ARITMÉTICA

TEÓRICO-PRÁCTICA

CON EL

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Y

sencillas definiciones, ejercicios prácticos, explicaciones extensas de todas las reglas de enteros, quebrados, decimales y complejos; multitud de casos pertenecientes á estas reglas por un fácil método, abreviaciones; propiedades de los números, raíces, proporciones, reglas de tres, compañía, interés, aligación, conjunta, falsa posición é innumerables ejemplos útiles á los usos comunes de la vida, etc., etc., etc.,

POR

PEDRO BLANCO SAMPRÓN

TITULAR DE PRIMERA ENSEÑANZA

DE

BECERRIL DE CAMPOS,

Escuela del 1.er Distrito

PALENCIA:
Establecimiento tipográfico de José M. de Herrán,
Calle de la Cestilla, número 6.

1889.

ARITMÉTICA

TEÓRICO-PRÁCTICA

CON EL

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Y

…ncillas definiciones, ejercicios prácticos, explicaciones extensas
de todas las reglas de enteros, quebrados,
decimales y complejos: multitud de casos pertenecientes
á estas reglas por un fácil método, abreviaciones: propiedades
de los números, raices, proporciones,
…eglas de tres, compañía, interés, aligación, conjunta, falsa posición
é innumerables ejemplos útiles á los usos comunes
de la vida, etc., etc., etc.,

POR

PEDRO BLANCO SAMPRÓN

TITULAR DE 1.ª ENSEÑANZA

DE

BECERRIL DE CAMPOS,

Escuela del 1.er Distrito.

PALENCIA:
Establecimiento tipográfico de José M. de Herrán,
Calle de la Cestilla, número 6.

1889.

Á MIS MUY DIGNOS COMPROFESORES EN PARTICULAR
Y AL PÚBLICO EN GENERAL.

La práctica de veinte años dedicado á la 1.ª enseñanza oficial me ha servido de experiencia á la vez que de observación para publicar esta humilde obra; en ella se notará el método sencillo y harmónico para que los discípulos entiendan á sus Maestros y los Maestros la enseñen á sus discípulos con llaneza y claridad.

La simple lectura comprobará la utilidad de esta asignatura, así bien las ventajas que reportará su estudio á los niños como al alumno-maestro, por estar en harmonía esta enseñanza de las Escuelas primarias con la de las Normales.

No abrigo la presunción de haber llenado cumplidamente el fin que me proponía; pero mis comprofesores me inspiran sobrada confianza y los lectores sabrán dispensarme con benevolencia, por cuya inmerecida atención tiene el gusto de ofrecer á todos esta obrita.

El Autor.

ARITMÉTICA ELEMENTAL

PARA USO DE LOS NIÑOS Y ADULTOS

PRELIMINARES.

¿Qué se entiende por Matemáticas? Las ciencias que se ocupan del estudio de la cantidad.

¿Qué es cantidad? Todo aquello que puede someterse al cálculo.

¿Qué es cálculo? Las operaciones que se practican con la cantidad.

¿Qué es unidad? La cantidad elegida arbitrariamente, para que sirva de comparación con otra de la misma especie.

¿Qué es número? El resultado de la expresada comparación de una cantidad con su unidad.

¿Qué división puede hacerse del número? En *entero, quebrado* y *mixto, simple* y *compuesto, homogéneo* y *heterogéneo.*—Entero, la expresión de un número exacto de unidades de una misma especie, ejemplo: diez pesetas, treinta ídem. Abstracto, la expresión de un número sin designar la especie de unidad, ejemplo: cuatro, seis, ocho.—Quebrado, el que expresa parte ó partes de la unidad, v. gr. media peseta, tres cuartos de arroba.—Mixto, el formado por un entero y un quebrado, ejemplo: seis litros y medio.—Simples, los números del *uno* al *nueve.*—Compuestos, del nueve en adelante.—Homogéneos, los que hacen referencia á la misma especie, ejemplo: ocho metros, nueve metros.—Heterogéneos, los números que hacen referencia á distinta especie, v. gr. ocho metros, nueve kilógramos.

¿Qué es Aritmética? La ciencia que se ocupa de los números y sus propiedades, del cálculo y sus operaciones.

PRIMERA PARTE.

Numeración.

¿Qué es numeración? La parte de la aritmética que se ocupa de la formación y expresión de los números, unas veces por medio de la palabra, otras por medio de signos. De esta definición resultan dos clases de numeración: *verbal* ú *oral* y *escrita*.

Para la formación de los números se inventaron diferentes palabras que partiendo de la *unidad* y agregándola otro objeto, obtenemos el número *dos; tres*, para manifestar dos seres y otro ser y sucesivamente se añade la unidad al número obtenido. Ahora bien, los nombres para designar los nueve primeros números son: *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho* y *nueve*.

¿De qué palabras usarémos para nombrar los que sigan á los nueve primeros números? De la palabra *diez*, considerando á la reunión de diez unidades como una sola; de aquí en adelante contando por dieces, tendremos, *veinte*, *treinta*, cuarenta.........., noventa; al conjunto de noventa unidades mas diez, *ciento*, y contando por cientos, tendremos, *doscientos*, *trescientos, cuatrocientos*......... novecientos; se continuará agregando á novecientas unidades, *ciento*, tendremos *mil*, y contando por miles dirémos, dos mil, tres mil......... nueve mil; á la reunión de diez cientos de miles llamamos *millón* y así sucesivamente. De suerte que, tan sólo con trece vocablos, expresamos todos los números suficientes para cuantas operaciones se practiquen: estos son: uno. dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, ciento, mil y millón.

¿Existe alguna excepción acerca de lo que llevamos expuesto? Sí, señor; los números comprendidos entre mil y dos mil, tres mil y cuatro mil, etc., y los entre un millón, dos millones, tres millones, etc., se agregarán en el primer caso los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números, y en el segundo los de los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.

¿Hay alguna otra excepción? Sí, señor; en lugar de diez y uno, diez y dos, diez y tres, decimos once, doce, trece.......... veinte, porque aquellas voces son impropias de nuestra lengua.

Numeración escrita.

¿A qué damos el nombre de sistema de numeración? Al conjunto ó reunión de signos para expresar todos los guarismos.

¿Cuáles son estos?

uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	cero
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

¿Cuántos sistemas de numeración se conocen? Varios; los más interesantes son, el que usaron los romanos y el nuestro que consta de diez cifras ó guarismos. Los signos romanos son los siguientes:

uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	diez
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

cincuenta	ciento	quinientos	mil
L	C	D	M

¿Qué sistema de numeración se sigue hoy en Europa? El décuplo ó decimal porque la base es diez.

¿Qué *orden* debe seguirse en los números? El de unidades, decenas y centenas, ó el de millar de millón, etc.

¿Qué lugar ocupan las unidades simples ó de primer orden? El primero, las decenas el segundo, las centenas el tercero, conforme observarémos en el cuadro siguiente:

Primer orden.	Cuarto orden.	Séptimo orden.
Unidades.	Unidades de millar.	Unidades de millón.
Segundo orden.	Quinto orden.	Octavo orden.
Decenas.	Decenas de millar.	Decenas de millón.
Tercer orden.	Sexto orden.	Noveno orden.
Centenas.	Centenas de millar.	Centenas de millón.

Para escribir cualquiera cantidad que se nos dé se ha convenido, según el cuadro que tenemos á la vista, que las unidades simples ocupen el primero, segundo y tercer lugar, los de millar el cuarto, quinto y sexto y las de millón el septimo, octavo y noveno de derecha á izquierda.

EJEMPLO:

9.° orden.	8.° íd.	7.° íd.	6.° íd.	5.° íd.	4.° íd.	3.° íd.	2.° íd.	1.° íd.
8	7	3	4	3	2	6	7	5

¿Qué resulta de aquí? Toda cifra colocada á la izquierda es diez veces mayor que la de su derecha.

Según eso ¿qué valores representan los guarismos? Dos; valor absoluto, el que tiene por su figura y valor relativo según el lugar que ocupa, así 8,342 el valor absoluto de 8 es ocho, pero su valor relativo es ocho mil, dependiente de su lugar.

Y el cero ¿tiene algún valor? Absolutamente ninguno; se hace uso de él porque falta alguna de las cifras significativas 1 2 3 4 5 6 7 8 9 y le colocamos para no alterar nuestro sistema de numeración.

¿Cómo se leerá una cantidad escrita? Dividiéndola en períodos de tres en tres empezando por la derecha, advirtiendo que la primera coma significa mil y el uno millón, hecha esta división su lectura comenzará por la izquierda como se vé en el siguiente ejemplo: $8^{\text{millones}}\ 567,^{\text{mil}}\ 342^{\text{unidades}}$

Y para escribirla fácilmente ¿qué harémos? Guardando cada guarismo el orden correspondiente y sustituyendo con ceros el lugar que deben ocupar las cifras significativas que falten.

¿Podrá V. citarme un ejemplo? Escribir el número quinientos siete; en él se observará conforme á las reglas dadas que contiene, cinco unidades de tercer orden, ninguna de segundo y siete de primero, luego será, 507. El Maestro presentará multitud de ejemplos á sus discípulos en la forma indicada para su escritura y lectura.

