ENSAYO

SOBRE

LA CIENCIA Y ARTES DEL DIBUJO.

POR

Don José de Odriozola,

Capitan del Real Cuerpo de Artillería, y académico de la Real Academia de nobles artes de San Fernando.

MADRID:
IMPRENTA QUE FUE DE GARCIA, calle de Jacometrezo, número 15,

1831.

PRÓLOGO.

La narracion mas exacta y circunstanciada suele ser insuficiente para poderse formar por ella una idea exacta de la figura que tiene un objeto, si al mismo tiempo no vemos este ó alguna imágen suya, bien sea dibujada sobre alguna superficie, bien sea en bajo relieve ó de bulto completo de dimensiones arregladas á las del natural: por cuya razon se dice que el dibujo es un lenguaje necesario para espresar ideas de lo figurado. Unas veces interesa manifestar la forma del objeto con toda la semejanza posible á la verdadera, y otras veces la forma que aparece á nuestra vista, que segun conoceremos adelante es distinta de la primera; de aquí vienen dos sistemas de dibujo, el uno llamado *geométrico* ó *en real*, y el otro *óptico* ó *perspectivo* ó *natural.*

Hay medios de representar perfectamente de ambos modos las faces de los cuerpos, y tambien las composiciones arbitrarias ó *escenas* que con ellos se forman: las reglas proceden de la Geometría, y por consiguiente son las mas exactas que se pueden apetecer. Aunque los principios que constituyen la ciencia del dibujo se pudieran fundar con mucha elegancia en las nociones geométricas tratadas con aquella sublimidad, que los modernos han creado introduciendo el lenguaje del cálculo algébrico; el dibujante necesitaria en este caso mas tiempo de estudio para llegar hasta la inteligencia de la locucion. Por esto, y con el fin de hacer útil el libro para el mayor número posible de individuos, he desistido de aquel método que me ha suministrado las verdades, y he adoptado el descriptivo, traduciendo las demostraciones á figuras que dicen lo mismo en lenguaje de la Geometría elemental, en que supongo estar medianamente instruido el dibujante. Siempre que parezca útil recordar algun principio de esta ciencia, citaré el artículo de mi curso de Matemáticas, en donde se halle demostrado.

Se podrá objetar á este ensayo diciendo, que si tanto estudio y tiempo se necesita, solo para penetrar los fundamentos, el resto de la juventud apenas basta para llegar á modificar la vista y hacerla capaz de valuar por sí las dimensiones y los colores de los objetos, en lo cual consiste la destreza del artista que profesa el dibujo natural: y mas, cuando el anatómico y el naturalista en general, serán en la observancia de sus doctrinas, unos censores que notarán toda falta de propiedad en la organizacion de los seres representados en el cuadro: y por otra parte, el filósofo y el poeta le criticarán las obras, si no discurrió debidamente en la eleccion de asuntos y en la belleza de escenas y objetos. Hemos de confesar ingenuamente las dificultades que se presentan para la formacion de un buen profesor; pero no es posible abreviar su carrera sin tropezar en el escollo de que sea rutinero é incapaz de contestar demostrativamente á los críticos de sus producciones.

Tal vez se echarán de menos en esta obrita aplicaciones de las doctrinas á la representacion de aquellos objetos mas comunmente dibujados: el arquitecto no verá grandes y suntuosos edificios, ni el pintor escenas animadas, ni el militar fortificaciones y máquinas de guerra; pero estoy seguro de que, entendidas las cortas lecciones que como un apasionado de las artes les ofrezco, no hallarán dificultad alguna en dibujar las composiciones mas dificiles que la naturaleza ó el arte les pueda presentar;

pues la cuestion está reducida siempre á situar un punto en el cuadro debidamente.

Bien conozco que, si despues de esplicar las teorías del dibujo con sus aplicaciones respectivas á objetos sencillos, aunque propios como se verá, siguiesen otras aplicaciones pomposas en grandes láminas, tendria mas visualidad la obra; pero he atendido á que el precio de ella sea bastante cómodo para todos los que desearen comprarla. Esta es la causa tambien de haber incluido en cada lámina muchas figuras, y de que por consiguiente hayan resultado estas muy pequeñas, confiando en que los profesores de las clases de dibujo las harán copiar con escala mayor á sus discípulos.

Consta de tres partes el tratado: la primera es una noticia sucinta de algunos fenómenos ópticos, que son indispensables para esplicar cómo ve los objetos el hombre, y cómo la luz los ilumina: la segunda parte abraza lo perteneciente al dibujo geométrico; y la tercera consiste en las teorías y prácticas de la perspectiva ó dibujo natural. Ademas, cada parte va dividida en asuntos y subdividida en artículos, como he creido conveniente para la claridad, y porque así se citará cuando convenga el artículo en que se haya demostrado alguna proposicion.

José de Odriozola.

PARTE PRIMERA.

Noticia sucinta de algunos fenómenos ópticos.

ASUNTO PRIMERO.

De la luz y vision humana.

1. Todo espectáculo seria para nosotros invisible si faltase la presencia de la *luz*, fluido que los *cuerpos luminosos* despiden ácia todas partes, resultando de cada cuerpo de éstos un globo luminoso cuyo núcleo es el manantial del fluido.

