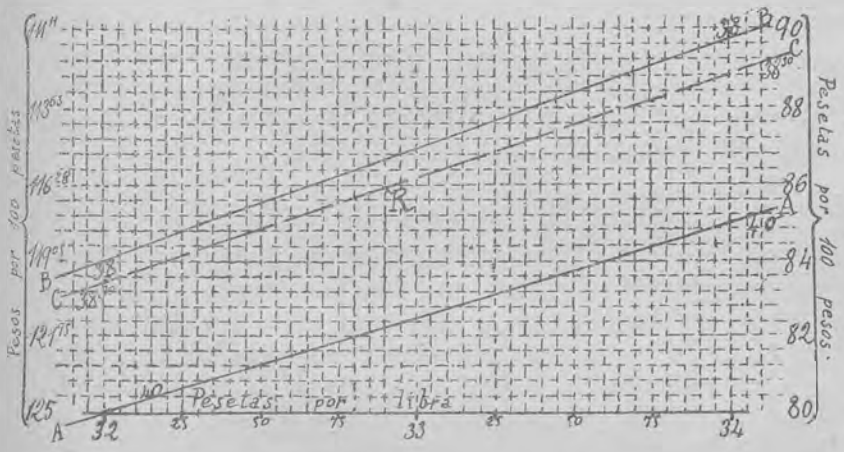


Fig. 64. Paridades de arbitraje indirecto.

cotizaciones resultantes del cambio indirecto; y los cambios de la plaza intermedia para la otra moneda están representados por líneas cuyos puntos correspondientes en ambos ejes son las dos cotizaciones simultáneas a la de la línea, como sucede en la fig. 64 en que la línea CC que representa el cambio de 38'30 pesos chilenos por libra y en ella el punto R, por ejemplo, nos dice que para dicho cambio son simultáneos el de 32'90 pesetas por libra y el de 85'90 pesetas por 100 pesos.

588.—Construcción de los gráficos.—Para construir el gráfico se marcan en el eje de las abscisas los cambios de la

plaza intermedia sobre el país en que se hacen los cálculos y los recíprocos de ellos, según aparece en la fig 65, no hallándose estos recíprocos en la fig. 64 por ser las dos cotizaciones contrarias, expresadas tanto en Londres como en España en pesetas por libra Sobre el otro eje se marcan las cotizaciones que han de resultar para el cambio indirecto arbitrado, las cuales para facilitar la lectura y aumentar la claridad se han puesto en las figuras 64 y 65 en un lado los de Chile sobre España y en el otro sus recíprocos de España sobre Chile.

Señalados los puntos de los ejes, se procede a determinar los puntos de las líneas de cambios de la plaza intermedia sobre el país calculado, que será de modo general el que no se marcó en el eje de las abscisas; puntos éstos que se determinan calculando el cambio arbitrado que para los del eje de las abscisas corresponden al de la línea a trazar. Así por ejemplo, en la fig. 64 para el cambio 40 pesos por libra calculamos el cambio arbitrado España sobre Chile para los de 32 y 34 hallando respectivamente

$$32 : 40 = 0'80 \qquad \text{y} \qquad 34 : 40 = 0'85$$

los que referidos a la base 100, que habría de tener cotización entre España y Chile (**357**) nos dan dos puntos de la línea a trazar y repitiendo los cálculos para todos los cambios señalados en el eje de las abscisas, obtendremos tantos puntos como cotizaciones haya en el eje. Uniendo todos estos puntos entre sí resultará una línea quebrada para cada cotización, línea que sería curva si la distancia entre cada dos de esos puntos fuese infinitamente pequeña. Como la curvatura en estas líneas es muy poco pronunciada, no puede apreciarse para gráficos de escala pequeña como el de la fig. 64, y por esta causa aparecen en él tres líneas sensiblemente rectas; pero cuando la escala es mayor, como en la fig. 65, se aprecia fácilmente esta curvatura de las líneas de los cambios.

Del mismo modo que se traza una primera línea, se trazan cuantas se juzguen precisas, y para que sirva un mismo gráfico para las cotizaciones recíprocas cuando las plazas respectivas dan en sus cotizaciones las dos el cierto o las dos el incierto, se ponen en una paralela a los ejes los cambios recíprocos respectivos, según hemos dicho.

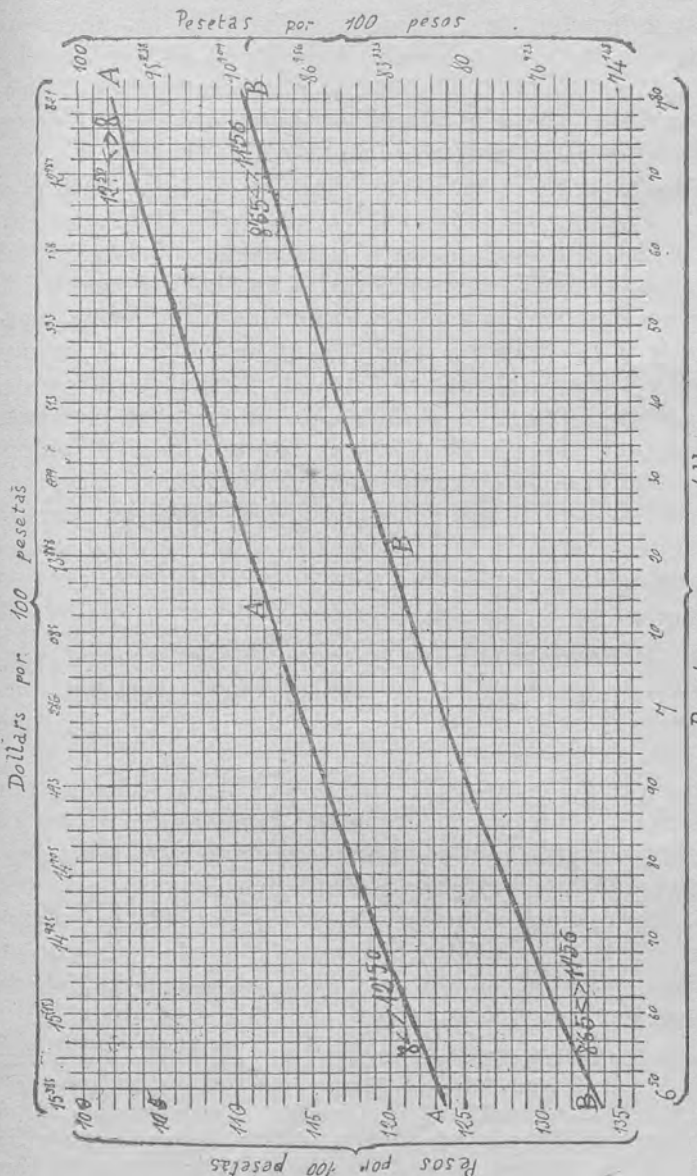


Fig. 65. Paridades recíprocas de arbitraje indirecto.

Igual indicación de recíprocos se hará en las líneas de cambios según también puede verse en la fig. 65 con las expresiones 8 <> 12'50 y 8'65 <> 11'56; pero no se indicarán estos recíprocos en cotizaciones contrarias por la razón antes dicha de estar expresados en la misma moneda.

Las líneas de cambios que se trazan en la forma que acabamos de expresar no son paralelas, sino que del mismo modo que la curvatura está causada porque no son iguales las variaciones del cambio arbitrado para variaciones iguales de las cotizaciones del eje, así también existe esa diferencia cuando el cambio arbitrado se compara con las cotizaciones que representan las líneas, pues en este caso las variaciones del cambio arbitrado para variaciones del que expresan las líneas están representadas por el espacio entre estas líneas, y en consecuencia, no han de ser tampoco constantes las separaciones de dichas líneas, o lo que es igual, que las líneas de cambio serán convergentes. Esta convergencia es mayor cuanto menor sea la escala del gráfico y de ahí que se aprecieen la fig. 64 mejor que en la 65.

589.—Utilización de los gráficos.—Ya hemos dicho antes que los gráficos han de ser tantos como plazas intermedias, siendo su empleo igual para el arbitraje de cobro y pago que para el de especulación.

Conocidas las cotizaciones de la plaza intermedia y las de los dos países sobre ella, se combinan entre sí de todos los modos posibles, hallando el cambio resultante para cada combinación y eligiendo entre todos el más conveniente al cobro o pago. Esta operación se va repitiendo para todas las plazas y después se comparan entre sí el resultado más ventajoso de cada plaza para elegir la que haya de intervenir al realizar la operación.

Ejemplo: Valiéndose de los gráficos anteriores y siendo las cotizaciones de Nueva York de 11'56 dollars por 100 pesos chilenos y 11'70 dollars por 100 pesetas; las de Londres de 58'50 pesos y 52'75 pesetas por libra; las de Madrid, de pesetas 52'80 por libra y 7'26 por dollar; y las de Valparaíso, de pesos 58 por libra y 8'65 por dollar; determinar el medio más ventajoso para un exportador español que ha de cobrar un crédito en pesos chilenos.

Vemos la posibilidad de servirnos de Nueva York o de Londres como plazas intermedias y debemos examinar cuál es la mejor combinación para cada una de estas dos plazas, deduciendo luego cuál será la mejor de esas dos

combinaciones por orden de plazas en la forma siguiente:

Mediación de Nueva York, (Fig. 65).

1.º *Cambios de Nueva York y Madrid.*—Consultando la línea del cambio 11'56 en el punto correspondiente al de 7'26 del eje de las abscisas, encontramos que este punto está sensiblemente por bajo de la línea de 119 pesos por 100 pesetas, en algo menos de la quinta parte de la cuadrícula, por lo que el cambio arbitrado será aproximadamente (*) de 119'15 pesos por 100 pesetas, o bien de 84'10 pesetas por 100 pesos; según se considere uno u otro de los dos cambios recíprocos arbitrados.

2.º *Cambios de Nueva York y Valparaíso.*—Tomando ahora la línea del gráfico como cambio de Valparaíso y leyendo en el eje de las abscisas el cambio de Nueva York, vemos que indudablemente corresponden menos pesetas a esta combinación en el eje de ordenadas, y como se trata de un caso en que se busca el medio de obtener mayor cantidad de pesetas al cobrar los pesos chilenos del crédito, desechamos esta segunda combinación sin hacer la lectura numérica.

3.º *Cambios de Valparaíso y Madrid.*—El gráfico nos dice que esta combinación es completamente idéntica en resultado a la primera.

4.º *Cambios solo de Nueva York.*—Resulta en esta combinación igual que en la segunda.

La causa de que haya dos combinaciones de resultado idéntico a las otras dos respectivamente, está en ser también idénticos los cambios recíprocos de Nueva York y Valparaíso, cosa que no sucede en el caso de Londres según vamos a ver.

Resultados por medio de Londres, (Fig. 64).

a) Cambios de Londres y Madrid.—Leeremos en el eje de las ordenadas el punto que corresponde al de la línea *CC* correspondiente a su vez al de 32'80 en el eje de las abscisas, resultando 85'65 aproximadamente, o sea, de un octavo de cuadrícula más alto de la línea 85'60.

b) Cambios de Londres y Valparaíso.—Leyendo ahora el punto 32'75 del eje de las abscisas sobre la línea *BB* tendremos en el eje de las ordenadas cantidad mayor que la anterior.

c) Cambios de Madrid y Valparaíso.—El punto de la línea *BB* que corresponde a 32'80 del eje de las abscisas da cambio mayor que las dos combinaciones anteriores.

d) Cambios sólo de Londres.—El punto de la línea *CC* correspondiente al 32'75 del eje de las abscisas es el más bajo de los cuatro consultados.

Resulta por consiguiente que el punto más conveniente es el de la combi-

(*) Las comprobaciones numéricas de estos cálculos señalarán el error en el del gráfico, por causa de que la lectura de éstos ha de ser forzosamente aproximada **(69)** aunque esta aproximación es lo bastante en la práctica, mucho más si se comparan dos resultados leídos en el mismo gráfico, como se ve en algunas partes de este ejemplo.

nación *c* por lo cual hemos de hacer la lectura numérica de él (*) hallando 86'40 pesetas por 100 pesos como cambio arbitrado.

Comparando ahora el resultado de las dos plazas tenemos como más ventajosa la intervención de Londres.

Debiendo también determinar la interpretación de las combinaciones, hemos de sentar que la cotización elegida para la combinación indica que ha de ser parte activa la persona que reside en la plaza donde tiene efecto dicha cotización (**) y por tanto la combinación que resulta más conveniente para el ejemplo resuelto es que el deudor de Valparaíso haga remesa a Londres y el acreedor de Madrid negocie giro sobre la plaza intermedia, siendo función del corresponsal en ésta la de cobrar y pagar los dos giros, o sea, una función secundaria.

Si en el gráfico no aparece exactamente la línea de la cotización o cotizaciones del momento del cálculo, se tomará la media proporcional entre las indicaciones de las dos líneas que comprendan a la cotización de que se trate, como sucedería con la cotización de 38'10 pesos por libra en la fig. 64, en la que tomaríamos la tercera parte del espacio de las dos líneas de 38 y 38'30 para punto de la cotización 38'10.

Con esta forma de operar se comete un pequeño error por no existir proporcionalidad entre aumentos de cotización y separación de sus líneas (**588**), pero siendo pequeño este error le despreciamos, de modo semejante a lo que se hace con la proporcionalidad que se admite en las diferencias de los logaritmos para el manejo de las tablas.

590.—Órdenes de Banca.—Tanto en el caso de elección de arbitraje como en el del cambio indirecto simple, se precisa muchas veces que sea un corresponsal el que ejecute las operaciones elegidas, y en tal caso se cursan las oportunas órdenes, pero como los cursos de los cambios que aparecen en los listines se refieren a negocios terminados y no obligan a nadie respecto de futuras operaciones para que éstas se ejecuten a los mismos, el corresponsal que recibe la orden de ejecución

(*) Podíamos haber prescindido de toda lectura numérica hasta conocer cuál es el punto más ventajoso.

(**) Véase como ampliación de ésto lo que dijimos al tratar de las combinaciones del cambio indirecto **(374)**.

ha de conocer la influencia que tienen las variaciones sobre el costo o producto de la operación que se le ordena.

Los cálculos para conocer si conviene o no ejecutar una operación ordenada, han de ser precisos siempre que en la orden se fije el cambio máximo o mínimo de ejecución, como sucede en las operaciones de que nos ocupamos; pero son indispensables solamente cuando la operación ordenada sea de dos o más monedas, como en el caso del cambio indirecto en que el corresponsal haya de hacer remesa y trata, puesto que si la operación es de trata sola o sólo remesa, el mismo cambio que se fija para la operación determina el límite y sentido de las variaciones del cambio, dentro de las cuales han de cumplirse o dejarse de ejecutar las órdenes, ya que la ejecución sólo tiene lugar si los nuevos cambios producen beneficio al que dió la orden.

Por las consideraciones que dejamos sentadas se comprende que se llamen órdenes de banca las de cumplimiento de la última combinación del cambio indirecto (**374**, 4.°), y también a las del mismo género de operaciones de especulación.

591. – Condición de cumplimiento de las órdenes de Banca.—Cuando sean dos monedas solamente llamaremos E_r y E_t a las monedas extranjeras para el corresponsal que ha de cumplir la orden y N_r y N_t a las monedas nacionales del mismo, siendo las primeras la expresión de la cantidad a que se refiere la orden y las últimas las cantidades equivalentes en las monedas del corresponsal al cambio fijado en la orden.