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA.

1.ª

Sumar.

¿Qué es sumar? Reunir varios números homogéneos en uno sólo.

¿Qué nombres reciben los números dados? Sumandos.

¿Y el resultado? Suma total.

¿Cuál es el signo de esta operación? Dos rayas formando una + cruz que se lee más.

¿Se obtiene el mismo resultado sumando por derecha que por izquierda? El mismo, se prefiere por la derecha por ser más facil.

¿Cuántos casos pueden ocurrir? Tres: sumar un número dígito con otro digito, un dígito con un compuesto y un compuesto con otro compuesto.

¿Cómo se practicará el primer caso? Estudiando de memoria la tabla de sumar.

¿Y el segundo y tercero? Colocando las unidades de un mismo orden unas debajo de otras verticalmente y trazando una línea para separar la suma total; ó bién colocándolas horizontalmente y entre cada dos sumandos el signo + más. En ambos procedimientos se principia por las unidades de primer orden, si el resultado contiene decenas y unidades se escribirán éstas, agregando aquéllas á las decenas y de esta manera se continuará la operación.

EJEMPLOS:

846 pesetas + 34 + 1504 + 82 = 2466 pesetas.

$$\left.\begin{array}{rr} & \scriptstyle\text{1 decena.} \\ & 86.345 \\ & +\ 5.032 \\ \text{Mas} & +\ \ 634 \text{ sumandos} \\ & +\ \ \ 28 \\ \hline \text{igual} & =92.039 \text{ unidades} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} 8345 \\ +\ 6 \\ +\ 5 \\ +\ 7 \\ \hline =8363 \end{array}$$

¿Cómo probarémos si están bién resueltas las operaciones practicadas? Volviéndolas á efectuar inversamente, es decir, de abajo, arriba.

¿Qué es en general prueba de una operación? Otra segunda para cerciorarnos de la exactitud de la primera.

2.ª

Restar

¿Qué es restar? Averiguar la diferencia que existe entre dos números dados.

¿De qué naturaleza serán los números dados? De una misma ú homogéneos.

¿Cómo se llamarán los números dados? Al mayor que se ha de restar del *sustraendo*, *minuendo;* y al menor que se ha de quitar del minuendo, sustraendo.

El resultado de esta operación? Exceso, resta ó diferencia.

¿Cuál será el signo de esta operación? Una rayita horizontal — que se lee *ménos* colocada entre el minuendo y sustraendo, si la operación se hace horizontal; ejemplo: 8—2=6.

Colocando el sustraendo debajo del minuendo ¿cómo indicarémos la operación? En esta forma:

$$\begin{array}{r} 6325 \text{ minuendo.} \\ -\ 2114 \text{ sustraendo.} \\ \hline =4211 \text{ diferencia.} \end{array}$$

¿Cuántos casos pueden presentarse en la resta? Tres: Restar un número dígito de otro, un compuesto de un dígito y un compuesto de otro compuesto.

¿Cómo se practicará el primer caso? Haciendo la sustracción mentalmente.

Y el segundo y tercero? Escribiendo en todos los casos el número mayor arriba y debajo el número menor correspondiéndose sus unidades. Daráse principio por las del primer orden, enseguida las del segundo, tercero y continuando en las demás sucesivamente. Con mucha frecuencia ocurre que alguna ó algunas unidades del minuendo son menores que las del sustraendo, (1) en este caso se rebajará una unidad del guarismo primero de su izquierda para hacer más facil la operación, agregando la unidad que vale diez á su anterior.

¿Cómo ejecutarémos la operación si el *minuendo* y *sustraendo* tienen *ceros*? Si los ceros ocupan las unidades del primer orden ú otro cualquiera correspondiéndose no hay caso; si colocados entre las cifras significativas considerarémos á los ceros del minuendo por diez y á los del sustraendo por nada.

Ejemplos:

6.324 pesetas.	Duros. 9658 minuendo.	9 onzas.
— 3 íd.	ménos — 1543 sustraendo.	— 6 íd.
= 6.321	= 8115 resto.	= 3 onzas.
6.324	9658 prueba.	9

8.632 varas.	23.000 varas.	7.005 piés.
— 5.947 íd.	— 22.000 íd.	— 2.809 íd.
= 2.685	= 01.000	= 4.196
8.632	23.000	7.005

¿Cómo se han ejecutado las pruebas de estas operaciónes? Sumando el sustraendo con el resto, cuyas sumas son iguales á sus respectivos minuendos.

(1) De donde se originan las cantidades negativas.

3.ª

Multiplicar

¿Cuál es el objeto de la operación de multiplicar? Dados dos números cualesquiera, hallar otro, que contenga al primero cierto número de veces, como el segundo á la unidad.

¿Cómo se llaman los dos términos dados y el tercero que se trata de averiguar? Multiplicando y multiplicador y el tercero producto.

¿Qué indica el multiplicando? El número que se repetirá tantas veces como unidades contenga el multiplicador.

¿Qué indica el multiplicador? El número que indica cuantas veces se repetirá el multiplicando.

¿Qué nombre reciben el multiplicando y multiplicador juntos? Factores del producto.

¿De qué especie debe ser el producto total? De la del multiplicando.

¿Porqué? Porque el producto total es una suma que se hallaría si se ejecutára la adición repitiendo el número ó sea el multiplicando tantas veces como unidades contenga el multiplicador.

¿Por medio de que signos se conocerá la multiplicación? Por un aspa × ó un punto . que significa multiplicado por y también un paréntesis ( ) cuando á un todo le sometemos á una nueva operación.

¿Cuántos casos pueden ocurrir en la multiplicación? Tres generales. Multiplicar un dígito por otro dígito, un compuesto por un dígito y un compuesto por otro compuesto.

¿Cómo ejecutarémos el primero? Estudiando la siguiente tabla, puesto que la multiplicación no es más que una suma abreviada.

2	× por	2	= igual	4
2		3		6
2		4		8
2		5		10
2		6		12
2		7		14
2		8		16
2		9		18
2		10		20
3	×	3	=	9
3		4		12
3		5		15
3		6		18
3		7		21
3		8		24
3		9		27
3		10		30

4	×	4	=	16
4		5		20
4		6		24
4		7		28
4		8		32
4		9		36
4		10		40
5	×	5	=	25
5		6		30
5		7		35
5		8		40
5		9		45
5		10		50
6	×	6	=	36
6		7		42
6		8		48

6	×	9	=	54
6		10		60
7	×	7	=	49
7		8		56
7		9		63
7		10		70
8	×	8	=	64
8		9		72
8		10		80
9	×	9	=	81
9		10		90
10	×	10	=	100
10		100		1000
10		1000		10000
10		10000		100000
10		100000		1000000

¿Cómo se ejecutará el segundo caso? Poniendo el número compuesto por multiplicando y el dígito por multiplicador acompañado de su correspondiente signo. Pongo por ejemplo el número

$$\begin{array}{r} 869 \\ \times 4 \\ \hline 3{,}476 \end{array}$$

El fundamento de esta operación consiste, en que habiendo multiplicado todas las unidades del primero, segundo y tercer orden del multiplicando por su multiplicador, el producto total será el de todas las partes de que consta un factor por el otro.

¿Cómo se ejecutará el tercero? Escríbanse ambos factores y debajo una raya; multiplíquese el multiplicando por las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicador, teniendo cuidado que se correspondan las unidades del primero, segundo, tercero orden, con sus correspondientes; trácese otra segunda raya debajo de los productos parciales que sumados se obtendrá el producto total que se desea.

EJEMPLO.

```
         86257  multiplicando.
por  .()× 549   multiplicador.
        776313
       345028   productos parciales.
      431285
    47'355,093  producto total.
```

El fundamento de esta operación consiste en que habiendo multiplicado las unidades de los diferentes órdenes del multiplicando por cada una de las del multiplicador escribiendo debajo sus productos parciales, sumados estos se ha obtenido el producto total; luego las operaciones ejecutadas con las partes quedan hechas con el todo.

¿Qué es número duplo? El producto que se obtiene de multiplicar un número por dos. Triplo por tres. En general se llama múltiplo el que contiene cierto número de veces á otro exactamente.

CASOS ESPECIALES DE LA MULTIPLICACIÓN.

Cuántos convendrá distinguir? Varios: cuando ambos factores terminen en ceros, se prescinde de estos y se multiplican las cifras significativas observando las reglas anteriores y agregando al producto total los ceros que acompañen al multiplicando y multiplicador. Ejemplo: 8000 × 200 = 1600000.

También se hace caso omiso de los ceros colocados entre las cifras significativas, como v. gr. 8345 × 3005 = 25076725

```
  × 3005
   41725
25035
```

Cuando se haya de multiplicar por 10, 100, 1000 etc. se agregarán al multiplicando tantos ceros como acompañen á la unidad, como en el ejemplo siguiente:
8243 × 100 = 824300. Como se notará, las operaciones practicadas tienden á abreviar el método para la resolución.

¿Qué ventajas reconocen las abreviaciones en la aritmética? —Economía de tiempo y sufrir ménos errores.

¿Podrá V. citarme algunos casos más con ejemplos? Sí, señor. Para multiplicar por 9, 99, 999, 9999 se ponen en el multiplicando tantos ceros como nueves tenga el multiplicador, efectuando después la resta, v. gr. $62 \times 99 = 6200 - 62 = 6138$.

Para multiplicar por 11 se escribe el mismo multiplicando debajo un lugar á la derecha ó á la izquierda, v. gr. $62 \times 11 = 682$.

$$\begin{array}{r} 62 \\ 62 \\ \hline \end{array}$$

Para multiplicar por 12, 13, hasta 19, se prescinde del uno y se escribe el producto de la otra cifra significativa un lugar á la derecha efectuando la suma como en el caso anterior, ejemplo:

62 × 12 = 744	62 × 19 = 1.178
124 producto del 2	558 producto del 9.

Para hacer la multiplicación por 21, 31, 41, 51, 61....... 91 se prescinde del uno, escribiendo el producto de la única cifra un lugar á la izquierda, después se hace la suma, ejemplo:

62 × 31 = 1922.	62 × 81 = 5.022
186 producto por 3.	496 producto por 8.

Para multiplicar por 34, se duplicará el multiplicando, cuyo producto se multiplicará otra vez por 2 escribiéndole un lugar á la derecha, ejemplo:

Disposición.

62 × 34

62	
124	primer producto × 2
248	segundo ídem × 2
2108	

Cómo se hace la prueba de la multiplicación? Cambiando el orden de los factores $8.3 = 24 \} 3.8 = 24$.

En cuántos casos harémos uso de la multiplicación? En dos generalmente; cuando hayan de reducirse unidades de la especie superior á la inferior y conocido el valor de una cosa se desea averiguar el de muchas.

4.ª

División.

Qué es dividir? Repartir un número en tantas partes iguales como dice otro.

Cómo se llaman los términos de la división? *Dividendo*, el que habrá de dividirse en partes iguales, y *divisor* al número que está contenido en el dividendo.

Qué nombre recibe el resultado? *Cociente.*

Cuál es el signo de esta operación? Dos puntos : y dos líneas en esta forma |______ significan divido por.

Cuándo se llama á una división exacta? Cuando se obtiene un producto sin agregado igual al dividendo por consecuencia de multiplicar el divisor por el cociente.

Cuándo se dice la división inexacta? Cuando queda residuo.

Cuántos casos pueden presentarse en la división? Generales tres. Dividir un dígito por otro dígito, un compuesto por un dígito y un compuesto por otro compuesto.

Cómo se ejecutará el primer caso? Sabiendo la tabla de multiplicar, v. gr. $8 : 2 = 4$.

Cómo se ejecutará el segundo caso? Se escribe el dividendo primero, á su derecha el divisor con el signo interpuesto, dando principio á la operación como aquí se vé: dividendo 8642, divisor 2, cociente $4321 \times 2 = 8642$ prueba.

Cómo se ejecutará el tercer caso? Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, interponiendo el signo, debajo de este se colocará el cociente y separando de la izquierda del dividendo tantas cifras como tenga el divisor ó una más si no le contuviere, se verá cuantas veces el dividendo contiene el divisor, la cifra buscada se multiplica por el divisor mentalmente, si el producto obtenido puede restarse del dividendo parcial, la cifra es buena. Se baja otra cifra, se practica lo dicho anteriormente hasta terminar la operación. Si se encuentra algún dividendo parcial menor que el divisor se escribirá un cero en el cociente.

Ejemplo.

```
Dividendo  — 94.6.3.5  | 37 divisor
               206     |__________
Dividendos      213      2557 cociente.
parciales        285    × 37
                  26   ______
                        17899
                        7671
                       ______
                        94635 prueba.
```

Qué otros nombres reciben los términos de la división? Al divisor y al cociente, submúltiplos del dividendo y á este múltiplo de aquellos.

La división es una resta abreviada? Si, señor. Ejemplo: 12 : 3 = 4}Operaciones de la resta. 12—3=9—3=6—3=3—3=0; es decir que son cuatro las veces que el 12 contiene al 3.

Casos especiales y usos de la división.

Cuántos casos especiales podrán distinguirse en la división? Varios: Cuando el dividendo y divisor terminen en ceros, se suprimirán igual número de ceros en ambos términos.

Cuando el divisor sea la unidad acompañada de uno ó más ceros; en este caso se separan de la derecha del dividendo una ó más cifras con una coma, como ceros tenga la unidad.

Ejemplos:

819000 : 9000 = 819 : 9 = 91}8634 : 100 = 86.34}

En cuántos casos se hace uso de la división? En varios Cuando hayan de reducirse unidades de la especie inferior á superior. Cuando conocido el valor de muchas cosas, se desea averiguar el de una sola.

Cuál es la prueba de la división? Si es exacta queda dicho en la quinta pregunta; si inexacta, con sólo agregar el último dividendo parcial al producto total.

Antes de practicar la operación de dividir ¿podrá saberse las cifras que tendrá el cociente? Si, señor. Sepárese del dividendo tantas cifras como tenga el divisor ó una más si no le contuviere, cuéntense las restantes, más una, y el número obtenido serán las cifras de que consta el cociente, ejemplo: 86,3457 : 35 cifras del cociente $3457 + 1 = 5$ cifras.

DE LOS QUEBRADOS

y sus operaciones preparatorias.

Qué son números quebrados ó fraccionarios? Los que expresan una ó muchas partes de la unidad.

Cómo se escriben? Poniendo un número arriba y otro debajo separados por una línea horizontal en esta forma $\frac{3}{5}$ Si fuera número mixto el entero primero y continuación el quebrado ej. $8\frac{3}{5}$.

Cómo se leen? Como aquí se vé $\frac{1}{2}$ un medio $\frac{1}{3}$ un tercio $\frac{1}{4}$ un cuarto ...... $\frac{1}{9}$ un noveno

En llegando á diez se agrega la palabra *avos*, como en este ejemplo $\frac{5}{13}$ cinco trece avos.

Qué nombres y significación reciben los números? Al de arriba *numerador*, porque contiene las unidades fraccionarias que forman el quebrado y al de abajo *denominador*, porque señala las partes en las que se considera dividida la unidad.

Qué nombres reciben el numerador y el denominador? Términos del quebrado.

Qué clasificación se hace de los quebrados? En propios é impropios. Llámanse propios, á los que valen ménos que la unidad, é impropios á los que valen más que la unidad, v. gr. propios $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{8}$ impropios $\frac{14}{7}$ y $\frac{8}{3}$.

Qué operaciones preparatorias son indispensables tener presente en los quebrados? Simplificación y reducción de quebrados; reducción de un entero y un número mixto á quebrado.

Cómo se simplifican los quebrados? Dividiéndoles por los números primos 2, 3, 5, 7, etc. hasta llegar á dar al quebrado una forma más sencilla que la primitiva. Ejemplo: $\frac{24}{30}$ división por 2 igual á $\frac{12}{15}$; dividiéndole por 3 igual á $\frac{4}{5}$ igual á $\frac{24}{30}$

Los quebrados que tienen diferente denominador ¿cómo se reducen á uno mismo? Multiplicando el numerador de cada quebrado por todos los denominadores menos por el suyo, ejemplo: $\frac{3}{2}\ \frac{5}{3}\ \frac{6}{8} = \frac{3.\ 3.\ 8;\ 5.\ 2.\ 8;\ 6.\ 2.\ 3.}{2\ .\ 3\ .\ 8}$

Para poner un entero en forma de quebrado, conocido el denominador, se multiplica el entero por el denominador dejando el mismo denominador, ejemplo sea el entero 6, y 5 el denominador; tendrémos $\frac{6 \times 5}{5} = \frac{30}{5}$ Para poner un número mixto en forma de quebrado, multiplíquese el entero por el denominador, á su producto se adiciona el numerador dejando el mismo denominador. Sea el mixto $4\ \frac{3}{5} = \frac{4.5+3}{5} = \frac{23}{5}$ Llámanse quebrados de quebrados, la dependencia que guardan unas fracciones con otras, ejemplo: los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ de $\frac{7}{9}$

Operaciones con los quebrados.

1.ª

Sumar.

Cómo se suman los quebrados? Si tienen un mismo denominador se suman los numeradores; si le tienen diferente se reducen á un comun denominador y si son números mixtos se suman primero los quebrados, adicionando á los enteros las unidades que resulten de aquellos. De donde resultan tres casos.

EJEMPLOS.

Quebrados con un mismo denominador.	**Con diferente denominador.**
$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2 \div 4 \div 5}{3} = \frac{11}{3}$	$\frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} = \frac{6.8.9 \div 7.}{7.}$
	Mixtos
$\frac{7\ \ 9 \div 8\ \ 8.7}{8\ .\ 9} = \frac{1272}{504} = 2\ \frac{264}{504}$	$4\ \frac{2}{3} + 8\ \frac{3}{4} + 6\ \frac{4}{5} =$

$\frac{40 \div 45 \div 48}{60} = \frac{133}{60} = 2\ \frac{13}{60}$ sumando el 2 con los enteros se tendrá $=$ á $20\ \frac{13}{60}$

2.ª

Restar.