Cualquiera que sea este cambio es indudable que una remesa de E_r debe costar al corresponsal la cantidad N_r y por consiguiente una remesa de una unidad extranjera le costará

$$N_r : E_r$$

y del mismo modo la trata que produjese N_t habría de ser de un nominal extranjero de E_t, por lo cual para obtener una moneda nacional el corresponsal habría de girar por

$$E_t : N_t$$

Con esos costos y productos unitarios resulta que el nomi-

nal de la trata cuyo producto corresponda al costo de la remesa de una unidad extranjera también será:

$$\frac{N_r}{E_r} \times \frac{E_t}{N_t}$$

pero como los cambios no serán los mismos que se tuvieron en cuenta para dar la orden, el valor de esta expresión que acabamos de hallar se convertirá en general en

$$\frac{N'_r E'_t}{E'_r N'_t}$$

y la orden se cumplirá si la nueva expresión es equivalente a la primera o si siendo diferente resulta beneficiosa para el que da la orden, porque permita girar menos cantidad a su cargo o remitirle mayor cantidad también, y como al aumentar la cantidad E_r que se puede remitir o disminuir la E_t que se ha de girar siempre causan disminución en el valor de la expresión, será ejecutada la orden cuando suceda

$$\frac{N_r E_t}{E_r N_t} \geq \frac{N'_r E'_t}{E'_r N'_t} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{E'_r N'_t}{E'_r N'_t} \geq \frac{N_r E'_t}{N'_r E'_t}$$

592.—Casos prácticos de órdenes de Banca con dos monedas.—Veamos ahora la interpretación práctica de la expresión, por referencia a las formas de cotización, y tendremos los cuatro casos siguientes:

1.° Operación a cumplirse en *plaza cierta para las dos operaciones.* Cuando así sea hemos de tener

$$N_t = N'_t \qquad \text{y} \qquad N_r = N'_r$$

y entonces la expresión anterior va sucesivamente dándonos los valores

$$\frac{E'_r}{E_r} \geq \frac{E'_t}{E_t}$$

$$\frac{E'_r}{E_r} - 1 \geq \frac{E'_t}{E_t} - 1$$

$$\frac{E'_r - E_r}{E_r} \geq \frac{E'_t - E_t}{E_t}$$

$$(E'_r - E_r)E_t \geq (E'_t - E_t)E_r$$

2.° Cotizaciones en *plaza incierta para las dos partes de la operación.* Resulta ser en este caso

$$E_t = E'_t, \qquad E_r = E'_r$$

y las transformaciones semejantes a las del caso anterior nos dan

$$\frac{N'_t}{N_t} \geq \frac{N'_r}{N_r}$$

$$\frac{N'_t}{N_t} - 1 \geq \frac{N'_r}{N_r} - 1$$

$$\frac{N'_t - N_t}{N_t} \geq \frac{N'_r - N_r}{N_r}$$

$$(N'_t - N_t)N_r \geq (N'_r - N_r)N_t$$

Comparando ahora las dos condiciones de cumplimiento para los dos casos considerados, de igualdad en la forma de cotización, podemos decir que *cuando las formas de cotización sean las dos ciertas o las dos inciertas para las partes de la operación, los cambios nuevos son equivalentes a los de la orden si las variaciones son del mismo sentido y proporcionales a los cambios.*

3.° *Cambio cierto para la remesa e incierto para la tra-ta.* En tal caso se tiene

$$E_t = E'_t \qquad \text{y} \qquad N_r = N'_r$$

con lo que la condición general va adquiriendo sucesivamente las transformaciones

$$\frac{E'_r N'_t}{E_r N_t} \geq 1$$

$$\frac{E'_r}{E_r} \geq \frac{N_t}{N'_t}$$

$$\frac{E'_r}{E_r} - 1 \geq \frac{N_t}{N'_t} - 1$$

$$\frac{E'_r - E_r}{E_r} \geq \frac{N_t - N'_t}{N'_t}$$

$$(E'_r - E_r)N'_t \geq (N_t - N'_t)E_r$$

4.° *Cambio incierto para la remesa y cierto para la trata*. Será entonces

$$N_t = N'_t \qquad \text{y} \qquad E_r = E'_r$$

de donde resultan las condiciones siguientes, semejantes a las anteriores

$$1 \geqq \frac{N'_r E'_t}{N_r E_t}$$

$$\frac{E_t}{E'_t} \geqq \frac{N'_r}{N_r}$$

$$\frac{E_t}{E'_t} - 1 \geqq \frac{N'_r}{N_r} - 1$$

$$\frac{E_t - E'_t}{E'_t} \geqq \frac{N'_r - N_r}{N_r}$$

$$(E_t - E'_t)N_r \geqq (N'_r - N_r)E'_t$$

Estableciendo ahora la comparación en la forma que hicimos con las cotizaciones semejantes, vemos que *en el caso de que las cotizaciones en la plaza de cumplimiento de la orden fuesen contrarias, los nuevos cambios son equivalentes a los fijados en la orden si las variaciones son de sentido opuesto y proporcionales a los cambios más bajos o a los más altos*.

Tanto en el caso de cotizaciones iguales como en el de cotizaciones contrarias habrá de tenerse en cuenta que si las variaciones son las opuestas a las que indican las condiciones de cumplimiento, es decir, que fuesen variaciones de sentido opuesto en el caso de cotizaciones semejantes o iguales para el caso de cotizaciones diferentes, entonces las dos variaciones son favorables o las dos perjudiciales y la elección será más fácil.

Establecidas las condiciones anteriores, tenemos referida la operación al caso en que fuese una sola la parte que comprende su ejecución y por consiguiente la elección para cumplir o dejar de ejecutar la orden es la misma que si se ordena sólo compra o venta de un valor cualquiera, y tan fácil que no precisa estudio especial, sino que sólo se refiere a la comparación de dos cantidades por resta.

Ejemplo: Un banquero de Londres recibe orden de su corresponsal en Amsterdam de remitir a Barcelona al cambio de 33'25 y girar sobre Amsterdam para compensarse, al cambio de 11'75. Los cambios a que puede tener cumplimiento la operación cuando llega la orden a Londres son de 33'45 sobre Barcelona y de 11'92 sobre Amsterdam. Determinar si la operación ha de ser ejecutada.

Sabemos que la forma de cotización de las pesetas y los florines en Londres son iguales, pues a las dos plazas de la operación da Londres el cierto, por lo que nos encontramos en el caso primero de los considerados, en el que el aumento del cambio sobre Barcelona produce una ganancia, porque disminuye el costo de la remesa, y el aumento del cambio sobre Amsterdam produce una pérdida porque disminuye el producto de la trata, luego es preciso establecer la comparación de las expresiones que indican las condiciones de elección, en cuyo cálculo son valores especiales

$$E_r = 33'25; \qquad E_t = 11'75; \qquad E'_r = 33'45; \qquad E'_t = 11'92$$

y tenemos por resultado

$$(33'45 - 33'25)11'75 < (11'92 - 11'75)33'25$$

que efectuando operaciones se convierte en

$$2'35 < 5'6525$$

por lo que siendo la desigualdad contraria a la que fija las condiciones de posibilidad de cumplimiento, ha de ser desechada la operación y pedir nuevas instrucciones al corresponsal de Amsterdam o esperar a otra sesión de cambios si la orden no fijaba tiempo para su cumplimiento.

Igual decisión se tomaría si de acuerdo con las consideraciones anteriores del caso en que hay ganancia y aquel en que hay pérdida nos fijamos en que el primer miembro de las desigualdades corresponde a la ganancia producida por la variación de los cambios y el segundo corresponde a la pérdida que también producen esas variaciones.

593.—Órdenes de Banca compuestas.—Se llaman así las que comprenden más de dos monedas, y precisamente por esta circunstancia o no tienen cambios fijos de cumplimiento o al menos falta alguno de éstos, constituyendo una elección que debe hacer el corresponsal.

Para resolver el cálculo que precisan y elegir la forma de cumplimiento se establece la condición de arbitraje entre los medios que comprende la orden por un lado y entre los de la cotización real por otro, y luego se comparan las dos combinaciones más ventajosas de ambas condiciones de arbitraje, sin que sea conveniente la deducción de fórmula ni regla general porque la complejidad de los cálculos hará que la expresión fuese mucho más engorrosa que el proceder por análisis del problema.

594. Gastos en las operaciones de arbitraje.—Todas las operaciones de arbitraje y de cumplimiento de órdenes de Banca pueden tener gastos de comisiones, corretajes u otros semejantes y además algunos fijos de correos, telegramas o

timbres, por lo que antes de aplicar las cotizaciones que forman las condiciones de arbitraje y elección deberán modificarse los cambios en virtud de esos gastos, haciéndolo sólo con los de carácter proporcional (tantos por ciento o por mil), pues que los otros gastos son pequeños y quedan de sobra compensados con los beneficios de la elección, pues cuando tal sucede se opera siempre sobre cantidades importantes.

Resulta por consiguiente que en caso de haber gastos los cambios se sustituirán siempre por las expresiones

$$C(1 \pm G) \qquad \text{o} \qquad C(1 \mp G)$$

según se trate de plazas inciertas o de plazas ciertas, y en las que G represente los tantos de gastos y el doble signo sea el que tantas veces hemos empleado, correspondiendo el superior a caso de compra y el inferior a caso de venta. Con ésto nos hallamos ya en los casos antes considerados que no precisan aclaración de ejemplo.

EJERCICIOS sobre *arbitrajes simples y beneficios*, los *números* **1357** al **1361; 1363** al **1365; 1367;** y **DI** al **DVIII:** sobre *listines cifrados* los *números* **1362; 1366; DIX** y además los anteriores, que todos pueden ser utilizados: sobre *gráficos* todos los anteriores y además los *números* **1368; 1370;** y **1372:** sobre *especulación* los *números* **1371; 1373; 1374; 1377; DX** al **DXIII**; sobre *órdenes de Banca* los *números* **1376; 1378; 1379** y **DXIV** al **DXIX**.

PROBLEMAS combinados con cuestiones anteriores, los *números* **DLXXIII** y **DLXXIV.**



LXI

ARBITRAJES SOBRE VALORES

595.—Clasificación del arbitraje sobre valores.— Debemos considerar los *de una sola plaza*, que consisten en determinar cuál es la mejor clase de valores para el empleo de capitales; *de varias plazas*, cuando la elección del caso anterior puede hacerse tanto sobre la clase de valores cuanto sobre el mercado entre varios de los que tenga un valor; *de report*, si se trata de especular con esta operación de Bolsa; y *mixtos*, que más comunmente se llaman *de Banca y Bolsa*, si la elección relativa a los valores hace referencia al empleo de los mismos como medios de cobro y pago en competencia con las operaciones de cambios.

596.—Cálculos del arbitraje sobre una sola plaza, o de rentas.—Para efectuar estos arbitrajes, basta buscar, en la forma que lo hicimos en el párrafo **491** el tanto real que producen anualmente cada una de las clases de valores que se desea adquirir, y elegir los títulos que producen mayor renta.

Teniendo presente además que el pago periódico de los intereses constituye para el que haya de cobrarlos una pequeña ventaja, o aumento en el tanto real por causa del fraccionamiento del interés, cuando el tanto que resulta para dos clases de valores es sensiblemente el mismo, deberá elegirse aquél cuyos cupones sean satisfechos en períodos más pequeños.

El verdadero arbitraje que ahora nos ocupa debiera ser resuelto por las fórmulas del interés compuesto, para tener en cuenta la diferencia que pudiera resultar en el tanto real de interés por causa de ese fraccionamiento, no pudiendo entrar en este cálculo por salirse fuera de los límites de nuestro tra-

bajo, si bien debemos repetir lo que en el citado párrafo **491** dijimos respecto al error.

La identidad de este cálculo de arbitraje con el del tanto real nos releva de resolver ejemplo que no había de ser más que una repetición de lo que entonces hicimos.

Para resolver este arbitraje es muy útil el cálculo gráfico del interés que producen los valores sobre que se desea elegir, gráfico que es el mismo que estudiamos en el párrafo **533** el cual para el arbitraje precisa ser de curvas funcionales múltiples y entonces para hacer la elección del valor más conveniente no sería necesario hacer la lectura numérica del tanto de cada uno, sinó solamente comparar las distancias de los puntos de cada tanto a la línea de las abscisas, pues siempre es más fácil la comparación gráfica, en forma semejante a lo que hicimos con los gráficos del arbitraje indirecto, y como en el que nos ocupa sólo tratamos de conocer cuál sea el tanto más elevado sin necesitar su valor numérico, también será más breve la comparación gráfica.

597.—Paridad de cursos.—Los arbitrajes sobre la renta de los valores producen en el mercado un equilibrio en las cotizaciones, solicitando en compra los de cotización más baja o sea los de mayor interés, y cuando ese equilibrio existe realmente se dice que entre los valores hay paridad de cursos, en cuyo caso el valor del arbitraje es nulo. El problema de paridad de cursos, queda reducido a resolver la ecuación que resulta al igualar el cálculo del interés real, y si el arbitraje y cálculo del interés se hiciese por medios gráficos la paridad sería una simple lectura de cambios correspondientes a valores iguales de la otra coordenada.

598.—Problema general del arbitraje de varias plazas.—Cuando un valor cualquiera tiene cotización en diferentes plazas, pueden ser distintos los precios de cada una de éstas y con ello dar posibilidad tanto a la especulación como a la elección del lugar en que haya de adquirirse o venderse el valor de que se trata.

Para resolver el problema general de este arbitraje supongamos que un valor cotiza en las plazas P' y P'' a los

cambios C' y C'' expresados en las monedas que son nacionales en las respectivas plazas.

Si el valor tiene su nominal N expresado en las monedas de otra plaza cualquiera P, será preciso referirle a las monedas de las plazas en que se cotiza para hacer los cálculos de su costo o producto, haciéndose esta referencia al cambio de reducción que en la plaza extranjera tenga el valor, y según el cual resultará para nominal de dicho título o valor las cantidades N' y N'' expresadas en las monedas de las plazas cotizadas.

Llamando F a la relación que existe entre los cambios de reducción de las monedas del título a las de las plazas cotizadas, ha de ser también

$$F = \frac{N'}{N''}$$

expresión a la que llamaremos *cambio de reducción combinado*, y si en estas condiciones designamos por C el término incierto del cambio cotizado en P' para la moneda de P'', el costo o producto del título o valor ha de ser

$$C''N''C$$

para el operador que residiendo en P' quiera comprar o vender en P''; pero si lo hace en la suya propia ese costo o producto será

$$C'N'$$

Para que el arbitraje fuese imposible debiera resultar indiferente la operación en una u otra de las dos plazas, y para ésto habría de ser

$$C''N'C = C'N'$$

de donde se obtiene

$$C = \frac{C'N'}{C''N''} = \frac{C'}{C''}F$$

que nos permitirá calcular la cotización del valor en la plaza P' que sea equivalente a la C' de la P'' para el cual tendremos

$$C' = C'' \times \frac{C}{F} = C'' + C'' \times \frac{C - F}{F}$$

y si ahora llamamos m a la diferencia indicada en el numerador, nos dá por condición de arbitraje

$$C' \gtrless C'' + C'' \times \frac{m}{F}$$

eligiendo el término que más convenga al cumplimiento de la operación de que se trate.

Tanto las cotizaciones de los valores como los cambios de monedas que intervienen en estos cálculos serán considerados como cambios con gastos siempre que éstos hayan de tenerse en cuenta porque no fueran iguales en ambas plazas.

Ejemplos: 1) Cotizándose en Madrid la Deuda amortizable 5 °/₀ al cambio de 95'65 y en Bilbao a 95'60 determinar la plaza donde haya de ser más conveniente la adquisición si el traslado de fondos de Bilbao cuesta el 0'20 °/₀.

Aunque en este caso es tan sencillo el arbitraje que no precisa más cálculo que la suma del cambio que tiene en Bilbao la deuda con los gastos de traslado para conocer el cambio que resulta en esta plaza, ya que todos los demás gastos son iguales en Madrid y en Bilbao, y en seguida se apreciaría que la compra es mejor en Madrid, y mucho mejor también para la venta, porque no existe el traslado de fondos; aunque —repetimos— es tan fácil este ejemplo, hemos de resolverle por la expresión general anterior para conocer la aplicación de la misma a los diversos casos.

Los valores especiales que tienen los elementos del cálculo son:

$$C' = 95'65; \qquad C'' = 95'60; \qquad F = 0; \qquad m = 0'20$$

y de aquí resulta la expresión de arbitraje

$$95'65 < 95'60 + 95'60 \times 0'0020$$

en la que hechas las operaciones indicadas será:

$$95'65 < 95'7912$$

y en consecuencia resulta más beneficioso operar en la plaza de Madrid.

2) La Deuda Perpetua exterior española del 4 °/₀ se cotiza en Londres a 79'85 y en Barcelona a 84'25. Siendo los gastos de estas dos plazas ½ °/₀₀ y 1 ½ °/₀₀ respectivamente, y el cambio de las libras esterlinas de 55'46, determinar la plaza más beneficiosa para la compra de títulos de esta Deuda.