Cómo se restan los quebrados? Si tienen un mismo denominador se restan los numeradores, si le tienen diferente, se reducen á un comun denominador y si son números mixtos se restan primero los quebrados; si el sustraendo fuere mayor que el minuendo se agregará á este una unidad reducida á quebrado rebajándola á los enteros.

EJEMPLOS.

1.º Con un mismo denominador.	**2.º Con diferente denominador.**
$\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$; $\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{6}{8} - \frac{2}{9} = \frac{6.9-8.2}{8.9} = \frac{16}{72}$

Mixtos.

$14\frac{5}{8} - 3\frac{2}{9} = \frac{45}{72} - \frac{16}{72} = \frac{29}{72}$ $14 - 3 = 11\frac{29}{72}$; $14\frac{2}{8} - 3\frac{4}{7} = \frac{14-32}{56}$ imposible la resta; se agregan $\frac{56}{56}$ y tendremos $\frac{70-32}{56} = \frac{38}{56}$ descuéntese al 14 una unidad serán $13 - 3 = 10\frac{38}{56}$

Qué casos pueden incluirse en la sustracción de números mixtos? Los siguientes: restar un entero de un quebrado $8 - \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = 7\frac{4}{7}$. Restar un entero de un número mixto, ejemplo: $8 - 3\frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$; $7 - 3 = 4$ se tendrá $8 - 3\frac{3}{7} = 4\frac{4}{7}$. Restar un mixto de un entero, como aquí se vé: $3\frac{3}{7} - 2 = \frac{3}{7}$; $3 - 2 = 1\frac{3}{7}$. Restar un mixto de un quebrado como en este ejemplo $3\frac{3}{7} - \frac{2}{9} = \frac{27-14}{63} = 3\frac{13}{63}$.

Podrá V. darme una regla general para la resolución de los casos anteriores? Sí, señor. Considerando al minuendo y sustraendo como números mixtos y escribiendo un cero donde falte el entero ó el quebrado.

3.ª

Multiplicar.

Cómo se multiplican los quebrados? Si son quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador partiendo el primer producto por el segundo; si son números mixtos se trasforman en quebrados y se multiplican como en el caso anterior, y si es un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador dejando el mismo denominador.

EJEMPLOS:

$$\frac{12}{19}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{95}\left\{2\ \frac{3}{5}\times 4\ \frac{2}{7}=\frac{13\times 30}{5\,.\,7}=\frac{390}{35}=11\ \frac{1}{7}\right\}$$

$$16\times\frac{6}{14}=\frac{16\times 6}{14}=\frac{96}{14}=6\ \frac{12}{14}$$

4.ª

División.

Cómo se dividen los quebrados? Si son quebrados se multiplican en cruz; si son números mixtos se trasforman en quebrados y se multiplican como en el caso anterior y si es un entero por un quebrado, reduciendo el entero á quebrado poniendo por denominador la unidad, de suerte que las resoluciones son iguales al primer caso.

EJEMPLOS:

$$\frac{12}{14}\times\frac{4}{8}=\frac{96}{56}=1\frac{40}{56}\left\{\ 8\frac{1}{2}:2\frac{3}{4}=\frac{17}{2}\times\frac{11}{4}=\frac{68}{22}=3\frac{2}{22}\right\}$$

$$\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{3}{8}$$

Cómo se valúan los quebrados? Multiplicando el numerador por las unidades de la especie inferior á que se refiera, cuyo producto se divide por el denominador, si la división es inexacta se multiplica el resíduo por la especie inferior inmediata continuando de esta manera la operación, ejemplo: cuánto valen $\frac{2}{8}$ de duro? $\frac{2}{8}\times 20$ rs. $=\frac{40}{8}=5$ reales.

Observación.—Los signos $+ - \times :$ empleados en las operaciones de los quebrados, téngase cuidado en su colocación para que afecten siempre á ambos términos.

DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

¿Qué son fracciones decimales?—Aquellas que tienen por denominador la unidad con un cero, con dos, etc. Qué relación existe en las fracciones decimales? La misma que se sigue en la numeración de enteros. Cuál será su nomenclatura? Dividiendo en diez partes iguales la unidad se obtiene lo que se llama una *décima;* subdividiendo las décimas en otras diez, se obtienen las centésimas; subdividiendo las centésimas por el mismo método se obtienen las milésimas; sucesivamente se continuará hasta obtener la *diezmilésima*, *cienmilésima*, *millonésima*, etc.

Cómo se escriben los números y las fracciones decimales?—Primeramente los enteros; si no los hubiere se colocará un *cero* y una *coma*, á continuación y á la derecha de la coma se colocarán las *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, etc.

Cómo se leen?—Primero la parte entera, inmediatamente el número decimal, dándole la denominación que corresponda á la última cifra, v. gr. 834, unidades 625 milésimas { 0, enteros 064 milésimas } 0, enteros 03 centésimas.

Alteran los decimales con aumentar ó suprimir ceros á su derecha? No, señor.

Por qué?—Porque el valor relativo de un número decimal depende de su lugar respecto á la coma y por más ceros que se le agreguen ó quiten no alterará su valor; pues equivale á multiplicar por 10, por 100, por 1000 etc. ó á dividirle por 10, 100, 1000, etc.; de donde resulta, si un número compuesto de enteros y decimales, se quiere multiplicar por 10, córrase la coma un lugar á la izquierda; dos lugares por 100; tres por 1000, etc,; al contrario, si se divide por 10, 100, ó 1000, uno, dos, tres lugares respectivamente á la derecha, v. gr. 8, 45 $\times$ 10 $=$ 84,5 { 8,45 $\times$ 100 $=$ 845 } 8,45 : 10 $=$ 0, 845 {8,45 : 100 $=$ 0, 0845 }

Operaciones con los números y las fracciones decimales.

1.ª

Sumar.

Cómo se suman los decimales? Exactamente lo mismo que los enteros, correspondiéndose la coma y separando á la suma total tantas cifras decimales como tenga el mayor de los sumandos, nó en valor, sino en número.

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{r} 6{,}24 \\ +\ 0{,}08 \\ +\ 5{,}324 \\ +\ 9{,}030 \\ \hline =20{,}674 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}008 \\ +\ 234{,}50 \\ +\ 3284{,}00 \\ +\ 62{,}3 \\ +\ 0{,}2 \\ \hline =3581{,}008 \end{array}$$

2.ª

Restar.

Cómo se restan los decimales? Exactamente lo mismo que los enteros, escribiendo el número mayor ó sea el minuendo el primero y debajo el menor ó sea el sustraendo, correspondiéndose las comas; iguálese con ceros al que tenga ménos cifras decimales para mayor facilidad en la ejecución.

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{r} 846{,}325 \\ -\ 62{,}54 \end{array} \text{ ó sea } \begin{array}{r} 846{,}325 \\ -\ 62{,}540 \\ \hline =783{,}785 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 0{,}89 \\ -0{,}37 \\ \hline =0{,}52 \end{array} \right.$$

3.ª

Multiplicar.

Cómo se multiplican los números y las fracciones decimales? Exactamente lo mismo que en los enteros, separando hácia la derecha del producto total igual número de cifras decimales como tengan el multiplicando y multiplicador juntos.

EJEMPLOS:

$$62{,}3457 \times 1000 = 62345{,}7 \times 10 = 623457$$

$$\begin{array}{r} 85{,}23 \\ \times\ 35 \\ \hline 42615 \\ 25569 \\ \hline 2983{,}05 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 69{,}47 \\ \times\ 3{,}52 \\ \hline 13894 \\ 34735 \\ 20841 \\ \hline 244{,}5344 \end{array}$$

4.ª

Dividir.

Cómo se dividen los números decimales y las fracciones decimales? Exactamente lo mismo que en los enteros, hágase abstracción de la coma, iguálese al dividendo y divisor con ceros al que sea necesario y efectúese la división.

Ejemplos:

8642,37 : 0,024 = 8642,370 : 0,024 ó sea

864370 : 24 = 36015
144
037
130
010

325,082 : 4,5 = 325,082 : 4500

Las pruebas de las cuatro operaciones anteriores son las mismas que se dieron para los enteros.

Conversión de quebrados ordinarios á fracciones decimales y vice-versa.