Los valores que corresponden a los elementos del cálculo son:

$$C' = 84'25\,(1 + 0'00125) = 84'35551; \qquad F = 25'22;$$
$$m = 55'46 - 25'22 = 8'24; \qquad C'' = 79'85\,(1 + 0'0005) = 79'88992$$

puesto que en este caso hemos de modificar las cotizaciones por razón de los gastos que se originan en cada plaza, siendo el valor del segundo miembro de la condición de arbitraje

$$79'88992 + 79'88992 \times \frac{8'24}{25'22} = 79'88992 + 26'10202 = 105'99194$$

y la condición de arbitraje

$$84'35551 < 105'99194$$

que nos dice que será más ventajoso hacer la compra en España.

599.—Paridades de costo de valores.—Casi siempre se hacen los arbitrajes para pocos valores y para pocas plazas, por lo que la fórmula general anterior del arbitraje puede afectar otra forma que consiste en la determinación del valor del segundo término del segundo miembro para todos los valores que pueda tener la cotización C', es decir, que si la fracción $\frac{m}{F}$ se la refiere a fracción decimal, podemos construir tablas que señalen las cantidades a añadir al valor de C''.

Como ejemplo de formación de estas tablas consideraremos un empréstito emitido en libras esterlinas nominales, cuyo cambio fijo de reducción en una plaza P' fuese 25'40 y en otra P'' 25, con lo cual el valor de F será:

$$F = 25 : 25'40 = 0'98425$$

y la tabla que formaríamos sería la siguiente:

Rectificación de la cotización de un empréstito según los cambios

Cambios de la moneda de P' en P"	RECTIFICACIÓN de la cotización de los títulos	
96	disminuir	2'46 %
96'50	»	1'95 »
97	»	1'45 »
97'50	»	0'94 »
98	»	0'43 »
98'50	aumentar	0'08 »
99	»	0'59 »

600.—Gráfico del arbitraje de varias plazas.—Consiste el gráfico en la expresión de las paridades que para un valor resultan según la fórmula de condición del arbitraje cuando es indiferente la elección, porque sean iguales ambos miembros de la condición arbitral.

La construcción de este gráfico es completamente idéntica a los que ya hemos construido para las otras operaciones, puesto que en el eje de las abscisas se miden las cotizaciones C'' y se calculan las paridades que resultan para cada valor de esta cotización, correspondiendo a un cambio de

las monedas que entran en el arbitraje, como se hacía con el de Banca entre dos plazas por medio indirecto, leyéndose en el eje de las ordenadas los valores de las paridades y teniendo para cada cambio de banca una línea de éstas, por lo que para ser útil el gráfico ha de comprender tantas líneas como cambios haya entre las dos plazas, y como su construcción solo sería repetición de lo indicado en el gráfico de cambio indirecto prescindimos de más detalles.

601.—Posibilidad del arbitraje mixto.—El empleo de los valores mobiliarios como medios de cobro y pago está limitado sólo a algunos títulos de carácter internacional, porque hayan sido emitidos por algunos Estados fuera de su territorio cotizándose en los grandes mercados bursátiles, o bien las acciones y obligaciones de grandes Bancos o Sociedades que tienen cotización en varias Bolsas, y para que el arbitraje sea posible es necesario que el valor que se desea emplear se cotice tanto en el país deudor como en el acreedor, y que además deje un margen la venta en el país acreedor de los títulos que se hayan adquirido en el país deudor, o bien que el quebranto de esta compraventa sea menor que el costo del cambio directo de las dos plazas.

602.—Cálculo del arbitraje mixto.—Si consideramos que en la plaza P' los valores cuestan $C'N'$ y estos mismos valores vendidos después en la plaza P'' nos han de producir $C''N''$, tendremos que por cada una de las unidades de la plaza P'' que obtenemos por la venta nos habrá sido preciso desembolsar

$$\frac{C'N'}{C''N''}$$

unidades de la plaza P', o lo que es lo mismo, que esta relación constituye la cotización de las monedas de P'' en P' por medio del término incierto y en forma unitaria, por lo cual la condición de arbitraje mixto estaría expresada por la desigualdad entre esta expresión y el cambio directo de las dos plazas que intervienen en la operación.

Ejemplo: Determinar la posibilidad del arbitraje entre Londres y Madrid en las condiciones de cotización de la Deuda perpetua exterior 4 % española expresadas en el ejemplo último resuelto en el párrafo **598**.

La relación entre los valores de los títulos en las dos plazas estará expresada por

$$\frac{79'85 \times 25'22}{84'25} = 25'903$$

puesto que en este caso las dos cotizaciones son percentuales y por consiguiente los cambios de reducción habrían de ser multiplicados por la misma cantidad para hallar el cambio de reducción combinado, y por tal causa basta multiplicar por este cambio las cotizaciones, que es lo hecho.

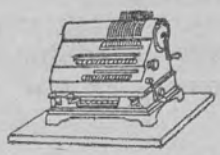
Comparando ahora la relación anterior con el cambio de Londres sobre España, o el de España sobre Inglaterra, nos encontramos con que es mayor el cambio cotizado que dicha relación, por lo que convendrá la remesa de valores desde España a Londres y el cambio directo para enviar fondos desde Londres a cualquier plaza española **(574)**.

603.—Gastos en el arbitraje mixto.—Es necesario tener presente que al operar con los valores mobiliarios es indispensable la remesa de ellos para su venta en la plaza acreedora, lo cual origina gastos especiales además de los que ha de originar la misma renta de los títulos, por lo que si llamamos G a estos gastos y es C el cambio directo, la condición del arbitraje de valores tendría que ser:

$$\frac{C'N'}{C''N''} + G \lesseqgtr C$$

y por causa de estos gastos no es fácil que esta condición se cumpla, resultando los cobros y pagos por medio de los valores operaciones excepcionales que sólo tienen lugar en caso de una alteración muy grande en las condiciones del cambio entre dos países.

EJERCICIOS sobre *arbitraje de renta*, los *números* **1381** al **1387; 1389** y **DXX** al **DXXIII:** sobre *adquisición de valores*, los *números* **1390** al **1394** y **DXXIV** al **DXXIX:** sobre *arbitraje mixto* los *números* **1395; 1396** y **DXXX** al **DXXXIII.**



LXII

ARBITRAJES DE METALES PRECIOSOS

604.—Clases del arbitraje de metales preciosos.—Hasta ahora hemos venido considerando que los arbitrajes de cobro y pago se referían a los efectos de comercio y sólo por excepción a los valores mobiliarios; pero el medio de nivelar las deudas internacionales es por esencia el oro, hasta el punto de que el mayor o menor valor de las monedas de un país respecto del otro depende en mayor parte de la posibilidad de recibir en ambos la misma cantidad de oro por cantidades de numerario intrínsicamente equivalentes, según los respectivos sistemas monetarios.

Resulta por consiguiente que los arbitrajes de cobro y pago pueden y deben referirse también al envío de metales preciosos, si bien hoy ha quedado reducida esta clase de operaciones al oro porque el papel de la plata como medio de pago ha quedado reducido en las relaciones internacionales a moneda divisionaria y fiduciaria.

Los metales preciosos son además objeto de un comercio de compraventa como mercancías y es posible que sus precios en los diferentes mercados sean distintos en tal modo que permitan obtener ventaja de operar en un mercado a hacerlo en otro, dando origen a otra especie de arbitraje.

Según lo que antecede los arbitrajes sobre metales preciosos pueden ser *de compraventa* o arbitrajes *de cobro y pago*.

605.—Arbitraje de compraventa.—Consiste este arbitraje en determinar cuál sea el mercado más ventajoso para la adquisición o enajenación de los metales preciosos.

La diversidad de cotizaciones de estas mercancías, tanto en las medidas a que se refieren como en la forma de expresarse los precios, hacen que estos arbitrajes no puedan ser reducidos a expresiones generales que señalen la plaza más conveniente, sinó que será necesario calcular el costo o producto de una unidad o de ciento en las diversas plazas que entren en el arbitraje en la forma que conocemos (**455**).

606.—Precio arbitrado entre dos plazas.—El precio que resulta para los metales preciosos en una plaza P' según el precio que tienen en otra P'' y el cambio de banca entre las dos plazas, comprendidos todos los gastos que origine la adquisición, se denomina *precio arbitrado*, y por consiguiente el arbitraje consistirá en determinar el precio arbitrado y compararle con el que tengan los metales en la plaza P' para deducir el arbitraje cuando haya diferencia entre ambos precios.

Ejemplo: El oro se cotiza en París a 12600 francos por kilogramo y en Nueva York con prima del 2 °/₀₀. Siendo el cambio del dollar en París de 19'04 y los gastos del transporte del oro de Nueva York a París del 4'25 °/₀₀ determinar dónde convendrá más la adquisición del oro a un comerciante francés.

El problema consiste en determinar el precio arbitrado del oro en París según las condiciones de compra en Nueva York, por lo que determinaríamos el costo de un kilo adquirido en esta última plaza para compararle con el precio que tiene en el mercado parisién y proceder a la elección arbitral.

La cantidad que por consiguiente hemos de considerar comprada en Nueva York ha de ser de un kilo o mejor de 1000 gramos, los que deberemos reducir a onzas para que se expresen en las unidades a que el precio se refiere, teniendo como onzas compradas

$$\frac{1000}{31'1035}$$

y aplicando ahora la fórmula [4] del párrafo **454** tenemos como valores especiales para aplicar la fórmula, los siguientes:

$$P_m = (1000 : 31'1035); \qquad I_m = 1; \qquad C_t = 800; \qquad I_t = 0'9;$$
$$P_t = 43; \qquad t = 0'002$$

por lo que el importe de la compra en dollars sería

$$\frac{1000 \times 1 \times 800\ (1 + 0'002)}{31'1035 \times 0'9 \times 43}$$

y el costo en francos tendría que ser

$$\frac{1000 \times 800\,(1 + 0'002)(1 + 0'00425)19'04}{31'1035 \times 0'9 \times 43} = 12733'45 \text{ francos}$$

por tanto no ha de ser conveniente la adquisición en Nueva York, sino que se eligirá París como mercado en que operar.

607.—Precio arbitrado entre varias plazas.—Cuando el operador no reside en ninguno de los mercados se verá precisado a calcular el precio arbitrado que tienen los metales para su país o plaza desde los diversos mercados, en cuyo caso para todos han de existir los gastos de remesa, si bien el procedimiento de cálculo ha de ser completamente idéntico al anterior, sin más que repetir el cálculo del costo tantas veces como plazas hayan de intervenir en la operación.

Ejemplo: El oro se cotiza en Nueva York con 2 °/₀₀ de prima, en Londres a 95/1 y en París a 12625 francos, siendo las cotizaciones del cambio de Banca en Madrid para estas tres plazas respectivamente 7'25; 35'75 y 38'90. Determinar el mejor mercado para la compra del oro si los gastos de remesa desde cada plaza a España ascienden también respectivamente a 4'22 °/₀₀; 3'80 °/₀₀ y 3'76 °/₀₀.

Del mismo modo que anteriormente hemos de calcular los costos en pesetas, de un kilo de oro fino en cada una de las plazas, y hallaremos:

Costo de la compra en Nueva York.

$$\frac{1000 \times 800\,(1 + 0'002)(1 + 0'00422)\,7'25}{31'1035 \times 0'9 \times 43} = 4004'32 \text{ pesetas}$$

Costo de la compra en Londres.

Deberemos reducir el precio a peniques con objeto de que resulte más comprensible la expresión y nos encontraremos para este costo

$$\frac{1000 \times 1117(1 + 0'0038)35'75}{31'1035 \times 240} = 2896'78 \text{ pesetas}$$

Costo de la compra en París,

$$12625(1 + 0'00376)0'389 = 4929'59 \text{ pesetas}$$

lo que nos dice que la plaza más beneficiosa para la adquisición es la de Londres; debiendo advertir que en las condiciones del mercado no habían de ser tan grandes las diferencias entre los precios arbitrados, ya que entonces podrían dar origen a grandes especulaciones que nivelarían las cotizaciones, y si aparecen en el ejemplo tan gran diferencia entre los tres precios es porque no ha de entenderse el arbitraje más que como indicación del procedimiento de cálculo sin que pueda ser norma de las situaciones de los mercados.

608.—Objeto del arbitraje de cobro y pago por medio de los metales preciosos.—El arbitraje de cobro y pa-

go por medio de metales preciosos, o más bien, por medio del oro, tiene por objeto determinar si el cambio es o no superior a los puntos del oro (**362**) para en vista de ello decidir el medio que haya de emplearse; si la remesa metálica, o el efecto de comercio que se negocia en el cambio de banca.

609. — Condición de este arbitraje. — La regularización de las deudas internacionales entre las plazas P' y P'' hemos visto que pueden efectuarse por medio del envío de divisas o por la remesa de numerario aureo. Si ahora llamamos C al cambio de banca existente entre las dos plazas, o sea el que se cotiza en P' para las monedas de P'' puesto que siempre han de ser dos solas las plazas, y siempre podemos suponer P' la que sea deudora, y llamamos M al precio arbitrado del oro para la plaza acreedora, es indudable que la condición del arbitraje estará expresada por

$$C \gtreqless M$$

según la cual tendrán existencia simultánea los efectos de comercio y las remesas de metálico cuando sean los dos términos iguales, se harán remesas de oro de P' a P'' cuando el primer término sea mayor que el segundo y se harán las remesas de efectos de comercio desde P' a P'' si el mayor de los dos miembros es el segundo.

610. — Puntos metálicos superiores e inferiores. — Se llaman puntos metálicos superiores e inferiores los que determinan los movimientos de metal de una plaza a otra para los pagos internacionales.

Si consideramos la situación sana de las dos plazas entre las cuales se verifica el arbitaje, llamamos m el valor de la unidad monetaria de oro de la plaza P' y son g los gastos del transporte desde la plaza P' a la P'', es indudable que el costo de esta unidad monetaria de P' puesta en la plaza P'' será

$$m + g = 1 + g$$

puesto que el valor de m es el de la unidad monetaria.

En tales condiciones la condición de arbitraje mixto estaría dada por

$$C \gtrless 1 + g$$

expresión en la que el valor de C ha de ser cotización unitaria, y en tal caso también el segundo miembro de la condición arbitral es la misma cotización, pero expresada por medio del agio (**577**), así que la condición arbitral nos indica que los gastos de transporte de la unidad monetaria de una plaza a otra son para el límite arbitral equivalentes al agio del cambio, en las cotizaciones que se hacen por este procedimiento.

Si ahora consideramos el producto que se obtendría en el pago por cada unidad enviada, resulta que habría de ser la misma unidad menos los gastos de transporte, y en tales condiciones el arbitraje estaría determinado por la expresión

$$C \gtrless 1 - g$$

en la que también son los gastos de transporte equivalentes al agio, si bien en el primer caso el agio es de beneficio y en el segundo de quebranto. Pero como todas las cotizaciones pueden ser referidas al beneficio o quebranto en relación al valor de la unidad monetaria, resulta que esta condición arbitral puede servir para todas las cotizaciones después de hecha esta referencia.

También puede establecerse la generalización de la expresión anterior para el caso en que la situación de una o de las dos plazas no fuese sana, sino que hubiera sufrido gran quebranto, pues en tal caso bastaría sustituir 1 por el valor que tuviera la unidad monetaria de oro en relación a la que circula para los pagos interiores.

De cualquier modo, siempre tendremos que la condición de arbitraje nos dice que se harán remesas de metal cuando el cambio sea mayor que el valor de la unidad monetaria más los gastos, por lo cual esta *suma del valor de la unidad monetaria de oro con los gastos del transporte se denomina* PUNTO METÁLICO SUPERIOR, porque a partir de él cualquier ascenso en el cambio entre las dos plazas determina remesa de metálico hacia la plaza de cambio más alto; y por el contrario,

se llama PUNTO METÁLICO INFERIOR, *a la diferencia entre el valor de la unidad monetaria y los gastos del transporte*, porque a partir de esta resta se determina el movimiento de metal hacia la plaza del cambio más bajo.

Estos puntos metálicos son los mismos a que hemos hecho referencia al tratar del cambio (**362**); y también reciben los nombres de *punto de exportación* el punto superior y *punto de importación* el punto inferior.