Cómo se convierte una fracción común en fracción decimal? Escribiendo primero un cero en el cociente y dividiendo el numerador por el denominador, ejemplo:

$\frac{4}{8}$ en fracción decimal 40 | 8 = 0,5
00 0,5

Cómo se convierte una fracción decimal en fracción ordinaria? Poniendo por numerador la fracción decimal y por denominador la unidad acompañada de tantos ceros como haya de decimales, ejemplo: $0,5 = \frac{5}{10}$; $0,15 = \frac{15}{100}$; $0,150 = \frac{150}{1000}$

Todas las fracciones decimales pueden convertirse exactamente en fracciones comunes, como se vé en el último ejemplo; pero no sucede lo propio para la conversión de fracciones comunes en fracciones decimales, sino en los casos que el denominador tenga por factores el 2 y el 5, ejemplo: Convertir exactamente la fracción común $\frac{18}{25}$ en fracción decimal. Tendrémos 180 : 25 = 0,72 exacta.
0050
00

Por consecuencia de las divisiones inexactas la fracción será *continua*, cuando conste de un entero más una fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador el entero, más una fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador un entero, más una fracción, etc. *Periódica pura*, cuando sus cifras se repiten en el mismo orden hasta lo infinito, ejemplo 0,32323232... *Periódica mirta*, cuando periódicamente se repite una parte y otra no, ejemplo: 0,5333...

Cómo se valúa una fracción decimal? Multiplicándola por la unidad de especie inferior á que se refiera, v. gr. 0,4 de duro = 2 pesetas.

El Maestro deberá ejercitar á los niños en estas reducciones por las ventajas que ofrece para resolver los problemas, sin hacer uso de los quebrados que embarazan algún tanto las operaciones.

Sistema métrico decimal. Ideas generales.

A qué se dá el nombre de sistema métrico? A la reunión ó conjunto de pesas y medidas, cuya base es el *metro*.

Por qué se le llama decimal? Porque los múltiplos y submúltiplos de las unidades típicas se forman multiplicando éstas por 10, 100, 1000, etc. ó dividiéndolas por 10, 100, 1000, etc.

Cuáles son las unidades principales del sistema métrico? Las longitudinales, de capacidad, de peso y agrarias.

Podrá V. explicarme cada una de estas unidades y su uso? Sí, señor. La medida lineal invariable ó sea el *metro* es igual á la *diezmillonésima* parte de un cuadrante del meridiano que pasa por París. Generalmente hablando el metro tiene uso en el comercio; el decámetro y el hectómetro le tienen para medir pequeñas distancias, el kilómetro y el miriámetro sirven para mayores distancias. Es igual el metro á 1.196 de vara.

La unidad típica para líquidos y áridos es el *litro*. A la manera que el metro no fué tomado al azar tampoco lo fué el litro. Dividiendo el metro en diez partes iguales tomóse una y se construyó una medida que consta de las mismas dimensiones por todas sus caras. Esta medida se expresa para la contabilidad en *litros* y *centilitros*. Es igual 1,98 de cuartillo.

La unidad típica de las medidas de peso es el *gramo*. Se obtuvo pesando agua pura á la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado y en el vacío. En el lenguaje ordinario tiene poco uso el *gramo*. Es igual á medio adarme próximamente.

La unidad típica para las agrarias es el *area*. Esta medida no es más que un cuadrado que tiene 10 metros por lado ó 100 metros cuadrados. Se usa para la medición de fincas rústicas; cuando quieren medirse pequeños solares, habitaciones, etc., se toma como unidad el *metro cuadrado*.

Formación de los múltiplos y submúltiplos.

Cómo se forman los múltiplos? Anteponiendo á las unidades principales las palabras Deca, Hecto, Kilo y Miria.

Cómo se forman los divisores? Anteponiendo á las unidades principales las palabras deci, centi, mili, como se vé en el siguiente cuadro.

Múltiplos.			Unidades principales.	Submúltiplos.			
Deca	significa	10	Metro	Deci	significa	0,1	décima parte
Hecto	id.	100	Litro	Centi	id.	0,01	centésima
Kilo	id.	1000	Gramo	Mili	id.	0,001	milésima
Miria	id.	10000	Area				parte.

Advertencias.—No deberán confundirse el metro cuadrado y el metro cúbico cuando se usen como unidades principales, anteponiendo las voces Deca, Hecto, Kilo y Miria puesto que el resultado es muy diferente. Por ejemplo: un Decámetro cuadrado parece ser igual á 10 metros cuadrados, no es así, equivale á 100. El Hectómetro cuadrado á 10.000 metros cuadrados etcétera, etc. Un Decámetro cúbico, parece ser igual á 10 metros cúbicos, no es así, equivale á 1000 metros cúbicos; un Hectómetro cúbico á un millón. Todo lo contrario acontece anteponiendo los submúltiplos deci, centi, mili, ejemplo: un decímetro cuadrado será cien veces menor que el metro cuadrado, unidad principal; un centímetro cuadrado será la diezmillonésima parte de la misma unidad.

EQUIVALENCIAS

de las principales pesas y medidas españolas con las del sistema métrico decimal.

Medidas longitudinales.	Equivalencias en Metros.
Vara, igual á 3 piés.	0,836
Pié, idem á 12 pulgadas.	0,278
Pulgada, idem á 12 líneas.	0,023
Línea, idem á 12 puntos.	0,001

Medidas para líquidos.	Equivalencias en litros.
Cántara, igual á 4 cuartillas.	16,132
Cuartilla, idem á 2 azumbres.	4,033
Azumbre, idem á 4 cuartillos.	2,016
Cuartillo, idem á 4 copas.	0,50

Medidas para áridos ó granos.	Equivalencias en litros.
Fanega, igual á 12 celemines.	55,50
Celemín, idem á 4 cuartillos.	4,62
Cuartillo, idem á.	1,15

Agrarias ó superficiales.	Equivalencias en area.
Obrada de tierra igual á.	53,83
Emina (Palencia)	13,42

Tan sumamente sencillas son las reducciones de un sistema á otro, que basta conservar en la memoria las equivalencias y tener presente que para reducir unidades superiores á inferiores se emplea la operación de multiplicar y al contrario la de dividir; sin olvidar la coma en la resolución de problemas que tiene un valor importantísimo, cuyo objeto es separar la *parte entera* de los *decimales* y aumentar ó disminuir los números conforme se corra de derecha á izquierda y al contrario como queda dicho en lecciones anteriores.

De los números complejos é incomplejos.

PRELIMINARES.

Qué son números complejos? Los números que expresan unidades de diferente especie, pero todas relativas á una principal. Ejemplo: 4 varas, 2 piés, 7 pulgadas, 3 líneas.

Cuáles son los números incomplejos? Los números que expresan unidades de una sola especie, v. gr. 8 varas; 5 duros.

Cómo se reduce un complejo á incomplejo de su menor especie? Se multiplican las unidades superiores por el número de veces que estén contenidas en la inmediata inferior, al producto obtenido se agrega ésta, cuyo producto total se multiplica por la inmediata inferior, agregando las de esta especie, se continuará la operación hasta llegar á las inferiores dadas, ejemplo: Reducir 5 quintales, 3 arrobas, 14 libras, 6 onzas á incomplejo de onzas. Conforme á la definición dada se tendrá 5 $\times$ 4 = 20 arrobas + 3 = 23 $\times$ 25 = 575 libras + 14 = 589 $\times$ 16 = 7424 onzas + 6 = 7430 onzas, unidad inferior que se pide.

Cómo se reducirá un número complejo á cualquiera de sus unidades no siendo la inferior? Fórmese un quebrado, cuyo numerador será el total de las unidades inferiores del complejo y el denominador será las veces que la unidad inferior contenga á la superior á que se refiera. Ejemplo: Reducir 8 varas, 2 piés y 7 pulgadas á la superior de varas. Se tendrá: total unidades inferiores del complejo $\frac{319}{36}$ pulgadas numerador
íd. contenidas en una vara.

Cómo se reducirá esta fracción á número complejo? Divídase el numerador por el denominador, los resíduos que se obtengan se multiplicarán sucesivamente por las unidades inferiores, dividiéndolos en todos los casos por el denominador del quebrado.

Sea el ejemplo anterior. $\frac{319}{36}$= 8 varas 2 piés 7 pulgadas. Se tendrá

319 | 36
031 8 varas
×3
93 | 36
21 2 piés

21
×12
42
21
252 | 36
000 7 pulgadas

Cómo se reducirá un número incomplejo á complejo? Dividiendo sucesivamente el número dado por las veces que su unidad esté contenida en las inmediatas superiores, el último cociente empleado y los resíduos obtenidos formarán el complejo que se pide, v. gr.: Reducir el incomplejo 64235 onzas á complejo.

64235 | 16
00071 4014 | 25
1 151 160 | 4
00 40

igual 40 quintales 0 arrobas 14 libras y 11 onzas.

Operaciones con los números complejos.

1.ª

Sumar.

Cómo se suman los números complejos? Se colocan los sumandos de manera que se correspondan las unidades de una misma especie, se dá principio por las inferiores si esta suma contuviere alguna ó algunas de las inmediatas superiores se agrega escribiendo en la primera suma el resíduo.

EJEMPLO:

$\overset{2}{8}$ varas	$\overset{1}{2}$ piés	$\overset{1}{3}$ pulgadas	9 lineas
+ 6	1	6	7
+ 5	2	8	4
+ 3	1	1	3
= 24	1	7	11

2.ª

Restar.

Cómo se restan los denominados? Se colocan el minuendo y sustraendo de manera que se correspondan las unidades de una misma especie, se dá principio por las inferiores escribiendo el resto; pero si alguna unidad del minuendo fuere menor que la correspondiente al sustraendo se agregara una de la inmediata superior, teniendo cuidado de descontarla al ejecutar su resta.

EJEMPLO:

De $\overset{7}{\overline{8}}$ varas	$\overset{4}{\overline{2}}$ piés	$\overset{15}{\overline{3}}$ pulgadas	9 líneas.
— 6	2	6	7
= 1	2	9	2

3.ª

Multiplicar.

Cómo se multiplican los números complejos? Formando un quebrado, cuyos numeradores serán los productos de reducir el multiplicando y multiplicador á sus menores especies y por denominadores el número que exprese las veces que la unidad de especie superior contiene á la inferior. Ejemplo.

Una vara cuesta 4 pesetas y 3 reales ¿qué costarán 8 varas y 2 pies? $\frac{19}{4}\times\frac{26}{3}=\frac{19\times26}{4,3}=41,16$

Puede V. indicarme otro procedimiento de resolución? Si, señor. Por decimales; redúzcanse las unidades inferiores de ambes factores á fracción decimal de las inmediatas superiores correspondientes y multiplíquense como decimales. Sirva de ejemplo el anterior.—4,75 de peseta $\times$ 8,666 de vara = 41,16 de peseta.

4.ª

División.

Cómo se dividen los números complejos? Formando un quebrado y dividiéndolos como tales, cuyos numeradores serán los productos de reducir el multiplicando y multiplicador á sus menores especies y por denominadores el número que exprese las veces que la unidad de especie superior contiene á la inferior.

EJEMPLO:

Se ha visto en el anterior que por 41,16 de peseta me han dado 8 varas y 2 pies de paño ¿cuál será el precio de una vara?

$$\frac{41,13}{1} : \frac{26}{3} = \frac{41,13 \times 3}{1.26} = 4,75$$

Puede V. indicarme otro procedimiento de resolución? Si, señor, por decimales. Redúzcanse las unidades inferiores del dividendo y divisor á fracción decimal de las inmediatas superiores correspondientes y divídanse como decimales. Ejemplo: 41,16 de peseta : 8,666de vara=4.75 de peseta que costará una vara.

SEGUNDA PARTE.

Razones y proporciones.

Qué es razón? El resultado de comparar dos números.

Qué clasificación se hace de la razón? En *aritmética* y *geométrica, directa* é *inversa.*

Qué es razón aritmética? La diferencia que existe entre dos números, minuendo y sustraendo, ejemplo: 12—4=8.

Qué es razón geométrica? El cociente que se obtiene de ver cuantas veces un número contiene á otro, ejemplo: 12:4=3.

Qué es razón directa? La razón de dos números cuyo cociente es invariable, ejemplo: En una panera existe un número de fanegas de trigo y su precio, ¿qué diremos de estas dos cantidades? que están en razón directa, porque el cociente, será siempre el mismo, ó sea, el valor de una fanega.

Qué es razón inversa? La razón de dos números cuyo producto es invariable, ejemplo: El número de soldados que han hecho una obra y la parte que ha hecho cada uno, son cantidades en razón inversa, porque el producto es constante, la magnitud de la obra.

Cómo se escribe una razón aritmética? Colocando un punto entre los dos números que se comparan, ejemplo: 12.4=12—4=8. Se lee 12 es aritméticamente á 4.

Qué nombres reciben los dos números que se comparan? Antecedente el primero y consecuente el segundo.

Cómo se escribe una razón geométrica? Colocando dos puntos[1] entre el antecedente y el consecuente, ejemplo: $12 : 4=3$. Se lee 12 es geométricamente á 4.

Cómo se hallarán los resultados de las razones aritmética y geométrica? Efectuando la sustracción en el primer caso, y la división en el segundo, como se ha practicado La razón geométrica no se altera, multiplicando ó dividiendo el antecedente ó numerador por el consecuente ó denominador, puesto que equivale á un quebrado.

Proporciones aritméticas.

Cuándo se dice proporciones aritméticas? Cuando las diferencias de dos razones aritméticas son iguales: ejemplo:

$$\overset{\text{1.ª razón.}}{8 . 6}=2 \text{ y } \overset{\text{2.ª razón}}{16 . 14}=2 \text{ se lee } 8 \overset{\text{es}}{.} 6 \overset{\text{como}}{:} 16 \overset{\text{es}}{.} 14.$$

Cómo se escriben las proporciones por diferencia? Poniendo por términos primeros una razón cualquiera y por segundos otra razón, cuya diferencia sea igual á la primera. Sirva de ejemplo el anterior.

Proporciones geométricas.

Qué es proporción? La igualdad de dos razones.

Cuándo se dice proporción geométrica? Cuando los cocientes de dos razones por división son iguales, ejemplo: 1.ª razón $24:8=3$ y 2.ª razón $36 : 12=3$.

Qué clasificación se hace de las proporciones geométricas? En continuas y discretas. Llámanse continuas cuando los términos medios son iguales y discretas cuando lo son diferentes.

De cuántos términos consta una proporción? De cuatro.

Cómo se escribe una proporción geométrica? Poniendo una razón separada con dos puntos, multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número se tendrá la segunda razón que se separará de la primera con cuatro puntos, ejemplo: 1.ª razón $24 \overset{\text{es}}{:} 8$ multiplicando por 3 sus dos términos se habrá formado con los productos la segunda razón, que se separará con cuatro puntos como aquí se vé $24 \overset{\text{es}}{:} 8 \overset{\text{como}}{::} 72 \overset{\text{es}}{:} 24$

(1) Verdaderamente indican la división.

Cómo se llaman los términos de una proporción? El primero y cuarto extremos; el segundo y tercero medios; el primero y tercero antecedentes; el segundo y cuarto consecuentes.

Cómo se escribirá una proporción contínua? Con este signo ÷ significa repetido el término medio, ejemplo: 32 : 8 ∷ 8 : 2 ó sea ÷ 32 : 8 : 2.

Cuál es la propiedad fundamental de las proporciones geométricas? Que el producto de los extremos es igual al de los medios: sea la proporción 24 : 8 ∷ 72 : 24 si se divide cada consecuente por la razón común 4 se tendrá la nueva proporción 24 : 2 ∷ 72 : 6 en donde $24 \times 6 = 72 \times 2$; si en vez de la división se hubiera multiplicado cada consecuente por la misma razón 4, se tendría 24 : 32 ∷ 72 : 96 en donde $24 \times 96 = 32 \times 72$; cualquiera de las operaciones practicadas tienen su fundamento sólido «que si á dos cantidades ó productos iguales se les multiplica ó divide por un mismo número, los resultados serán iguales,» lo cual deberá tenerse en cuenta para demostrar que «el producto de extremos es igual al de los medios» como queda visto.

De lo dicho se infiere que para hallar un extremo en la proporción *discreta*, se multiplican los medios y su producto se divide por el extremo dado; ejemplo: 8 : 2 : : 24 : X; $X = 2 \times 24 : 8 = 6$ valor de X.

Que para hallar un medio en la proporción discreta, se multiplican los estremos y su producto se divide por el medio dado, ejemplo: 8 : X : : 24 : 6; $X = 8 \times 6 : 24 = 2$ valor de X.

Que para hallar un extremo en la proporción *continua* se elevará el *medio* al cuadrado,[1] dividiendo su producto por el extremo conocido; ejemplo: ÷ 32 : 8 : X; $X = \frac{8.8}{32} = \frac{64}{32} = 2$ valor de X.

Que para hallar un *medio* en la proporción contínua se extraerá la raiz cuadrada del producto de los extremos; ejemplo: ÷ 32 : X : 2; $X = 32 \times 2 = \sqrt{\begin{array}{l}64\\00\end{array}}\,\Big|\,\frac{8}{8}$; [2] luego ÷ 32 : 8 : 2.

---

(1) Elevar un número al cuadrado es multiplicarle por sí mismo como se verá más adelante.

(2) En otro lugar se tratará de esta operación.

Que á una proporción puede darse diferentes trasformaciones sin que el producto de los extremos y el de los medios altere.

Cuáles serán estas trasformaciones? Las más generales *alternar, invertir,* y *permutar*.

Alternar una proporción es, comparar *antecedente* con *antecedente* y *consecuente* con *consecuente*.

Invertir, comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones.

Poner los medios por extremos y vice-versa lo cual se llama permutar.

EJEMPLO.

8 : 2 :: 24 : 6 proporción primitiva.

Trasformaciones.

8 : 24 :: 2 : 6 —alternar.
2 : 8 :: 6 : 24 —invertir.
24 : 6 :: 8 : 2 —permutar.

Estas ligeras nociones tienen su aplicación para resolver las reglas de tres, compañía, interés, etc., etc.

Propiedades de los números.

Qué es número primo ó simple? El que no es divisible sino por sí mismo y por la unidad; ejemplo: los números 2, 3, 5, 7, 11 son números primos.

Qué son números primos entre sí? Los números que tienen más factor común que la unidad; ejemplo: 2 y 3, 5 y 7 son primos entre sí.

Qué son números compuestos? Los números que tienen diferente divisor de sí mismo y de la unidad; como por ejemplo, los números 4 y 8.