611.—Cálculo del arbitraje mixto.—El arbitraje mixto está constituído por la comparación del cambio con el costo o producto de metal amarillo cuando este costo o producto se refiere a compra o venta en la misma plaza, por lo que la primera condición de posibilidad del cálculo está en la existencia de mercado que permita esta compra o venta, y en segundo lugar ese cálculo sólo podrá efectuarse cuando haya libertad en la exportación del oro del país que según la condición del arbitraje haya de hacer la remesa al otro, pues en caso contrario no es posible hacer un cálculo en el que falta el elemento determinativo de la condición de arbitraje, cual es el de gasto del transporte, que por causa de esa prohibición, será completamente indeterminado, ya que aún admitida la posibilidad del cálculo, ese transporte ha de constituir un contrabando que exije mayores gastos de transporte y además el riesgo que supone la contravención de las legislaciones.

Resulta por consiguiente que el cálculo del arbitraje mixto sólo tiene objeto cuando los países a que se refiere tienen moneda sana susceptible de hacer el pago metálico, pero admitida la posibilidad de hacerse para cualquier situación del mercado es indudable que este cálculo consiste en determinar el valor de compra (**454**) del metal fino contenido en la unidad fundamental (**145**) para sumarle a los gastos o restar éstos de dicho importe, según señala la condición de arbitraje, y como sobre estos gastos no es posible fijar normas generales de cálculo además que la determinación del importe de compra o venta sería una repetición de lo dicho en otro lugar (**454**) prescindimos de más detalles sobre este arbitraje, si bien a título de aclaración resolveremos un ejemplo cual si la situación de las monedas a que se refiere estuvieran completamente en condiciones de libre circulación del oro.

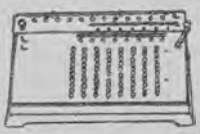
Ejemplo: Suponiendo que en España y en Londres están a la par con el oro las respectivas monedas, determinar el punto de exportación de este metal en España, siendo los gastos del transporte 3 °/₀₀.

El kilo de oro fino equivale a 3444'44 pesetas y el oro fino que contiene una libra esterlina es de 7'318 gramos, por consiguiente el valor de costo de una libra esterlina en oro, comprada en España y enviada a Londres será de

$$\frac{3444'44 \times 7'318(1 + 0'003)}{100} = 25'282 \text{ pesetas}$$

y por consiguiente el punto de exportación del oro para España sería el correspondiente a la cotización de la libra esterlina a 25'282 pesetas, desde cuyo momento se iniciaría la exportación del metal en tanta mayor escala cuanto más subiese la cotización.

EJERCICIOS sobre *compraventa*, los *números* **1397** al **1399**; **DXXXIV** y **DXXXV**: sobre *arbitrajes de cobro y pago*, los *números* **1400** al **1402**; y **DXXXVI** al **DXXXVIII**.



LXIII

ARBITRAJES DE MERCADERÍAS

612.—Arbitrajes mercantiles.—Los *arbitrajes mercantiles* consisten en la determinación de la plaza que es más conveniente para la compra o venta de mercancías, de donde se deriva esa otra denominación con que designamos el capítulo.

Comprenden estos arbitrajes los cálculos necesarios para la elección, como en las demás clases que hemos estudiado en esta última parte de nuestro trabajo, pero estos cálculos cuando se refieren a las mercaderías tienen a la vez el carácter de presupuestos de adquisición y se conocen en tal caso con el nombre de *cuentas simuladas* de compra y venta.

Además del objeto general se hacen estos cálculos preventivos para establecer la conveniencia de la adquisición, o de la venta anticipada de unas mercancías que todavía no se tienen en poder del que hace el cálculo; para deducir si se podrá efectuar una venta o si convendrá hacer una adquisición de mercaderías cuyo producto en venta es conocido, o también para determinar la pérdida o ganancia que resulta de esas operaciones simuladas combinadas.

Todas estas manifestaciones de los arbitrajes mercantiles pertenecen al campo de la especulación sobre mercaderías y el de elección de la plaza es el que se hace para los suministros del comercio o la industria, como constitutivo de operaciones firmes que se liquidarán con la entrega o retirada de los géneros sobre que versan.

Una y otra clase de arbitrajes tienen como cálculo fundamental la determinación de las *paridades* o precios recíprocos de compra y venta entre diferentes plazas.

613. – Elementos necesarios al arbitraje. – Los elementos necesarios para conseguir la determinación que constituye el arbitraje de que nos ocupamos son:

1.° El precio probable (o ya acordado) para la compra o la venta.

2.° Todos los gastos o pérdidas inherentes a la operación y que ya enumeramos en otro lugar de esta obra (**421**).

3.° Las relaciones entre medidas o monedas, si las operaciones tienen cumplimiento en países en que unas u otras sean diferentes de las del país en que se calcula.

Vemos por estos elementos que el cálculo del arbitraje constituye operación idéntica a la determinación del costo o producto de una partida de géneros comprada o vendida, cosa que ya conocemos; pero el cálculo fundamental de todos los de arbitraje tiene un aspecto especial, que es el de poder hacerse de modo que sirva de referencia general para que no hayan de repetirse los cálculos, según hemos dicho que sucedía con todos los arbitrajes (**568**).

614. – Cálculo general. – Cuando se trata de conocer la plaza más ventajosa para la compra o venta de mercaderías valiéndose de cálculos de arbitraje, se hacen las cuentas simuladas para las diversas plazas, en forma igual que si se tratase de verdadera compra o venta ya ejecutada, y después se comparan los resultados para decidirse por el más ventajoso.

Para abreviar estos cálculos, bastan en muchos casos sólo algunos de los elementos del costo, puesto que existen otros que son comunes a todas las plazas y no han de influir en la decisión, como sucedería por ejemplo si se trata de comprar seda en Londres o Bombay en el que bastará conocer el precio *cif* en el puerto de introducción en el país en que se hace el cálculo, ya que desde ese momento los mismos gastos han de tener las sedas sean de una u otra plaza, y si acaso, como caso excepcional, deberían considerarse también los derechos de aduana si por existir tratados de comercio distintos con una u otra procedencia no fuere la misma la tarifa de derechos de importación para la partida que se compre en una plaza o en otra de las que se calculan.

Ejemplos: 1) Determinar la plaza mejor para la adquisición de aceite de

oliva sabiendo que en Sevilla se cotiza el corriente bueno a 235 pesetas los 100 kilos y la misma clase en Béjar tiene un precio de 236 pesetas, siendo los gastos que originan cualquiera de las dos compras, el de transporte que desde Sevilla es de 1240 kilómetros y desde Béjar 715 y además los de envase, acarreo y derechos de consumo que son los mismos para cada compra. El precio del transporte es de 0'0086 pesetas por tonelada y kilómetro.

En este caso debe prescindirse de todos los gastos que no sean los del transporte porque lo2 otros son iguales para las dos partidas, por consiguiente bastará determinar el precio que por razón del transporte corresponde a cada plaza de las dos referidas y tendremos:

Precio cotizado en Sevilla.....	Ptas.	235'00
Transporte de 100 kg. en 1240 km.; 1240 × 0'1 × 0'0086.....	»	1'07
Precio de costo de la compra en Sevilla.....	Ptas.	236'07
Precio cotizado en Béjar.....	Ptas.	236'00
Transporte de 100 km.; en 715 km.; 715 × 0'1 × 0'0086.....	»	0'61
Precio de costo de la compra en Béjar.....	Ptas.	236'61

luego lo más conveniente será la compra en Sevilla.

2) Un comerciante de Coruña desea adquirir una mercancía cuyos mercados son Londres, Amsterdam y París y quiere conocer dónde ha de serle más ventajosa la compra, sabiendo que *en Londres* se cotiza a 18 chelines la yarda con pago a los tres meses; siendo los gastos de despacho y remesa el 8 %, (*) el cambio sobre Londres de 32'85 y el descuento en la plaza vendedora el 5 %; *en París* el precio es de 85 francos el metro pagaderos a dos meses, con gastos del 6 %, cambio sobre París de 40'05 y descuento del 6 %; y *en Amsterdam* la cotización es de 14'15 florines metro, pago a los 30 días, con gastos del 7 %, y siendo el cambio sobre Amsterdam de 220 y el descuento en esta plaza de 4 %. Además se originarían los gastos de Aduanas y despachos, y acarreos que por ser los mismos para cualquiera de las tres plazas no hemos de tener en cuenta.

El costo de un metro en cada una de las tres plazas resultará:

LONDRES.

Precio de compra de un metro 18 : 0'914 chelines.

Precio del mismo con gastos (18 : 0'914)(1 + 0'08) chelines.

Valor en pesetas al cambio (18 : 0'914)(1 + 0'08)32'85 : 20 pesetas.

Valor a la vista

$$\frac{18 \times 1'08 \times 32'85 \times (7300 - 90)}{0'914 \times 7300 \times 20} = 34'50387 \text{ pesetas.}$$

Puede apreciarse que en todos los cálculos parciales vamos dejando indicadas las operaciones a fin de no acumular errores ni tener que considerar los límites necesarios, con lo que obtenemos una gran abreviación en el cálculo.

(*) Estos gastos serían cantidades diversas que para simplificar el cálculo referimos a una sola partida; pero que se calcularían cada uno por separado como hacemos con los demás elementos del costo.

tanto en esta parte resuelta como en las que ahora pasamos a resolver.

París

Precio con gastos, $85 \times 1'06$ francos.

Precio en pesetas, $85 \times 1'06 \times 0'4005$ pesetas.

Valor a la vista

$$\frac{85 \times 1'06 \times 0'4005 \times (6000 - 60)}{6000} = 35'7242 \text{ pesetas.}$$

Amsterdam.

Precio con gastos, $14'15 \times 1'07$ florines.

Precio en pesetas, $14'15 \times 1'07 \times 2'20$ pesetas.

Valor a la vista

$$\frac{14'15 \times 1'07 \times 2'20 \times (9000 - 30)}{9000} = 35'198 \text{ pesetas.}$$

Comparando ahora los tres resultados, vemos que el más ventajoso para la adquisición ha de ser la plaza de Amsterdam.

En los cálculos anteriores ha de distinguirse el procedimiento de referir a vista los precios que corresponden a otros vencimientos y así para la plaza de Londres hacemos uso del año legal y para las otras dos del año comercial, de acuerdo con los usos de cada una de ellas **(206)** y en la forma que dijimos **(341)** para los descuentos de efectos.

615.—Clases de paridades.—Hemos dicho que las paridades constituyen los fundamentos de los arbitrajes mercantiles, y ahora hemos de añadir que *se entiende por paridad entre dos plazas la equivalencia recíproca entre los precios de las dos plazas para la misma mercancía*, pero como esta referencia recíproca entre los precios de las dos plazas puede hacerse según las diversas clases de precios (**419** y **422**) de ahí que resulten diversas clases de paridades, si bien no todas han de ser consideradas, porque pueden todas resolverse en dos clases que serán de *paridad bruta*, o correspondiente al precio cotizado en cada plaza sin tener en cuenta los gastos modificativos y sí únicamente el cambio de banca, y la *paridad neta*, que resulta de hacer entrar en el cálculo todos los gastos necesarios al cumplimiento de la operación.

616.—Cálculo de la paridad.—El cálculo de la paridad es el que se hace para conocer el precio que en una plaza corresponde al que las mercancías tienen en otra, y constituye una forma de arbitraje que antes hemos calculado, por lo que no entramos en más detalles, ya que en el segundo ejemplo del párrafo **614** son tres las paridades calculadas para la plaza

de la Coruña referidas respectivamente a las de Londres, París y Amsterdam.

617.—Tablas de paridades.—Las tablas de paridades están formadas por un conjunto de ellas que se han calculado para condiciones diferentes del mercado, casi siempre para las variaciones que puedan experimentar los cambios de las monedas que intervienen en la operación arbitrada, puesto que para una misma plaza serán sensiblemente los mismos los gastos que se originen en una o en otra remesa u operación; pero en cambio han de ser diferentes, (algunas veces con variaciones de mucha importancia), las cotizaciones de las monedas, y con estas variaciones tendremos grandes alteraciones en las paridades entre las dos plazas que se comprenden en la tabla.

La disposición de las tablas se hace a doble entrada, de modo que en un sentido (horizontal o vertical) se tengan los precios de la mercancía y en el contrario las cotizaciones de la moneda de dicho precio en la plaza arbitrada, y en cada punto de cruce de líneas y columnas aparecerá la paridad, que corresponde a la vez a precio y cotización de la respectiva línea y columna.

En cuanto al cálculo, ha de ser hecho tantas veces como paridades se comprendan en la tabla, y para que éstas sean verdaderamente útiles a los efectos del arbitraje, han de ser tantas como plazas sean susceptibles de elegirse, para poder consultarlas todas en el momento de la decisión y evitarse más cálculos que, si acaso, alguna resta.

Para el cálculo de la tabla no es preciso que el precio y la paridad se refieran a la misma medida, pues que dicha paridad debe ser expresada siempre que se pueda en la unidad de medida del país en que se hacen los cálculos, tanto porque es la que conviene al negociante para tener en cuenta las posibilidades de venta al precio que exprese la paridad, cuanto porque al ser varias las escalas de paridades todas han de estar referidas a la misma unidad, si es que han de ser comparables sin cálculos provisionales. De acuerdo con ésto puede notarse que en el ejemplo de arbitraje resuelto, la mercancía a que nos referimos se cotiza en Londres por yardas y el precio hallado se refiere a metros, que es el conveniente para el comerciante de la Coruña, y para que pueda compararse el precio por com-

pra en Londres con los que resultan para París y Amsterdam

Estas tablas pueden ser lo mismo de paridad neta que de paridad bruta, si bien para la primera clase de paridad no es tan útil el cálculo y formación de la tabla, porque siendo más de dos los elementos variables que en el cálculo intervienen, se necesitaría una extensión extraordinariamente grande para que la tabla proporcionase los datos necesarios al arbitraje.

Ejemplo: Sean las dos plazas **A** y **B**. Un comerciante de la primera desea formar las paridades de una mercancía que se cotiza en **B** por unidad de esta plaza entre 357 y 364, sabiendo que la unidad de medida en **A** equivale a 1'22 unidades de **B** y siendo las cotizaciones comprendidas entre 25'19 y 25'225 %.

Calcularemos sucesivamente ocho paridades para cada cambio iguales a la que sigue, que es la correspondiente al precio de 357 y cambio de 25'19, según lo cual el precio dará en monedas de **A**

$$(357 \times 25'19) : 100 = 89'9283$$

y como ésto es para las unidades de medida de **B**, para las mismas de la otra plaza será

$$89'9283 : 1'22 = 73'7118$$

y por cálculos iguales formaremos la tabla siguiente:

Tabla de paridades entre A y B

Cotizaciones en **A** % para la moneda de **B**	PRECIOS DE LA MERCANCÍA EN **B**							
	357	358	359	360	361	362	363	364
	PARIDADES EN **A**							
25'19	73'7118	73'9183	74'1248	74'3312	74'5377	74'7442	74'9507	75'1571
25'195	73'7264	73'9329	74'1394	74'3459	74'5524	74'7589	74'9654	75'1719
25'20	73'7410	73'9475	74'1541	74'3607	74'5672	74'7738	74'9803	75'1869
25'205	73'7556	73'9622	74'1688	74'3754	74'5820	74'7886	74'9952	75'2018
25'21	73'7702	73'9769	74'1835	74'3902	74'5968	74'8034	75'0101	75'2167
25'215	73'7849	73'9916	74'1982	74'4049	74'6116	74'8173	75'0240	75'2296
25'22	73'7995	74'0062	74'2129	74'4197	74'6264	74'8331	75'0398	75'2466
25'225	73'8141	74'0209	74'2277	74'4344	74'6412	74'8480	75'0547	75'2615

618.—Gráficos del arbitraje de mercaderías.—Estos gráficos tienen un empleo semejante al que hemos indicado en las demás clases de arbitraje, puesto que en ellos se comprenden los datos que pueden suministrar las tablas de paridades.

Los gráficos comprenden muchos más datos que las tablas, porque pueden servir a la vez para las paridades brutas y para

las paridades netas, y hasta comprender en un sólo gráfico paridades de una plaza con otras varias distintas, reuniendo así varias tablas de paridades en una sola, y facilitando, en consecuencia, el arbitraje para que se construyen. Además, en el gráfico siempre se comprenden las paridades de precios y cotizaciones intermedias, que no pueden tener las tablas a causa de la discontinuidad de los datos de éstas que en el gráfico se halla sustituída por una continuidad en todas las cantidades que en él se comprenden, tanto de datos como de resultados, y de ahí que en el gráfico queden comprendidas las paridades de todos los precios y cotizaciones intermedias.

619.—Construcción del gráfico de paridades únicas.—Para formar un gráfico de paridades únicas se marcan en el eje de las abscisas las cotizaciones de la mercancía en la plaza arbitrada; después se calculan las paridades que según esos precios corresponden a una cotización de cambios cualquiera, señalando esas paridades encontradas en la ordenada correspondiente al precio, y uniendo luego los puntos de paridades, se tendrá una línea para el cambio que sirvió para hallar éstas. Como estas líneas son rectas, basta que se determinen dos paridades cualesquiera y se unan sus puntos, prolongando la línea cuanto sea posible y teniendo así las paridades de todos los precios que se comprendan en el gráfico, con sólo haber calculado dos de ellas.

Puede tomarse otra clase de coordenadas para construir estos gráficos, y en cualquiera de ellas el problema será la representación de una función de dos variables (**67** y **71**); pero como las líneas de la función sólo son rectas en las coordenadas cartesianas a ellas solas nos referimos en estos casos.

Ejemplo: Calcular las paridades de precios de algodón en Barcelona por 50 kilos para precios en Nueva York de 18 a 26 centavos por libra y cambio de 7'40 para el dólar en España, y formar el gráfico correspondiente.

Calcularemos dos paridades cualesquiera empezando por reducir el peso métrico a libras inglesas, que nos dará

$$50000 : 453'5924 = 110'231 \text{ libras}$$

y mediante el producto del peso por el precio y por el cambio obtendremos esas dos paridades cualesquiera, que para los precios 18 y 25 serán

$$110'231 \times 0'18 \times 7'40 = 146'8277 \text{ pesetas}$$
$$110'231 \times 0'25 \times 7'40 = 203'9274 \text{ pesetas}$$

que son los dos puntos que corresponden a las ordenadas de 18 y 25 en la fig. 66 y que determinan la línea continua de la figura.

Del mismo modo iríamos repitiendo los cálculos de dos paridades por

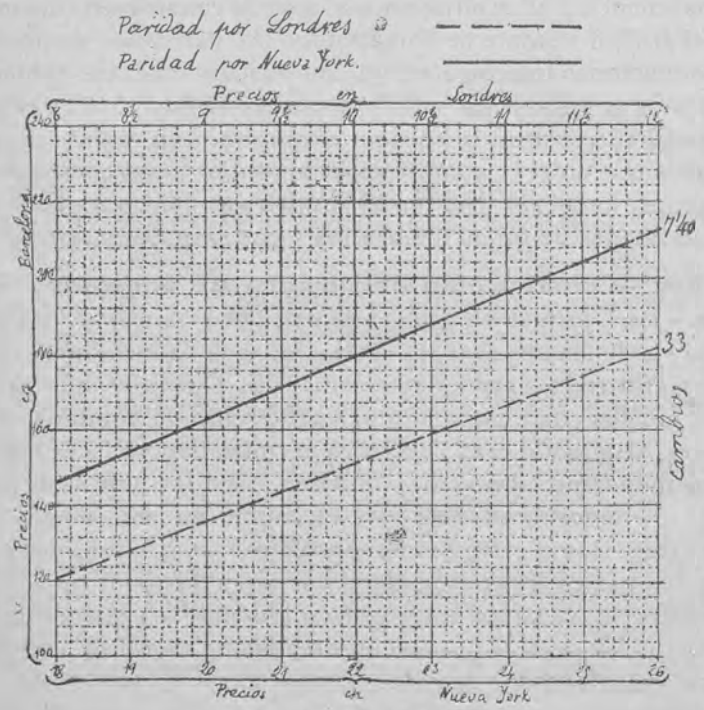


Fig. 66. Paridades comerciales brutas.

cada uno de los cambios del dollar en España y tendríamos las paridades posibles entre las dos plazas a que el gráfico se refiere.

En igual forma se construye el gráfico de paridades netas, ya que lo único que puede variar es el cálculo de los números necesarios a la determinación de los dos puntos precisos para el trazado de la línea; pero siempre será más útil construir el gráfico de paridades brutas y después completarle con otros que determinen los aumentos que sufre el precio por razón de cada uno de los gastos; construyendo un gráfico para cada gasto que haya de tenerse en cuenta, construcción que será exactamente idéntica a las del general de la paridad; pero siendo forzosamente aproximados los datos que se leen en

los gráficos, la utilización de estos múltiples para cada arbitraje puede dar origen a decidirse por el medio que no sea el más ventajoso, a causa de la acumulación de errores que suponen las lecturas aproximadas de varios gráficos, por lo que será siempre el mejor medio la utilización de un sólo gráfico para todo arbitraje, o varios gráficos de la misma escala trazados en papel transparente para superponerlos, procurando que las lecturas numéricas sean las menos posibles a fin de eliminar estos motivos de error.

620.—Gráfico de paridades múltiples.—Cuando se desea que en un mismo gráfico se comprendan las paridades de varias plazas a la vez, se han de trazar tantas líneas como cambios se consideren para cada plaza, y como una vez construído el gráfico habría confusión entre las líneas de una plaza y las que corresponden a otra, será necesario trazarlas de modo diferente para cada una, según puede verse en la fig. 66, en la que aparece una línea para la paridad de Nueva York con Barcelona en forma de trazo contínuo y otra línea para la paridad de Londres con Barcelona también, siendo el trazo cortado para que se diferencie lo bastante, o ya haciendo las líneas de colores diferentes.

Esta forma de distinguir las líneas de paridades de una plaza de las que corresponden a otra tiene el inconveniente de que al ser muchas las líneas, como sucederá en los gráficos que se construyan para consulta, pueden unas llenar los cortes de los trazos de otra y traer confusiones, por lo que el medio, casi puede decirse que único, de hacer esta distinción, ha de ser por trazos de colores diferentes que destaquen unos de otros.

Cuando ha de construirse un gráfico para varias plazas pueden señalarse los precios de cada una con sus variaciones más frecuentes sin necesidad de que correspondan a variaciones equivalentes en otra plaza, y hasta sin que los precios se refieran a las mismas unidades, y así puede apreciarse en la fig. 66, que los precios de Londres varían por medio penique a la libra y los de Nueva York lo hacen por centavo de dollar, pudiendo ser todavía mayor la disconformidad de estas variaciones, teniéndose con estas disconformidades la convergencia de las líneas de una plaza con respecto a las de la otra,

convergencia tanto mayor cuanto mayores sean esas diferencias de variación.

También la marca de los precios en el gráfico puede hacerse en línea diferente, paralela al eje de las abscisas, según hemos hecho con la tan repetida fig. 66, y si hubiese más de dos plazas, nada impide que se repitan dos series de precios sobre la misma línea paralela al eje, pero mejor será utilizar en cualquier caso el mismo color de tinta para las marcas de estos precios que el empleado en los trazos que correspondan a sus paridades, para que la misma vista ayude a la consulta y evite los errores de cambiar los precios.

621.—Utilización del gráfico.—Una vez que se tiene construído el gráfico, *puede ser utilizado lo mismo para las paridades brutas con que fué construído, que para las paridades netas cif, comprendiendo como gastos los de transporte y seguro en la misma moneda en que se expresa el precio.*

Para calcular un arbitraje por medio de los gráficos de paridades, se suman con el precio los gastos que se expresen en la misma moneda, referidos si es preciso a igual unidad de medida, y se busca en el eje de las abscisas el punto correspondiente a esta suma leyendo en el eje de ordenadas la paridad neta correspondiente.

Ejemplo: Si un mercado en Nueva York cotiza el algodón a 25 centavos la libra y se han de pagar 3'92 dollars por tonelada para el flete y el 1 °/₀₀ de seguro, nos hallamos con que el precio neto comprendiendo estos gastos será el de 25 centavos más la parte de gastos que por esos conceptos corresponda a la libra, y como la tonelada inglesa a que se refiere el flete contiene 2240 libras, resulta para flete de cada una en centavos

$$\frac{392}{2240} = 0'175$$

y comprendiendo el seguro tendremos por precio neto de cada libra, también en centavos de dollar

$$25'175 \times 1'001 = 25'200175$$

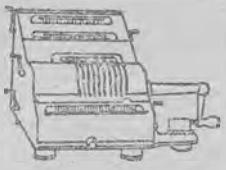
lo que hará que utilicemos la ordenada correspondiente a la primera división del gráfico que sigue al punto de 25 en los precios de Nueva York, leyendo después el resultado aproximándolo cuanto se pueda de modo que sea algo por exceso, pues que el precio excede muy poco del correspondiente a la ordenada de 25'20 señalada en el gráfico, así que el error de tomar el punto correspondiente de ésta es también muy pequeño y hasta puede despreciarse.

Obtenido el punto de paridad que corresponde a una plaza no es preciso hacer la lectura numérica, sino que por el mismo procedimiento obtendremos los puntos correspondientes a las demás plazas, y en el mismo gráfico estableceremos la comparación de las ordenadas de cada paridad encontrada, para decidirnos por la más baja en caso de compra o la más alta en caso de venta, sin necesitar leer los números que corresponden a cada una, porque siendo el objeto del arbitraje saber únicamente cuál sea la más beneficiosa, no se necesita saber el exceso o defecto numérico, sino solamente que existe la desigualdad en un sentido o en otro.

Construyendo gráficos de paridades brutas podremos utilizarlos lo mismo para compra que para venta, en la forma dicha, sin más que restar del precio cotizado los gastos de la venta en vez de sumarlos como hemos hecho en la compra, para obtener el precio neto que ha de servir para la comparación de las ordenadas.

EJERCICIOS sobre *arbitrajes y especulaciones* los números **1403** al **1407; 1410; 1411; DXXXIX** al **DXLVIII;** sobre *paridades* los números **1408; 1409; 1412** al **1415; DXLIX** y **DL;** y sobre *gráficos* los números **1416; 1417** y además pueden servir todos los de cálculo numérico.

PROBLEMA combinado con cuestiones anteriores el número **1444.**



BIBLIOGRAFÍA

Aunque existen cuestiones de Cálculo tratadas en obras de Contabilidad, o de otras ramas de las Matemáticas, no aparecen en esta Bibliografía porque sería hacerla demasiado extensa y porque sólo accidentalmente se estudian en ellas las cuestiones bajo el aspecto que lo hacemos en esta obra, sucediendo lo mismo con las obras de Derecho respecto a las cuestiones de Técnica, por lo cual comprendemos las obras de las dos fuentes de estudio para el Cálculo Comercial (3), y hasta hemos prescindido de las que no pertenecen a esta rama del Cálculo Mercantil.

Las *Revistas* que aparecen indicadas no son ninguna especial de Cálculo Comercial, pues no se publica ninguna con esta especialidad, sino que tratan estas cuestiones las principales revistas de Contabilidad, que citamos al final de las obras generales, o bien las de técnica especial que se indican en los respectivos grupos de la Bibliografía.

En las obras que han alcanzado varias ediciones indicamos la fecha de la última de que tenemos conocimiento; por ésto aparecerán con fechas más modernas que en nuestra primera edición muchas de las que entonces citábamos.

I.—OBRAS GENERALES DE CÁLCULO

J. Angulo y Morales.—Tratado de Aritmética y Cálculos Mercantiles, Tomo II. Madrid, 1895.

L. de la Fuente—Elementos de Cálculo Mercantil. Barcelona.

B. García Galdácano. —Cálculos Mercantiles. Bilbao.

L. Martorell.—Tratado práctico de Cálculo Mercantil. Barcelona.

L. Victor Paret.— Vademecum de Cálculos mercantiles. Madrid

M. Traval y Roset.—Nociones de Comercio y de Cálculo Mercantil. Barcelona, 1910.

A. Heller.—Cálculos Mercantiles; y Aritmética Comercial. Buenos Aires.

V. Escolar y C. Angulo.—Cálculo mercantil elemental. Madrid, 1910.

M. Monteverde.—Operaciones Comerciales. Cálculo Mercantil. Montevideo, 1919.

M. Angulo y Lluis.—Cálculo Comercial. Madrid, 1916.

M. Bofill.—Cálculo Mercantil. Barcelona.

F. Castaños.—Guía manual del Comercio y de la Banca. Madrid, 1901.

E. Fernández Laguilhoat.—Aritmética mercantil. Madrid, 1896.

J. Busquets.—Cálculo Comercial. Barcelona, 1925.

P. Gasco.—Cálculos Mercantiles. Madrid, 1919.
J. de Lecea —Cálculo Comercial. Barcelona.
H. Floriani.—Enciclopedia Comercial Científica. Buenos Aires, 1924.
M. Potel.—Enciclopedia Comercial. El Comerciante Moderno. Barcelona.
M. Lorenzo Alfu y M. Sánchez Jiménez.—Cálculos Mercantiles. Madrid, 1906.
M. Torrents y Monner.—Cálculo Mercantil. Barcelona, 1901.
E. Mata Rumayor.—Tratado elemental de un curso de Cálculo Comercial. Santander, 1925.
J. Rogina.—Cálculos mercantiles. La Coruña, 1907.
A. Cots.—Manual práctico de cálculos abreviados. Barcelona.
E. Martínez Pérez.—Cálculos Mercantiles. Madrid.
E. Rodero de la Calle.—Cálculos Mercantiles y Operaciones de Banca. Madrid, 1889.
J. Zarraluqui.—Operaciones Financieras, 1.ª parte. Operaciones a corto plazo. Madrid, 1924.
Luís Viegas.—Tratado de Cálculo Comercial. Lisboa, 1929. (g. M.)
A. Carreira e J. Carreira.—Cálculo Comercial teórico e pratico. Lisboa, 1920.
F. D'Auria.—Mathematica Commercial, Vol. IX del Curso de Contabilidade. Sao Paulo (Brasil).
C. de Carvalho.—Arithmetica Commercial e Financeira. Sao Paulo.
J. Carneiro.—Arithmetica Comercial. Río de Janeiro, 1921.
Th. Klompers & E. Fagnart.—Traité d'Aritmétique Commerciale. Amberes, 1921.
P. Philippe.—Eléments d'Arithmétique Commerciale. París, 1930.
C. Biémont.—Manuel d'Arithmétique commerciale. París, 1921.
A. J. Barbier.—Arithmétique Commerciale. Ginebra, 1928.
Ch. Plomion.—Aritmétique Commerciale et calculs financiers élémentaires. París, 1927.
A. Brasilier.—Arithmétique commerciale. París, 1906.
G. Faure.—Commerce et Calculs commerciaux, Vol I. París, 1910.
J. Patou.—Traité Mathématique et pratique des Opérations commerciales et financières, Vol I. París, 1922.
H. Fuzet et L. Reclus.—Précis de Mathématiques commerciales et financières. París, 1921. (g.)
Ch. Lejeune.—Les Calculs Commerciaux et Financiers. París, (g).
Pigier.—Aritmétique Commerciale. París.
N. Rigo.—Aritmétique commerciale et financière. Lieja, 1920.
J. Garnier.—Traité complet d'Aritmétique. París, 1912.
E. Degranges.—Aritmétique commerciale et pratique. París, 1910.
A. Bovyn et E. Buisseret.—Manuel d'Aritmétique commerciale. Bruselas, 1922.
L. Daubresse.—Bibliothèque encyclopédique des Sciences commerciales. Mons.
Varios.—Encyclopédie du Commerce, de l'Industrie et de la Finance. París.
J. Marchal.—Les calculs de la Banque et du Commerce. París.
L. Chalon.—Arithmétique commerciale. Bruselas, 1926.