Cómo se conocerá que un número es divisible por 2? Cuando termine en cero ó cifra par; ejemplo: 36 y 360.

Cuándo será un número divisible por 3? Cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras sea divisible por 3 que también lo será por 9 como el número 45.

Cuándo un número será divisible por 7? Cuando multiplicando las unidades simples por 1, las decenas por 3 y las centenas por 2 se obtenga un producto de 7 ó múltiplo de 7; ejemplo: 343.

$$\begin{array}{lr} \text{Unidades } 3\times 1 = & 3 \\ \text{Decenas } 4\times 3 = & 12 \\ \text{Centenas } 3\times 2 = & 6 \\ \hline & 21 \end{array}$$

En efecto, el número 343 es divisible por 7.

Cuándo un número será divisible por 5? Cuando termine en un 0 ó en 5 como 470 y 475.

Cuándo un número será divisible por 11? Cuando la diferencia de las cifras que ocupan lugar impar y la de las que ocupan lugar par sea 0 ó un múltiplo de 11; como en 7854.

Medios de obtener los factores simples y divisores de un número.

Cómo se descompondrá un número en sus factores primos? Se dividirá el número propuesto y sucesivamente por los primos 2, 3, 5, 7, etc. si las divisiones son posibles, se continuará la operación dividiendo los cocientes obtenidos por los números primos hasta llegar á un número que no sea divisible sino por sí mismo. Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 5 \quad 840 = 2^3\times 5\times 7\times 3 \\ 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Cómo se formarán todos los divisores de un número? Se descompondrá el número en sus factores simples, se trazará una raya, en la parte superior se colocará el divisor 1 ó la unidad y todas las potencias del primer factor, se trazará otra segunda raya, multiplicando las combinaciones con las potencias sucesivas del segundo factor, se continuará por este orden hasta obtener todos los divisores del número propuesto. Ejemplo:

Sabemos que $840=2^3 . 5 . 7 . 3$ se tendrá

1	2	4	8
5	10	20	40
7	14	28	56
35	70	140	280

(1)..........

Qué es máximo común divisor? El mayor número que por separación divide exactamente á los números dados.

Cuáles son los principios fundamentales para obtener el m. c. d.? Los siguientes: Todo m. c. d. de dos números divide exactamente su suma, su diferencia y sus múltiplos.

Cómo se hallará el m. c. d. de vários números dados? Se les divide sucesivamente por los números primos, se forma un producto con todos los factores comunes hallados, poniendo á cada uno de ellos el menor exponente que tenga, el producto será el m. c. d. pedido. Ejemplo: 36, 72 y 120; $36=2^2\times3^2$ y $120=2^3\times3\times5$; el m. c. d. será $2^2\times3=12$.

Porqué se ha eliminado al 72? Por ser múltiplo del 36.

Cómo se obtendrá el m. c. d. de dos números? Dividiendo el mayor por el menor, el menor por el primer resíduo, el primer resíduo por el segundo y sucesivamente, el último divisor empleado será el m. c. d. pedido. Ejemplo:

	3	3
120	36	12 m. c. d.
012	00	

Todos los números dados tienen máximo común divisor? No, señor. Se conocerá; cuando se obtiene por resta la unidad; cuando una resta no divide á la precedente y cuando se obtienen restas con primos entre sí.

Qué es mínimo común múltiplo? El menor número que es divisible exactamente por todos ellos.

Cómo se hallará el mínimo común múltiplo de varios números? Se les divide sucesivamente por los números primos, se forma

(1) Haráse al discípulo continuar la operación.

un producto con todos los factores comunes hallados, poniendo á cada uno de ellos el mayor *exponente* que tenga, el producto será el mínimo común múltiplo pedido. Ejemplo:

36, 72 y 120; $72 = 2^3\ 3^2$ y $120 = 2^3\ 3.\ 5 = 2^3\ 3^2\ 5 =$ 360 mínimo común múltiplo.

Por qué se ha prescindido del 36? Por ser divisor del 72.

Raices de los números.

Qué se entiende por raiz de un número? El producto de multiplicar un número por sí mismo tantas veces como indique el exponente.

Qué es número exponente? El que indica las veces que un número va á entrar por factor.

Qué clasificación se hace de las raices? Segunda potencia ó *cuadrado*, tercera potencia ó *cúbica*.

Qué es cuadrado de un número? El producto que se obtiene de multiplicar un número por sí mismo, ejemplo.: 8^2 ó sea $8 \times 8 = 64$.

Qué es cubo ó tercera potencia? El producto de multiplicar un número dos veces, ejemplo: 8^3 ó sea $8 \times 8 = 64 \times 8 = 512$.

Tabla de los cuadrados de los nueve primeros números.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Cómo se extrae la raiz cuadrada de un número entero que conste de unidades, decenas y centenas? Se le divide en porciones de tres en tres cifras empezando por la derecha, sin importar que la primera porción de la izquierda tenga una sola cifra. Se hallará la raiz cuadrada de la primera porción de la izquierda se elevará al cuadrado y se restará de la porción de que procede; á la derecha del resto se bajará la siguiente porción, separando una cifra de la derecha con una coma, dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo de la raiz hallada, el cociente que se obtenga se colocará á la derecha del divisor que multiplicado se ensayará para ver si puede restarse del dividendo si no puede verificarse se le descontará una á una hasta que pueda ejecutarse la resta, se baja la siguiente porción y se continúa la operación.

EJEMPLO:

$\sqrt{1.84.96}$	139
0 84	$23 \times 3 = 69$
69	266×6
1.5 9.6	
15 96	
00 00	

Cómo se extrae la raiz cúbica de los nueve primeros números? Sabiendo de memoria el siguiente cuadro.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

Cómo se extrae la raiz cúbica de un número entero mayor que 1000? Se le divide en porciones de tres en tres cifras importando poco que la primera sección de la izquierda tenga dos; se averigua la raiz del primer período, se eleva al cubo y se resta de la sección que procede; á su lado se baja la siguiente sección, separando dos cifras de la derecha con una coma y se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, á su derecha se escribirá la raiz, se eleva al cubo y se resta de los dos períodos, se baja la sección siguiente y se continúa la operación del mismo modo.

EJEMPLO:

$\sqrt[3]{39.304}$	34
27	
123.04	
393 04	
000 00	

TERCERA PARTE.

Regla de tres.

Qué es regla de tres? La que enseña á averiguar el cuarto término de una proporción dados los tres conocidos.

En qué se divide la regla de tres? En simple y compuesta.

Qué es regla de tres simple? La que depende de una sola condición ó circunstancia.

Qué es regla de tres compuesta? La que depende de dos ó más condiciones ó circunstancias.

Cómo se divide la regla de tres simple? En directa é inversa.

Cómo se resuelve la regla de tres? Aplicando la Regla del Sr. Lacroix por considerarla la más sencilla, dice así: "el término menor de la primera especie, es al término mayor de esta especie, como el término menor de la segunda especie, es al término mayor de esta segunda especie."

Cuándo una regla de tres será inversa? Cuando cada término aumenta ó disminuya y á su correspondiente le sucede lo contrario.

Cómo se resuelve una regla de tres compuesta? Descomponiéndolas en varias reglas de tres simples y formando una sola proporción, para lo cual se suprimirán todas las cantidades desconocidas y se averiguará la principal.

Ejemplos:

Directa.

Si 40 metros cuestan 150 pesetas ¿qué costarán 14 metros?
40 : 150 :: 14 : X ; X = 52, 50

Inversa.

Si 8 obreros hacen una obra en 40 días, para construirla en 16 días qué número de obreros serán necesarios? 16 : 40 :: 8 : X ; X = á 20 obreros.

Compuesta.

Si 10 hombres en 14 días han hecho 50 varas de tela, 6 hombres en 8 días ¿cuántas harán?

$$\left.\begin{array}{r} 10 - 14 - 50 \\ 6 - \ \ 8 - X \\ \hline X = \dfrac{6 \times 8 \times 50}{10 \times 14} \end{array}\right\}$$

Demostración.

$$\begin{array}{c} 10 : 6 :: 50 : X \\ 14 : 8 :: X : t \\ \hline X = \dfrac{6 \times 8 \times 50}{10 \times 14} \end{array}$$

Téngase especial cuidado en los ejemplos prácticos de la regla de tres, parece que muchos pueden resolverse por esta regla y no sucede así, como se vé en este caso. En Frómista se han satisfecho 1500 pesetas por un pozo que consta de 25 piés de profundidad ¿cuánto importaría si el pozo tuviera 50 piés de profundidad? Esta no es regla de tres; porque el pozo costaría más que el duplo de las 1500 pesetas al llegar á los últimos 12 piés, éstos costarían más que los 38 primeros, pues á medida que aumenta la profundidad, el trabajo es más costoso.

Puede emplearse otro procedimiento para resolver la regla de tres? Sí, señor, por reducción á la unidad. Ejemplo 4 obreros han hecho una obra en 16 horas, un obrero haría 16×4 y 8 obreros harían $\frac{16 \times 4}{8} = 8$.