C. Dompé.—Manuale del Ragioniere. Milán, 1926.
G. Marchesini. – La Contabilità applicata al Commercio ed alla Banca. Vol I. Computisteria commerciale e bancaria. Turín, 1920.
R. La Barbera.—Manuale di Computisteria. Milán, 1925.
A. Arani.—Computisteria e Calcolo mercantile. Roma, 1930.
L. Sibarini.—Lezioni di matematica generale e financiaria. Roma, 1930.
S. Spinedi.—Manuale di Computisteria. Turín, 1930.
A. Uberti Bona.—Corso di Computisteria. Turín, 1930.
A. Ceccherelli.—Computisteria. Milán, 1929.
B. Lorusso.—Calcoli e documenti commerciali. Laterza, 1928.
G Juzzolino.—Lezioni di Computisteria. Isola Liri, 1929.
G. Cova.—Lezioni di Computisteria. Milán, 1930.
— .—Ripetitorio di Computisteria. Livorno, 1917.
S. Serafini.—Manuale pratico di Computisteria. Roma, 1929.
F. Leardini.—Calcolo mercantile e bancario. Bellinzona, 1906.
E. Tosetti.—Aritmetica commerciale e bancaria. Catania, 1909.
C. Bagliano. Calcolo Commerciale e Bancario. Milán. 1921 (g.)
S. Zani.—Trattato di Computisteria. Milán, 1902.
L. Brasca.—La Misura della ricchezza. Florencia, 1915. (g.)
C. Bellini.—600 temi di Computisteria e Ragioneria. Milán, 1927.
V. Gitti.—Computisteria commerciale. Milán, 1930.
G. Massa.—Trattato completo di Ragioneria. Vol. I. Aritmetica Applicata. Milán, 1912.
M. Perlmutter.—Lezioni di Computisteria. Pádua, 1922.
G. Zappa.—Calcolo Commerciale. Pádua, 1921.
A. Salvatori.—Enciclopedia di Amministrazione, Ragioneria e Commercio. Milán, 1929.
E. Sperotti.—La Computisteria. Florencia.
U. Monetti.—Temi Svolti di Computisteria. Roma, 1930.
F. Jackson.—Commercial Arithmetic. Londres, 1914.
W. Grant and E. Hill.—Commercial Arithmetic. Londres.
I. T. Plant.—Business Arithmetic. Londres, 1929.
H. Watson. Practical Commercial Arithmetic. Londres, 1930, (g.)
P. W. Norris.—The Principles and Practice of Commercial Arithmetic. Londres, 1926.
F. Heywood.—Business Man's Encyclopaedia and Dictionary of Commerce. Londres, 1925.
H. P. Green.—Pitman's Complete Mercantile Arithmetic. Londres, 1928.
F. Heelis.—Business Calculations. Londres, 1925.
G. K. Bucknall.—Rapid Methods in Arithmetic. Londres, 1921.
R. W. Gibbs.—Rapid Business Arithmetic. Londres, 1925.
W. Vernon Lovitt and H. F. Holtzclaw,—Mathematics of Business. Londres, 1928.
H. W. Houghton.—Rational Arithmetic for Commercial Students. Londres, 1930, (g.)
L. H. L. Davies and E. G. H. Habakkuk.- Commercial Mathematics. Londres, 1927.

H. Oliver and Boyd.—Commercial Arithmetic. Londres, 1921.
R. S. Osborne.—Commercial Calculations. Londres, 1930.
D. Murray.—Chapters in the History of Bookkeeping. Accountancy & Commercial Arithmetic. Glasgow, 1930.
Th. G. Ackland and G. F. Hardy.—Graduated Exercises and examples interest. Londres, 1919.
E. I. Edgerton and W. E. Bartolomew.—Business Mathematics. Nueva York, 1922.
L. P. Alford.—Management's Handbook. Nueva York, 1925, (g.)
H. M. Spandau —Mathematics of Finance. Nueva York, 1925.
E. R. Vinal.—Mathematics for the Accountant. Boston, 1925.
R. H. Montgomery.—Financial Handbook. Nueva York, 1927, (g.)
G. P. Lord.—Rational Arithmetic. Toronto, 1921.
C. E Birch.—Applied Business Calculation. Toronto, 1926.
E. A. Saliers.—Accountants Handbook. Nueva York, 1928, (g.)
S. Walton and H. A. Finney.—Mathematics of Accounting and Finance. Nueva York, 1921.
B. Kaempfe und P. Prater.—Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. Berlín, 1927.
R. Just.—Kaufmännischen Rechnen. Berlín, 1921.
E. Foerster.—Politische Arithmetik. Berlín, 1924.
O. Mantzke und H. Micha.—Kaufmännisches Rechnen. Leipzig, 1925. (g.)
A. Schlimbach.—Politische Arithmetik. Berlín, 1902.
A. Micha.—Die Algebra in Dienste der kaufmännisches Rechnen. Leipzig 1920 (g.)
N. Czkella.—Kaufmännisches Rechnen. Berlín, 1929. (g.)
W. Kalveram.—Die Algebra in Dienste der kaufmännisches Rechnen. Berlín, 1921. (g.)
A. Kreibig und R. Kunczitzky.—Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik für höhere Handelsschulen. Viena, 1927. (g.)
C. Eckstein.—Handwörterbuch des Kaufmanns, Frankfort, 1928.
A. R. Kamnitz.—Kaufmännisches Rechnen. Stuttgart, 1925.
F. S. Holzinger.—Politische Arithemetik. Berlín, 1902.
R. Fuchs.—Wissenschaft und Praxis des Kaufmanns. Berlín, 1926.
O. Matzke.—Methodik des kaufmännischen Rechnen. Leipzig, 1927.
F. Fronebberg und A. Strothbaum.—Aufgaben zum kaufmännischen Rechnen. Leipzig, 1929.
E. May.—Aufgaben zum Kaufmännischen Rechnen. Leipzig, 1929.
E. Teich.—Betriebswirtschafitliche Rechnungsführung. Leipzig, 1912.
O. Frei.—Die Technick der Betriebsrechnung. Berlín, 1928.
M. Löwes.—Aufgaben zum kaufmännischen Rechnen. Berlín, 1928 (g).
G. Obst.—Das Buch des Kaufmanns. Stutigart, 1920.
L. Schaer.—Rechnen kaufmännisches. Berlín, 1920.
M. Busse.—Kaufmännisches Rechnen. Berlín, 1922. (g).
D. Haek (Schlössing).—Rechnen kaufmännisches. Berlín, 1904.
O. Weber und A. Schwotzer.—Kaufmännisches Rechnen für Praxis, Berlin, 1928. (g).

K. Bott.—Handwörterbuch des Kaufmanns. Hamburgo, 1925.
A. van Ketel en L. van Horssen.—Beginselen van het Handelsrekenen. Amsterdam, 1926.
M van Overeem.—Leerboek van het Handelsrekenen. Utrech, 1918.
J. Schuil.—Handelsrekenen. Amsterdam, 1922.
W. S »etekouw.—Handelsrekenen. Amsterdam, 1927. (g).
J. Bouman.—Handelsrekenen. Amsterdam, 1929.

II.—OBRAS GENERALES DE TECNICA

Contienen esta materia como parte especial todas las de carácter enciclopédico citadas en el grupo anterior.

F. Pérez Pons.—Elementos de Técnica Comercial. Bilbao.
R. Cavanna.—Prácticas Mercantiles. Madrid.
P. Clerget.—La Técnica de los negocios. Barcelona, 1930.
J. H Haendel.—La Pratique commerciale. París, 1911.
J. Coudray et L. Maure.—Eléments de Commerce. París, 1923.
L. Chambonnaud.—La technique des affaires. París, 1925.
Pigier.—Notions generales de Commerce. Commerce appliqué. París,
G. Lemercier.—Commerce. París, 1916.
A. Dany. - Manuel des opérations commerciales. París, 1921.
L. Laurent-Deschesne.—Economie Commerciale. París, 1925.
E. Rollin.—Traité de Commerce. París, 1923.
E. Segaud.—Manuel du commerçant. París, 1908.
S. Serafini. - Tecnica mercantile e tecnica commercia'e. Roma, 1930.
F. Gnocchi e V. Mazzantini.—Tecnica mercantile. Milán, 1924.
U. Parone.—Tecnica mercantile. Turín, 1920.
N. Garrone.—La Scienza del Commercio. Milán, 1925.
P. Rigobon.—Tecnica del Commerci. Pádua, 1920.
E. Vita. - Principi di Economia Commerciale. Turín, 1923.
M. Perlmutter. - Tecnica mercantile. Pádua, 1926.
G. Trespioli.—Tecnica mercantile. Milán, 1907.
E. Castelnuovo.—Manuale di istituzioni commerciali. Milán, 1908.
G. Arias.—Principi di Economia Commerciale. Turín, 1912.
D. Saponaro.—Trattato teorico pratico di tecnica mercantile, Milán, 1922.
E. Marchetti.—Tecnica Commerciale. Roma, 1927.
G. B. Valentini.—Trattato delle operazioni di commercio, finanza e previdenza. Milán, 1922.
G. Corsani.—Il contenuto della Tecnica commerciale. Florencia, 1925.
T. Beach and D. H. Smith.—Business economics. Londres, 1929.
H. Secrist and J. A. Folse.—Margins, Expenses, and Profits. Harvard, 1928.
Ch. W. Gestenberg. -Principles of Business. Londres, 1924.
J. Stephenson.—Principles and Practice of Commerce. Londres, 1926.
J. Stephenson.—Principles of Business. Londres, 1924.
J. Hammond.—Questions and Answers on Business Practice. Londres, 1927.
F. Heywood.—Elements of Commerce. Londres, 1922.
F. Heelis.—Theory and Practice of Commerce. Londres, 1921.
C. A. Hague.—Practical treatise of banking and commerce. Nueva York, 1909.

A. W. Shaw.—The Library of business practice. Nueva York.
H. P. Dutton.—Business Organisation and Management. Chicago, 1926.
L. C. Marshall.—Business Administration. Chicago, 1921.
G. A. Hague.—Practical treatise of Banking and Commerce. Nueva York, 1909.
E. Walb.—Kaufmännische Betriebswirtschaftslehre. Leipzig, 1925.
J. F. Schaer.—Allgemeine Handelsbetriebslehre. Leipzig, 1925.
L. Werner.—Allgemeine Betriebswirtschaftslehre. Hamburgo, 1925.
G. Rost.—Betriebswirtschaftslehre. Stuttgart, 1926.
M. Rotschild.—Kaufmanns praxis. Berlín, 1924.
W. Lexis und K. Muhs.—Das Handelswesen. Leipzig, 1921.
W. Mahlberg.—Technik des Handels. Leipzig, 1926.
A. Pohlmeyer.—Handelsbetriebslehre. Berlín, 1929.
H. Krüer,—Geschäftskunde für den Kleinhandelsstand. Leipzig, 1912.
K. Kraessig.—Betriebswirtsschatlehre. Berlín, 1928.
F. Söllheim.—Kaufmännische Betriebslehre. Leipzig, 1927.
H. Nicklisch.—Allgemeine kaufmännischen Betriebslehre. Stuttgart, 1921.
M. R. Lehmann.—Allgemeine Betriebswirtschaftslehre. Leipzig, 1928.
A. Isaac.—Betriebswirtschaftslehre und Wirtschaftspraxis. Nuremberg, 1928.
K. Mellerowicz.—Allgemeine Betriebswirtschaftslehre der Unternehmung. Berlín, 1929.
A. Graf.—Kaufmænnische Betriebswirtschaftslehre. Basilea, 1927.

III. PRINCIPALES REVISTAS

Administración y Contabilidad.—Atocha, 33. Madrid.
Exito.—Puerta del Angel, 7. Barcelona.
Actividad.—Rosellón, 148. Barcelona.
Contabilidad y Finanzas.—Apartado, 2552. Habana.
Revista de Contabilidad.—Avenida de Mayo, 811. Buenos Aires.
Mon Bureau.—186, Faubourg St. Martin. París.
Experta.—71, Rue Desnuettes. París.
La Comptabilité et les Affaires.—22, Rue de l'Arcade. París.
La Revue Belge des Sciences Commerciales.—Rue Léopold, 29. Bruselas.
Revue Pratique des Questions Commerciales et Economiques.—Passage Lemonnier, 7. Lieja.
Le Commerce.—55, Rue de Rivoli. París.
La Vie au Bureau.—43-45, Rue Lesbroussart. Bruselas.
Revue Suisse des Sciences Commerciales. Schweizerische Handelswissenschaftliche Zeitschrift.—Fischmarkt, 1. Basilea.
Mensario Brasileiro de Contabilidade.—Rua do Rosario, 149. Río de Janeiro.
Revista Brasileira de Contabilidade.—Avenida Río Branco, 47. Río de Janeiro.
Rivista Italiana di Ragioneria.—Via delle Isole, 30. Roma.
Rivista di Ragioneria e Studi Affini.—Via R. Marin, 7. Pádua.
L'Organizzazione.—Viale Giulio Cesare, 47. Roma.
Rivista di Economia Aziendale.—Via Bottrigari, 28. Bolonia.
Mercurio.—Via Alfieri, 5. Turín.
The Accountant in Australia.—440, Litle Collins Streets. Melbourne.

The Magazine of Business. - Cass, Huron & Erie Streets. Chicago.
The Accountants' Journal. - 6 Kirby Street. Londres.
The Journal of Accountancy. - 135. Cedar Street. Nueva York.
System. Modern Business.—520, North Michigan Avenue. Chicago.
The American Accountant.—225, Broadway. Nueva York.
Zeitschrift für Handelswissenschaftliche Forschung. — Liebigstrasse, 16. Le pzig.
Zeitschrift für Betriebswirtschaft. — Genthiner Strasse, 42. Berlín.
Zeitschrift für Wirtschaftswissenschaft und kaufmännische Praxis. —Beilagasse, 32. Aussig an der Elbe.
Das Betriebswirtschaftliche Schrifttung.—Schiffbauerdamm 19. Berlín.
Die Betriebswirtschcft.—Calwerstrasse 18. Stuttgart.
Annalen der Betriebswirtschaft.—Tristanstrasse 19. Berlín.
Accountancy.—Muntplein, 2. Amsterdam.
Maandblad voor het Boekhouden.—Obrechtstraat 512. Den Haag (Holanda).
Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde. — Purmerend. Tesselschadestraat 15 Amsterdam.
De Bedrijfseconoom.—Marnixstraat 413. Amsterdam.
Revista Generalà de Comert si Contabilitate.—Strada Teilor, 12. Bucarest.

IV.—CÁLCULO GRÁFICO

Pueden ser consultadas todas los obras de Geometría analítica, pero aquí citamos las que estudian bajo el aspecto especial de aplicación a la matemática comercial. Las obras que contienen estudios de cálculo gráfico en alguno de sus capítulos llevan una (g) al final de la cita.

F. Ruiz Feduchy.—Manual del Actuario. Madrid, 1919.
G. Pesci. - Sobre nomografía elemental. Zaragoza, 1905.
M. Fréchet et H. Roullet.—Nomographie. París, 1928.
M. Kraichik. —Nouvelles tables graphiques financières. París, 1927.
R. Damien.—Etude mathématique et graphique des opérations financières.— París, 1930.
M. d'Ocagne.—Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. París, 1928. - Calcul graphique et Nomographie. París, 1924.
E. Gau.—Calculs numériques et graphiques. París, 1925.
F. Aynés.—Nouvelles applications des méthodes graphiques à l'étude des opérations financières, París, 1904.
R. K. Hezlet.—Nomography or the graphic représentation of formule. Londres, 1919.
W. C. Brinton.—Graphical Methods for presenting Facts. Nueva York, 1925.
C. Runge.—Graphical méthods. Nueva York, 1912.
F. della Penna. - I diagrammi cartesiani per l'Interesse e lo sconto.—I diagrammi polari per l'interesse semplice e lo sconto razionale, Turín, 1914.
L. Brasca. - Stenaritmia Commerciale. Milán, 1922.
F. Insolera.—Elementi di Matematica Finanziaria. Turín, 1916. —Corso di Matematica Finanziaria. Turín, 1923.—Sulla Geometria delle operazioni di Borsa. Turín, 1921.
F. Besta. - La Ragioneria, Vol. II. Milán, 1912.
L. Amoroso. —Matematica Finanziaria. Nápoles, 1921.

H. Furle.—Rechenblätter. Berlin, 1902.
P. B. Fischer.—Koordinatensysteme. Leipzig, 1919.
Th. Nonne.—Zinseszinsberechnung mit Hilfe graphischer Darstellung zum praktischen Gebrauch. Frankfort a. M. 1905.
P. Werkmeister.—Praktisches Zahlenrechnen. Leipzig, 1920.

V.—CÁLCULO MECÁNICO

Las citas de Regla de cálculo hacen especial mención a las aplicaciones mercantiles.

A. Nestler.—Instruction pour l'emploi des Règles a Calcul pour le Commerce. Baden, 1930.
M. d'Ocagne.—Vue d'ensemble sur les Machines à Calculer. París, 1922 = Le Calcul simplifié. París, 1928.
L. Jacob.—Le Calcul Mécanique. París, 1911.
J. Wilbois y varios.—Études d'Organisation Commerciale. París, 1921.
A. Navarre.—Manuel d'Organisation du Bureau París, 1924.
G. Ravisse.—La Technique du Travail de Bureau. París, 1928.
Varios.—Les machines à calculer. Núm. de octubre de 1920 del Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, París.
F. Maurice.—Méthode d'Arithmographie. París, 1920.
E. Rice.—La machine à calculer. Bruselas, 1927.
G. Cassinis.—Calcoli numerici e meccanici. Pisa, 1928.
G. Pirozzi.—Il regolo calcolatore Uso pratico. Livorna, 1928.
N. Boldroni.—Macchine colcolatrici. Roma, 1925.
A. Zugaro.—Corso di calcolo meccanico. Roma, 1927.
W. Desborough.—Office machines appliances and methods. Londres, 1921.
L. R. Dicksee.—Office Machinery & Appliances. Londres, 1918.
W. H. Leffingwell.—The Office Appliances Manual. Nueva York, 1926 = Office Management. Chicago 1925, (Los dos estudian Regla de cálculo.)
R. M. Shireby.—The Slide Rule Applied to Commercial Calculations. Londres, 1925.
C. N. Pickworth.—The Slide Rule. Londres, 1922.
G. Wood.—Calculating Machines. Londres, 1927.
L. J. Comrie.—Computing by Calculating Machines. Londres, 1928.
J. Carneiro.—Tratado Pratico de Machinas de Calcular. Río de Janeiro, 1921.
Illustriertes Büromaschinen Dauerlexikon in Kartothekform. Berlín, 1928.
K. Lenz.—Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Leipzig, 1915.
Fr. A. Willers.—Mathematische Instrumente. Berlín, 1922.
A. Nestler.—Der logarithmische Rechenschrieber und sein Gebrauch. Berlín, 1927.
La Revue du Bureau.—97, rue de la Bourdonnais. París.
Mon Bureau.—186, Faubourg Saint-Martin. París.
L' Organizzazione.—Via T. Grossi, 7. Milán.
Das System. Mauerstrasse 44. Berlín.
Organisation Betrieb-Büro.—Leipziger Strasse 115. Berlín.
Das Neue Bureau.—Václavské nám 55. Praga.

VI.—METROLOGÍA

C. de Horta.—La moneda y los sistemas monetarios de todas las naciones,

Habana, 1908.—Tratado de Metrología Universal. Barcelona.
G. Rodríguez.—Las pesas y medidas del mundo. Habana, 1922.
I. E. Stephen Naft.—Equivalentes de conversiones en el Comercio Internacional. Filadelfia, 1931.
E. Audugé. - Dictionaire des Monnaies. París, 1926 y apéndices anuales.
L. Cordoin.—Reduction des bois carrés et des bois en grumes. Bruselas, 1929.
A. Tacchini.—La metrologia universale. Milán.
S. E. de Falco.—Sistemi monetari moderni. Roma, 1929.
I. Ghersi.—Monete, pesi e misure inglesi. Milán, 1915.
L. C. Bleibtreu.—Handbuch der Münz, Maas, Gewichts, und Usanzenkunde. Stuttgart, 1911.

VII.—INTERÉS Y DESCUENTO

Para la teoría general son convenientes todas las obras de Cálculo Financiero, que no citamos por su gran extensión bibliográfica y porque atienden principalmente al interés compuesto, poniendo sólo las obras que son útiles para las materias que comprende nuestra obra.

Para las aplicaciones de la teoría del interés a las cuestiones comerciales la nota bibliográfica especial comprendería todas las obras que ya citamos en el primer grupo como de Cálculo en general.

A. Barriol.—Teoría y práctica de las operaciones financieras. Barcelona, 1929 (edición original en francés, París, 1925).
E. Lombard. - Calculs des intérêts par les méthodes rapides employés en Banque. Marsella.
J. Thoyer.—Les calculs d'intérêts réduits à l'adition. París, 1841.
L. Pré.—Méthode rapide pour le calcul des intérêts simples. París, 1919.
R. Miry.—Traité théorique et pratique de l'intérêt simple. Gante, 1924.
E. Luchini.—La calcolazione razionale degli interessi. Turín.
G. Zigoli.—La determinazione rapida dell interesse complessivo di molte capitale. Nápoles, 1922.
G. Pagliero. - Come si risolvono i problemi d'interesse. Turín, 1912.
I. Fisher.—The rate of interest. Nueva York, 1908.—The theory of interest. Nueva York, 1930.
W. M. Werker.—Zinsen-und Disconto-Rechnung. Munich, 1905.

VIII.—CUENTAS CORRIENTES

F. Campos.—Método de progresiones para liquidar cuentas corrientes con interés. Madrid, 1907.
V. Escolar.—Sinopsis de Contabilidad analítica. Madrid, 1915.
L. Batardón. - Cuentas corrientes con interés. Barcelona.
J. M. Franco.—La cuenta corriente. Buenos Aires, 1920.
M. C Henry.—Traité spécial des comptes courants et d'intérêts. Lión, 1900.
P. L. Martineau.—Cours de comptes courants à intérêts. París, 1921.
A. J. Barbier.—Comptes Courants. Ginebra, 1928.
E. Masset.—Comptes Courants. Bruselas.
Pigier.—Etude analitique sur les comptes courants et d'intérêts. París.
A. Monlout-Robert et H. Barnoud.—Les comptes courants. París, 1929.
L. Daubresse.—Comptes courants et d'intérêts. Mons.

J. VAN DICK.—Nouveau procedé pour le calcul d'intérêts en compte courant. Bruselas, 1930.
A. VERNET.—Etude théorique et pratique des Comptes courants et d'intérêts. París, 1911.
C. THIRY.—Traité théorique et pratique des comptes courants et d'intérêts. Gante, 1925.
H. BOINEM et J. FISCHER.—Comptes Courants et d'intérêts. Lieja, 1924.
L. DE MINICO.—Conto corrente a due monete. Roma, 1922.
V. ALFIERI.—Gli errori nello appuramento dei conti correnti a interesse. Turín, 1891.
T. BAGNI.—Sull'appuramento dei conti correnti a saggio costante. Roma, 1922.
E. BETTINI.—I Conti Correnti, Génova, 1910.—Esercitazioni di Ragioneria. Conti Correnti. Pádua, 1922.
G. CARDONE.—Conti correnti a tasso reciproco oscillante. Pádua, 1927.
G. ZIGOLI.—Contributo alla teoria matematica del conto corrente. Roma, 1910.
A. MARTINI ZUCCAGNI.—Teoria matematica del conto corrente. Liorna, 1909.
R. B. DE BRITO PEREIRA.—A Contabilidade da Conta Corrente. Río Janeiro, 1929.
J. OBERBACH.—Das Zinskontokorrent. Leipzig, 1924.
B. GROSZMANN.—Anleitung zur Zinsenberechnung in Konto-Korrenten. Berlín, 1904.
M. LEVY.—Der Konto-Korrentvertrag. Friburgo, 1898.
S. BUFF.—Das Kontokorrentgeschäft und seine Technik. Stuttgart, 1904.
A. NEUSTAETTER.—Kontokorrenten-Bedringungen der Banken. Stuttgart, 1921.
J. A. W. VAN KLUYVE.—De Rekening-Courant. Amsterdam. 1921.
A. B. A. VAN KETEL en L. VAN HORSEN.—De Rekening Courant. Den Haag, 1924.

Pueden ser también muy útiles los buenos tratados de Contabilidad.

IX.—OPERACIONES BANCARIAS, MONEDA Y CAMBIOS

Ver las revistas especiales al final del grupo.

A. FUENTES y E. GUTIÉRREZ.—Operaciones y Contabilidad bancarias. Madrid, 1924.
A. BARRIOL.—Teoría y práctica de los operaciones financieras. Barcelona, 1929 (edición en francés París, 1925).
G. H. LESTARD.—Práctica bancaria. Buenos Aires, 1925.
J. MENÉNDEZ.—La Banca moderna. Madrid, 1925.
W LEXIS.—El Crédito y la Banca. Barcelona, 1927.
P. VERZIER y J. REVOLTÓS.—Manual práctico de Operaciones de banca. Barcelona, 1928.
G. LLOVERA.—Organización bancaria. Cartera de Efectos comerciales. Lérida, 1930.
R. ASENSIO BOURGÓN.—Cálculo mercantil. Operaciones de Cambio. Madrid, 1901.
M. MELIOT.—La monnaie, le change et l'arbitrage. París, 1908.
PIGIER.—Opérations de Banque et de Bourse. París.
J. ROUTE.—Opérations et travaux de Banque. París, 1911.
J. DE VILLEFAGNE.—Manuel pratique du change des monnaies. París, 1921.
L. FRANÇOIS et H. HENRY.—Traité des Opérations de Change, Bourse, Banque. Bruselas, 1929.

H. Montarnal.—Manuel des opérations commerciales et financières de Banque et de Bourse. París, 1925.
C. Sicre.—L'escompte des effets de commerce. París, 1914.
C. Geoffroy et N. Semar.—Manuel de Banque. París, 1928.
H. Terrel et H. Lejeune.—Traité des opérations commerciales de banque. París, 1929.
F. Marsal.—Encyclopedie de Banque et de Bourse. Bruselas, 1928.
Varios.—La Banque et ses services (enciclopedia de Banca y Bolsa de la revista Banque). París, 1931.
J. G. Courcelle Seneuil.—Traité théorique et pratique des opérations de banque. París, 1922.
G. Faure.—Simples notions sur les changes étrangers. París 1926.
H. Vannier.—Traité des changes et des arbitrages. París
J. Brixy et E Buisseret.—Opérations de change et arbitrages. Bruselas, 1926.
M. A. Melliot.—La monnaie, le change, l'arbitrage, le crédit. París, 1911.
C. Thiry.—Traité juridique et mathématique des opérations de banque. Gante.
R. Miry.—Traité théorique et pratique des opérations de banque. Gante, 1928.
Ch. Lejeune.—Traité des opérations de Banque Bourse et Change. París, 1925.
Ch. Conant.—Monnaies et Banques. París, 1908.
H. Deschamps.—Précis d'un cours de banque. París, 1926.
F. J. Combat.—Banques et opérations de Banque. París, 1921.=Les effets de commerce. París, 1920.
L. Herbelot et G. François.—Les monnaies, les changes et les arbitrages. París, 1921.
L. François et N. Henry.—Traité des opérations de change, bourse, banque París, 1928.
H. Dufayel.—Agenda Dunod Banque. París, ediciones anuales.
F. Cabarias.—Traité de Banque. París, 1924.
L. Daubresse.—Opérations de Banque Mons.=Changes et Arbitrages. Mons.
H. Poittevin.—Théorie des changes, arbitrages et parités. París, 1920.
J. Lockhart.—Le marché des changes de París. Technique des opérations. París, 1928.
V. Richard.—Traité élémentaire des opérations de banque. París.
A. Ruggiero.—La Banca e la Borsa. Foligno, 1922.
G. U. Papi.—Lezioni di Scienza bancaria. Mesina, 1929.
S. Serafini.—La tecnica bancaria. Roma, 1930.
B. Artom.—La Banca e la Borsa. Génova, 1914.
M. Reveta.—La pratica bancaria. Parma, 1927.
G. Solito de Solis.—Scienza bancaria. Nápoles, 1929.
G. Mortillaro.—Lezioni di tecnica bancaria. Trieste, 1927.
M. Mazzantini.—Struttura e funcionamento di una banca di credito ordinario. Spoleto, 1927.
G. Zippel.—La Tecnica dei Cambi steri. Milán, 1926.
G. Monzali.—Manuale pratico di tecnica bancaria. Ancona, 1927.
A. Betti e F. J. Weber.—Trattato di Banca e di Borsa. Milán, 1922.
P. D'Angelo.—Trattato di Tecnica Bancaria. Milán, 1921.

V. Angeloni.=Lo sconto. Milán, 1919.
T. Bagni.—Operazioni di cambio traiettizio estero. Roma, 1922.
L. Simonazzi.—Il cambio e le sue leggi. Milán, 1925.
G. Suatoni.—Portafoglio estero e cambi. Roma, 1930.
M. Azelio Sapori.—Il Portafoglio Italia in una grande banca. Roma, 1925.
N. Garrone.—Tecnica bancaria e di borsa. Milán, 1925.
F. A. Martins.—Câmbios. Lisboa, 1921.
L. Willis and G. Edwards.—Banking and Business. Nueva York, 1922.
R. Escher.—Elements of foreing exchange. A Foreing exchange prime. Nueva York, 1910.
L. H. Lagston.—Practical Bank Operation. Nueva York, 1921.
D. K. Russell.—Principles of Money and Banking. Chicago, 1927.
G. Clare and N. Crump.—A. B. C. of Foreing Exchanges. Londres, 1927.
J. F. G. Bagshaw.—Practical Banking. Londres, 1928.
L. Le Marchant Minty.—English Banking Methods. Londres, 1927.
G. Armitage-Smith.—The London Money Market. Londres, 1924.
H. G. Brown.—Foreing Exchange. Nueva York, 1924.
E. L. Stewart.—Foreing Exchange Arithmetic, Londres, 1926 (g).
H. W. Phillips.—Modern Foreing exchange and modern Banking. Londres, 1926.
R. D. Kilborne.—Principles of Money and Banking. Chicago, 1927.
H. W. Greengrass.—The Discount Market in London. Londres, 1920.
W. H. Kniffin.—Commercial Banking. Nueva York, 1928.
T. S. Evelyn.—Principles of Banking. Londres, 1927. = Banking and Exchange. Londres, 1928. = The principles and Arithmetic of Foreing Exchanges. Londres, 1927.
R. B. Westerfield.—Banking principles and practice. Nueva York, 1926.
W. F. Spalding.—Foreing Exchanges and Foreing Bills in theory and in practice. Londres, 1925.
L. Minty.—English Banking Methods. Londres, 1924.
H. T. Easton.—Money, Exchange and Banking. Londres, 1925.
J. W. Gilbart.—The history, principles, and practice of banking. Londres, 1921.
B. Griffiss.—The New York call money market. Nueva York, 1925.
A. S. Bolles.—Practical Banking. Nueva York, 1920.
L. Macleod.—The theory and practice of Banking. Londres, 1922.
E. Spicer.—The Money market in relation to Trade and Commerce. Londres, 1926.
R. B. Westerfield and J. M. Chapman.—Problems in Banking, Money, and Credit. Nueva York, 1928.
O. Stillich.—Die Banken und ihre Geschäfte. Leipzig, 1924.
K. Eichenseer.—Technik des Bankbetriebes. Leipzig, 1925.
F. Cchær.—Die Bank in Dienste des Kaufmanns. Leipzig, 1922.
G. Obst.—Das Bankgeschäft. Stuttgart, 1926.
H. Hanisch und W. Prion.—Effekten und Verkehr in Effekten. Munich, 1921.
G. Kohlhauser.—Abrechnung-Erteilung in Bankbetriebe. Berlín, 1926.
J. Steinberg.—Die Praxis der Bank-und Börsenwessen. Berlín, 1922.