Regla de interés.

Qué es regla de interés? La que no solo tiene por objeto averiguar el interés que una cantidad reditúa, sino el capital, el tanto por ciento, el tiempo y el rédito.

Qué clasificación se hace de la regla de interés? En simple y compuesta.

Cuándo es la regla de interés simple? Cuando al capital no se le agrega el rédito, ó este depende sólo del capital y del tiempo.

Y compuesta? Cuando al capital se le agregan los réditos sucesivos para que devenguen los intereses correspondientes en dos ó más años.

Cómo se resolverá la regla de interés? Como una regla de tres simple, si el rédito depende solo del capital y del tiempo y por una regla de tres compuesta cuando al capital se le agregan los réditos.

Podrá V. presentarme algunos casos y la manera de resolverlos? Sí, señor.

Cuánto producirán 2000 reales al 5 por ciento en un año? Se multiplica el tanto por el capital y el producto se divide por 100 $\frac{2000 \times 5}{100} = 100$ reales.

Qué capital en un año ha producido 100 reales al 5 por ciento? Se multiplica el rédito por 100, su producto se le divide por el tanto $\frac{100 \times 100}{5} = 2000$ reales.

Cuál será el capital que al 6 por ciento ha producido en 3 años 2000 reales? Se multiplica el interés producido por 100 y su producto se le divide por el tanto multiplicado por el tiempo $\frac{2000 \times 100}{3 \times 6} = 11{,}11$.

Cuál será el tanto por 100 de 3000 reales para producir en 9 meses 500 reales? Se multiplica el rédito producido por 100 y por 12 meses que tiene el año y el producto se divide por el capital multiplicado por el tiempo $\frac{500 \times 100 \times 12}{3000 \times 9}$ 22, 22.

Qué tiempo habrán necesitado 6000 reales para producir 600 al 2 por 100? Se multiplica el rédito producido por 100 y su producto se divide por el capital multiplicado por el tanto $\frac{100 \times 600}{6000 \times 2} = 5$ años.

Cuánto producirán 2000 reales al 5 por 100 en 4 años? Se multiplica el tanto por 100 por el capital y el tiempo y su producto se divide por 100. Ejemplo. $\frac{5 \times 2000 \times 4}{100} = 400$ reales.

A qué tanto por 100 habrán impuesto 2000 reales para producir 200 en un año? Se multiplica el interés que ha producido por 100 y su producto se divide por el capital. $\frac{200 \times 100}{2000} = 10$ por 100.

Por último, 2000 reales al 5 por ciento en tres años interés compuesto, ¿cuánto producirán?

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 5 \\ \hline 100{,}00 \end{array} \text{ 1.}^{\text{er}}\text{ año.} \qquad \begin{array}{r} 2000 \\ +\ 100 \\ \hline 2100 \\ 5 \\ \hline 105{,}00 \end{array} \text{ 2.}^{\text{o}}\text{ año.} \qquad \begin{array}{r} 2000 \\ +\ 100 \\ +\ 105 \\ \hline 2205 \\ 5 \\ \hline 110{,}25 \end{array} \text{ 3.}^{\text{er}}\text{ año.}$$

Regla de compañía.

Qué es regla de compañía? La que enseña á determinar la ganancia ó pérdida de varios socios que han reunido sus capitales por un mismo ó diferente tiempo para hacer una especulación.

Cómo se clasifica la regla de compañía? Simple y compuesta.

Cuándo es la regla de compañía simple? Cuando los capitales están por un mismo tiempo en la sociedad. Y compuesta cuando lo están en diferente tiempo.

Cómo se resolverá la regla de compañía simple? Se formarán tantas proporciones como socios haya, poniendo por primer término la suma de los capitales, por segundo la ganancia ó pérdida y por tercero el capital de cada socio. Ejemplo: Tres compañeros reunieron sus capitales para hacer una especulación:

$$\text{Ganancia 30 duros.}\left\{\begin{array}{lr} \text{el primero puso} & 80 \text{ duros.} \\ \text{el segundo} \quad — & 60 \quad — \\ \text{el tercero} \quad — & \underline{20} \quad — \\ & 160 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 160 : 30 :: 80 : x = 15 \\ 160 : 30 :: 60 : x = 11,25 \\ 160 : 30 :: 20 : x = \underline{3,75} \\ 30,00 \end{array}$$

Cómo se resuelve la regla de compañía compuesta? Se formarán tantas proporciones como socios haya, poniendo por primer término la suma de los capitales multiplicado por el tiempo, por segundo la ganancia ó pérdida y por tercero el capital de cada socio multiplicado por el tiempo. Ejemplo: Tres compañeros formaron sociedad; al efecto, el primero puso en fondo 80 duros por seis meses, el segundo 60 duros por tres meses y el tercero 20 duros por dos meses, perdieron 30 duros ¿cuánto perdió cada uno?

$$\text{Pérdida 30 duros.}\left\{\begin{array}{r} 80 \times 6 = 480 \\ 60 \times 3 = 180 \\ 20 \times 2 = \underline{40} \\ 700 \end{array}\right.$$

$$700 : 30 :: 480 : x = 21,4$$
$$700 : 30 :: 180 : x = 7,7$$
$$700 : 30 :: 40 : x = 1,7$$

Cómo se dividirá un número en partes proporcionales? Sumando los números dados y dividiendo esta suma por el número, el cociente se multiplicará por cada uno de los números dados. Ejemplo: En una fábrica de hilados se entregaron por tres diferentes sujetos 30 libras de lana, 16 y 4 por el último, se tejieron 100 varas ¿cuántas corresponderán al de 30, 16 y 4?

$$\frac{100}{30+16+4} = \frac{100}{50}$$

$$\left.\begin{array}{l} = 2 \times 30 = 60 \text{ al primero.} \\ 2 \times 16 = 32 \text{ al segundo.} \\ 2 \times 4 = 8 \text{ al tercero.} \end{array}\right\} \text{Suma total} = 100.$$

Regla de aligación.

Qué es regla de aligación? La que enseña á averiguar, mejor dicho á determinar el precio medio y la que establece comparaciones entre las cantidades que entran en la mezcla y su precio.

Qué problemas comprende la regla de aligación? Dos: Averiguar el precio medio el 1.º y determinar las cantidades que han de mezclarse el 2.º

Cómo se resolverá el primer caso? Se multiplican las cantidades por sus respectivos precios, la suma total de estos productos se divide por la de las especies, el cociente expresará el precio medio. Ejemplo: 30 cántaros de vino á 12 reales, 20 de á 8 reales y 16 de á 5 reales ¿cuál será el precio medio? = 9,09.

$$\begin{array}{rcl} 30 \times 12 &=& 360 \\ 20 \times 8 &=& 160 \\ \underline{16} \times 5 &=& \underline{80} \\ 66 & & 600 \end{array} \qquad 600 : 66 = 9,09$$

Cómo se resolverá el segundo caso? Cuando existen igual número de precios mayores que menores, se compara el mayor con el menor y vice-versa, pero cuando no existe más que un precio mayor y dos menores se compara el mayor dos veces. Ejemplos.

Tenemos harina de 70 reales, de 40 y de 30; se desea hacer una mezcla para poder venderla á 60 reales ¿qué cantidades deberán mezclarse?

60	70—20+30—50	Tenemos	80 cántaros de vino	10
	40 10	Precio medio	60	30
	30 10	50	40	30
			20	10

Por esta operación resulta que por cada 50 cántaros hemos de poner 10 de 80, 30 de 60, 30 de 40 y 10 de 20.

Regla conjunta.

Qué es regla conjunta? La que conociendo varias igualdades relacionadas entre sí nos enseña á determinar, ya el primer miembro, ya el segundo.

Ejemplo:

A cuánto serán equivalentes 30 varas de tela, sabiendo que 8 metros valen 32 reales y que 4 metros equivalen á 6 reales.

X reales = 30 varas.
6 reales = 4 metros.
8 metros = 32 reales.

$$X = \frac{30 \times 4 \times 32}{6 \times 8}$$

Falsa posición.

Qué es regla de falsa posición? La que enseña á averiguar el resultado verdadero por medio de un número que suponemos. Para resolverla se tendrá presente la regla que sigue: resultado obtenido con el número supuesto, es al número supuesto, cuyo número cuyas propiedades conocemos, es igual á X. Ejemplo: De una panera que tenía un labrador robaron la tercera y quinta parte de trigo, quedando existentes 3920 fanegas ¿cuántas tendría? Supongamos por falso supuesto el número 30, cuyas tercera y quinta partes son 10 y 6, sumadas éstas dan un total de 16, restando esta suma del falso supuesto 30, quedan 14, formando la proporción $14:30::3920:X=\frac{3920\times30}{14}=8400$ fanegas

PRUEBA:

	3.ª parte de 8400.	2800
	5.ª íd. de íd.	1680
		4480 que unidas
	á las	3920 existentes
	suman	8400 fanegas que

tenía el labrador ántes que se las robaran.

FIN.

PRECIO.

Ejemplar. . . . 35 céntimos de peseta.

Docena. . . . 4 pesetas.