F. Leitner.—Das Bankgeschäft und seine Technik. Frankfort a. M., 1921.
W. Christians.—Rechnen in Bankgeschäft. Berlín, 1919.
R. Granich und Czerva.—Grundbegriffe des modernen Bank-und Börsenwesen. Viena, 1925.
G. Obst.—Geld-Bank-und Borsenwesen. Stuttgart, 1924.
B. Pfeifer.—Bankbetriebslehre. Leipzig, 1919.
Walb, Kalveram und Schmidt.—Kredit-und Zahlungverkehr. Leipzig, 1927.
B. Pfeifer.—Die Technik des Wechsel- und Scheckverkehrs. Leipzig, 1920.
M. Strauch.—Bankpraxis. Stuttgart, 1925.
B. Buchwald.—Die Technik des Bankgeschäftes. Berlín, 1912.
E. Nasse.—Die Bankdepotgeschäfte. Jena, 1909.
M. Wirt.—Handbuch des Bankwesens. Berlín, 1905.
O. Stillich.—Handbuch des Geld-Bank-und Börsenwesens. Leipzig. 1922.
Banque.—16 rue de la Sorbonne. París.
Minerva Bancaria.—Via Meravigli, 14. Milán.
Rivista Bancaria.—Via Meravigli, 14. Milán.
The Bankers' Maganize.—315, Broadway. Nueva York.
Journal of the Institute of Bankers.—Londres.
Die Bank.—Mansteinstrasse 9. Berlín.
Mitteilungen des Verbandes österreichischer Banken und Bankiers.—Rockhgasse, 4. Viena.
Zahlungsverkehr und Bankbetrieb.—Unterwasserstrasse, 8. Berlín.

X.—BOLSAS DE VALORES

Deben considerarse citadas aquí cuantas obras de Banca y Bolsa se han citado en el grupo anterior, y las revistas que anteceden.

J. M. Bertrand.—Operaciones de Bolsa. Barcelona.
G. Llovera.—Organización Bancaria. Departamento de Valores. Lérida, 1931, (g).
A. Barriol.—Teoría y práctica de las operaciones financieras. Traducción del francés. Barcelona, 1929.
N. Antoni.—Bolsas de Comercio. Tucumán, 1925.
D. Pinto Coelho.—Das Operações de Bôlsa a prazo e do Reporte. Oporto, 1921.
R. Ulrich.—Do Reporte. Da Bolsa e suas Operações. Lisboa.
T. Labhart.—Guide pratique por la Bourse de Londres. París, 1909.
J. Combat.—Manuel des opérations de Bourse. París, 1921.
A. Massebeuf.—Des marchés à primes dans les Bourses de valeurs. París, 1925.
A. Carabelli.—La Bourse et ses principes. París, 1926.
R. de Prelle de la Nieppe.—La Bourse. Amberes, 1929.—Le mécanisme des marchés à terme. Bruselas, 1927.
J. Lescure.—Le marché à terme de Bourse en Allemagne. París, 1908.
E. Guilmard.—Le marché libre et la Bourse de París. París, 1912.
H. Lefevre.—Traité des valeurs mobilièrs et des Opérations de Bourse. París, 1870.
S. R. Milles.—La grammaire de la Bourse. París. 1922.
A. Bouchere. Traité des valeurs mobiliers. París, 1890.—Traité théorique

et pratique des opérations de Bourse. París, 1902.
G. Chevilliard.—Le Stock Exchange. Les usages de la place de Londres. París, 1904.
E. Bonardi.—Borsa e valori publici. Milán, 1915.
A. De Pietri-Tonelli.—La Borsa. Milán, 1925.
A. Giannuzi.—Il diritto di opzione sulle azione di nuova emisione delle società anonime. Roma, 1920.
E Ginella.—Moderno trattato di Borsa. Milán, 1928.
A. Ruggiero.—La Borsa Valori. Aquila, 1929.
A. Riera.—I Valori Mobiliari. Roma, 1926.
F. Lucca.—Le operazioni di Borsa e le loro calcolazioni. Milán
L. Tronci.—Le operazioni e la materia di Borsa. Turín.
G. Pella.—Il Riporto su titoli. Turín, 1928.
Ch. A. Dice. -The Stock Market. Chicago, 1929.
E. Davies.—The Stock and Share Markets. Londres, 1926.
J. E. Day. - The Stockbroker's Office. Londres, 1925.
A. P. Poley.—The history, law, and practice of the Stock Exchange. Londres, 1922.
R. E. Badger. -Investment Principles and Practice. Londres, 1925.
J. E. Kirshaman.—Principles of Investments. Chicago, 1924.
F. Drew Bond.—Stock Movements and Speculation. Londres.
S. Huebner.—The Stock Market. Londres, 1921.
Stock Exchange Year Book. Londres, ediciones anuales.
L. Higgins.—The Put and Call. Londres, 1917.
F. W. Hirst.—The Stock Exchange. Investment and Speculation. Londres.
M. Simpkin. - Stock Exchange Investment. Londres, 1922.
J. E. Meeker.—The Work of the Stock Exchange. Nueva York, 1922.
A. M. Sakolski. Principles of Investment. Nueva York, 1923.
H. Rehm.—Börsengesetz. Leipzig, 1909.
M. Kühnel.—Rentabilitätsberechnung. Leipzig, 1925.
H. Sommerfeld.—Die Technik des Börsenmassigen Termingeschaft. Berlín, 1929.
F. Schmidt.—Die Effektenbörse und ihre Geschafte. Leipzig, 1922.—Die Amsterdamer Effektenbörse. Leipzig, 1921.
E. Back.—Die Aktien der Wiener Börse. Viena, 1931.
W. Prion.—Die Effektenbörse und ihre Geschafte. Berlín, 1930.
E. Ammenhauser.—Der Effekterminverkehrt an den deutschen Börsen. Berlín, 1929.
R. Wermert.—Börsengesetz und Börsengeschäfte. Berlín, 1905.
W. Lexis und K. Muhs.—Die Effektenbörse. Leipzig, 1925.
L. Bronzin —Theorie der Prämiengeschafte. Berlín, 1906.
R. Bilschowsky.—Ueber die Rechtliche Natur der Prämiengeschafte. Breslau, 1902.
M. Fürst.—Prämien, Stellage, Nochgeschäfte. Berlín, 1910.
J. Wachtel.—Prämien-Stellage und Nochgeschäfte, Viena, 1897.
Saling's Börsen-Papiere.—Berlín, Edic ones anuales.
L Brennikmeyer —Die Amsterdamer Effektenbörse. Berlín, 1920.

A. Nussbaum.—Die Börsengeschäfte. Berlín, 1918.
A. Schneider.—Führer durch Berliner Börse. Berlín, 1927.
F. von Reibnitz.—Die New Yorker Fondsbörse. Berlín, 1912.
O. Worms.—Die Frankfurter Börse. Berlín, 1919.
R. Granich.—Die Schweizerischen Effektenbörsen. Zurich, 1924.
W. Schwegler.—Die Prämien und Stellagegeschäfte an der Wiener Börse. Viena, 1924.
O. von Breuning.—Grundzüge der Börsenmoral. Friburgo, 1929.

XI.—BOLSAS DE MERCANCÍAS

F. González Palou.—Futuros de algodón. Barcelona.
E. Dépitre.—Les Caisses de liquidation des opérations à terme sur marchandises. París, 1907.
L. Austry.—Les marchés à terme de Bourse sur marchandises. París, 1925.
E. Champion.—Manuel pratique des affaires à terme en marchandises. París, 1912.
J. Bessiere.—Les marchés à terme sur marchandises. Montpellier, 1921.
R. di Benedetto.—Le operazioni a termine sulle merci. Milán, 1929.
L. Reggianini. Le operazioni a termine sulle merci. Turín, 1925.
W. H. Hubbard.—Cotton and the cotton market. Londres, 1921.
E. Student.—Der Warenterminhandel an den internationalen Weltbörsen. Leipzig, 1929.
A. Hilbrink.—Die Warenbörse. Leipzig, 1911.
H. Blumenthal.—Die Berliner Produktenbörse. Leipzig, 1928.

XII.—COMERCIO DE MERCADERÍAS

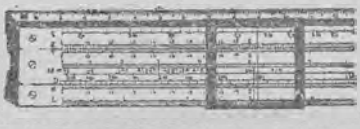
R. Serra y Pagés.—La técnica del comercio de mercancías. Barcelona, 1914.
J. Eeckels et P. Beniest.—Technique générale des affaires en marchandises. Anveres, 1925.
G. Cerfberr de Médelsheim.—Leçons de pratique commerciale et industrielle. París, 1920.
L. Daubresse.—Calculs et documents commerciaux. = Tecnique de l'exportation. Mons.
Agenda Dunod Commerce.—París, ediciones anuales.
G. Mandillo.—La Fattura. Roma, 1925.
G. Corsani.—Tecnica dei commerci d'oltre mare. Venecia, 1925.
U. Caprara.—Le negoziazioni caratteristiche dei vasti mercati. Milán, 1926. Il commercio del grano. Milán, 1928.
H. G. Brown.—International Trade. Nueva York, 1920. = The Principles of commerce. Nueva York, 1921.
F. Heywood.—Elements of Commerce. Londres, 1926.
M. Kay.—Commercial Invoicing. Londres, 1921,
J. Dunnage.—The Importer's Handbook. Londres, 1918.
B. Schofield.—Commercial Practice. Londres.
M. T. Copelland.—Principles of Marketing. Nueva York, 1921. = Principles of Merchandising. Chicago, 1924.
Th. N. Beckman.—Wholesaling. Nueva York, 1927.
C. A. Thewalt.—Betriebskalkulation im Warengeschäft. Leipzig, 1911.
W. Lexis und K. Muhs.—Der Warenhandel. Leipzig, 1925.

A. Beythien und E. Dressler.—Mercks Waren Lexikon. Leipzig, 1924.
H. Grossmann.—Hanbuch für Kaufleute. Berlín, 1927.

XIII.—ARBITRAJES

Comprenden estudio especial de esta materia todas las monografías citadas sobre cambios y arbitrajes en el apartado IX.

P. H. Deutsch.—Arbitrage in Bullion, Coins, Bills, Stocks, Shares, and Options. Londres.
O. Swoboda.—Arbitrage in Wertpapieren, Wechseln, Münzen und Edelmetallen. Berlín, 1925.
M. Fürst.—Wesen und Technik der Arbitrage. Berlín, 1925.



INDICE DE FIGURAS

Núm.		Págs.
1	Puntos sobre una recta	75
2	Coordenadas cartesianas ortogonales	77
3	Orientación de ángulos	77
4	Coordenadas polares	78
5	Determinación de un punto en el plano por coordenadas cartesianas	80
6	Determinación de un punto en el plano por coordenadas polares	80
7	Función en coordenadas cartesianas	82
8	Función en coordenadas polares	83
9	Gráfico-diagrama con líneas auxiliares de lectura	83
10	Cálculo por interpolación gráfica	85
11	Aproximaciones en la interpolación gráfica	85
12	Representación de funciones en escala numérica constante y en escala logarítmica	88
13	Nomograma general	91
14	Nomogramas de ejes concurrentes	91
15	Contostilo sumador de cadena	94
16	Contostilo para suma y resta directa	95
17	Contostilo de ruedas	96
18	Contostilo escribiente	97
19	Sumadora de teclado completo	98
20	Sumadora de teclado reducido	103
21	Contadora cambiadora de moneda	104
22	Aritmómetro horizontal de palancas	106
23	Aritmómetro horizontal de teclas	106
24	Aritmómetro vertical	107
25 y 26	Aritmómetros de resultados múltiples	109
27	Aritmómetro de funcionamiento eléctrico total	111
28	Aritmómetro eléctrico con mando numérico	111
29	Multiplicadora directa muda	113
30	Multiplicadora directa escribiente	114
31	Regla de cálculo ordinaria	119
32	Regla mercantil de cálculo	119

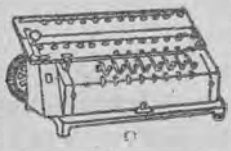
Núm.		Págs.
33	Regla Mercantil. Multiplicación	121
34	Regla mercantil. División	121
35	Diagrama de equivalencias de medidas	167
36	Línea de equivalencia de dos medidas	168
37	Regla de cálculo especial metrológica	169
38	Elementos de medición de figuras geométricas	190
39	Aforo de un tonel	195
40	Regla de cálculo para las maderas	199
41	Pila triangular	201
42	Pila cuadrangular	203
43	Pila rectangular	203
44	Pila rectangular de objetos cilíndricos	204
45	Variación de valores e interés	210
46	Regla de cálculo de intereses	282
47	Diagrama cartesiano de interés	333
48	Diagrama polar de interés	333
49	Nomograma ordinario de interés	335
50	Nomograma logarítmico de interés	335
51	Comparación gráfica de interés y descuento	336
52	Regla de cálculo para cambios	408
53	Sistemas de contar el tiempo en las cuentas corrientes	423
54	Disposiciones de las cuentas corrientes	425
55	Interés real de valores mobiliarios	586
56	Diagrama de resultados en operaciones por diferencias	593
57	Nomograma de operaciones de Bolsa	594
58	Interés de los precios de operaciones dobles	597
59	Gráficos de prima simple. *a*) De retirar. *b*) De entregar	599
60	Situación de contratantes de prima doble	601
61	Operaciones de Bolsa combinadas	603
62	Arbitraje de cotizaciones contrarias	647
63	Arbitraje de cotizaciones semejantes	647
64	Paridades de arbitraje indirecto	653
65	Paridades recíprocas de arbitraje indirecto	655
66	Paridades comerciales brutas	686

INDICE DE MATERIAS

Caps.		Págs.
	Prólogo de la primera edición	5
	Prólogo de la segunda edición	8
	Erratas	11
	Introducción	13
I	Porcentajes. Estudio general	17
	Cuestiones mercantiles	22
II	Promedios	37
III	Prorrateos. Estudio general	48
	Cuestiones mercantiles	59
IV	Gráficos	74
V	Instrumentos de cálculo. Generalidades	92
	Máquinas de sumar.	93
	Idem de calcular.	104
	Regla de cálculo	115
VI	Metrología general	125
VII	Metrología cronológica	129
VIII	Metrología especial	141
IX	Metrología monetaria	147
X	Cálculos metrológicos	159
XI	Cálculos monetarios	171
XII	Mediciones	187
XIII	Pilas de Objetos	201
XIV	Teoría general del interés	207
XV	Interés simple	217
XVI	Interés vencido práctico	224
XVII	Interés práctico anticipado	237
XVIII	Descuento simple	247
XIX	Métodos comerciales para interés o descuento. Estudio general	252

Caps.		Págs.
XX	Divisores fijos	255
XXI	Partes alícuotas	263
XXII	Tantos bases	270
XXIII	Métodos de coeficientes	279
XXIV	Varios capitales	283
XXV	Comparaciones	299
XXVI	Promedios de interés	311
XXVII	Equivalencia de pagos	319
XXVIII	Gráficos de interés y descuento	331
XXIX	Crédito	337
XXX	Efectos de comercio	340
XXXI	Operaciones de Banca	349
XXXII	Descuento bancario	353
XXXIII	Giros y remesas	368
XXXIV	Impagados	374
XXXV	Estudio general del cambio	378
XXXVI	Cambio directo	386
XXXVII	Cambio indirecto	403
XXXVIII	Operaciones de cambio a plazo	410
XXXIX	Estudio general de cuentas corrientes	415
XL	Cuentas corrientes con interés. Sistema de compensación	426
XLI	Cuentas corrientes con interés. Sistema de saldos	442
XLII	Cuentas corrientes con interés. Casos especiales	450
XLIII	Compraventa de mercaderías	460
XLIV	Cálculos parciales de compraventa	469
XLV	Cálculos de costos y ventas	485
XLVI	Precios de coste y venta	496
XLVII	Comercios especiales	508
XLVIII	Mezclas y aleaciones	515
XLIX	Valores mobiliarios	536
L	Operaciones sobre valores	556
LI	Bolsas de valores	563
LII	Operaciones de Bolsa al contado	568
LIII	Rentas y beneficios	582

Capo.		Págs.
LIV	Operaciones de Bolsa a plazo	589
LV	Bolsas de mercancías	605
LVI	Conversión de valores	611
LVII	Pignoraciones	619
LVIII	Estudio general de arbitrajes	632
LIX	Arbitrajes de cambio directo	637
LX	Arbitrajes de cambio indirecto	649
LXI	Arbitrajes sobre valores	665
LXII	Arbitrajes de metales preciosos	672
LXIII	Arbitrajes de mercaderías	679
	Bibliografía	690
	Índice de figuras	706
	Tablas de Cálculo que se citan en este volúmen. (Constituyen un volúmen especial).	





RODRIGUEZ

CÀLCULO COMERCIAL

G 61125