Por la esperiencia consta que la emanacion y propagacion de la luz es en línea recta, segun lo manifiesta el hecho siguiente. Dispóngase un aparato de varios hilos de alambre muy delgados y rectos, colocados paralelamente y dirigidos àcia el cuerpo luminoso; y se observará que ocultan los puntos lucientes que se hallen en las prolongaciones respectivas de ellos. Por esta ra- fig. 1.
zon llamamos *rayos luminosos* à todos los imaginables de la masa esférica de luz engendrada por cada punto luminoso, y se deben considerar como líneas rectas para todas las investigaciones geométricas relativas á ellos.

Los fenómenos celestes han dado tambien á conocer que no es instantánea la propagacion de la luz, esto es, que tarda algun tiempo en venir desde el cuerpo que la despide hasta las diferentes distancias en que ejerce su influencia; pero esta propiedad no interesa para nuestro actual asunto.

2. Se llaman *opacos* los demas cuerpos, y reside en ellos la propiedad de rechazar alguna parte de la luz recibida, absorviendo la restante, y en algunos tambien la de dar paso á la que absorven; ó hablando en términos técnicos, la propiedad de *reflejar* y de *refractar* los rayos luminosos. Por lo cual se distingue la luz con diversos nombres, llamándose *directa* cuando viene del orígen luminoso; *refleja* cuando viene rechazada por una superficie á que está encaminada la directa; y *refracta* cuando viene despues de haber atravesado por un cuerpo traslúcido que dió paso á la directa.

De dos diferentes modos se verifica la reflexion en la superficie de los cuerpos opacos; pues cada punto de ella á manera que en el cuerpo luminoso despide ácia todas partes rayos, llamados *visuales* porque su impresion en nuestra vista ocasiona la sensacion y la idea de dicho punto; mientras otra parte del fluido reflejado que vulgarmente se llama *reflejo*, produce la imágen del cuerpo luminoso. En adelante llamaremos directos á los rayos precedentes del punto luminoso y á los visuales producidos por todos los cuerpos; dando el nombre de reflejados á los que despide la superficie segun la ley que vamos á manifestar.

3. Siendo L un punto luminoso ú opaco, y LM fig. 1. uno de sus rayos directos que se dirige al punto M de una plancha pulimentada AB horizontal, como tambien ME el rayo reflejado ácia el espectador E; hágase pasar un plano por los tres puntos E, M, L, y se verá que este plano es vertical. Aun cuando la posicion del plano pulimentado sea cualquiera, por la misma ley se verifica que *el rayo directo y su correspondiente reflejado se hallan siempre en un plano perpendicular al reflejante ó de incidencia.* Se observa tambien que el ángulo LMB es igual á EMA; y dirigiendo MN

perpendicular al plano, se llama *LMN ángulo de incidencia*, *EMN ángulo de reflexion*: y como es $LMN = EMN$, se tiene por una verdad evidente *que el ángulo de incidencia y el de reflexion son iguales*; de que se deducen varias consecuencias.

I.ª Si el rayo *LM* incidente viene perpendicular al plano, coincidirá con el reflejado; y segun vaya siendo aquel mas oblicuo se irà este apartando, hasta el caso de que el rayo incidente llegue á ser paralelo al plano y siga la misma direccion de la superficie sin reflejarse.

II.ª El espectador *E'* verá en *M'* el objeto *L*; el *E''* verá en *M''*, etc. Si *L* es cuerpo luminoso, se llama *brillo ó resplandor* la imágen *M'* ó *M''*; y si es opaco se llama *imágen* simplemente, como sucede con los objetos vistos en un espejo. fig. 2.

III.ª Si el deseo del espectador es ver en el plano pulimentado *AB* la imàgen del punto *L* luminoso ú opaco, debe situarse en direccion del perpendicular *LME*; pero si quiere ver el mismo objeto *AB*, ha de mirarle desde fuera de dicho plano perpendicular que pasa por el punto luminoso, para que no se lo impidan los rayos reflejados. fig. 1.

La reflexion se verifica en la superficie de los cuerpos en virtud del choque de la luz, como algunos opinan, ò por una fuerza repulsiva dimanada del mismo objeto iluminado segun otros; y cuando es traslúcido el cuerpo, hay otra reflexion en el segundo punto en que el rayo incidente despues de la imersion debe necesariamente encontrar á la superficie opuesta de dicho cuerpo.

4. Tambien se verifica la refraccion del rayo en los dos puntos de la superficie por donde entra y sale en el cuerpo traslúcido, rompiéndose digámoslo asi en el primero, y siguiendo despues en línea recta hasta el segundo, en que se vuelve à romper para tomar nueva

marcha rectilínea segun su naturaleza: esto acreditan los esperimentos; y el càlculo valiéndose de ellos y de las combinaciones químicas de las distintas materias establece la ley de las refracciones.

fig. 3. Siendo LR un rayo que emanado del punto L encuentra oblicuamente á la superficie AB del cuerpo diáfano AD, y RR' el mismo rayo refractado en la imersion, el observador notará los fenómenos siguientes.

1.º *El rayo directo y el refractado estan en un plano perpendicular al de incidencia AB.*

2.º Dirigiendo la recta NRM perpendicular à AB, el ángulo LRN, se llama de *incidencia*, y el MRR' *de refraccion*; y las observaciones hacen ver que *el rayo refractado RR' se acerca á la perpendicular en el paso desde un medio á otro mas denso;* é inversamente, *que se separa de la perpendicular al pasar á otro medio menos denso*, escepto en algunas sustancias cuyo grande poder refrigente respecto de otras hace variar esta ley. Lo mismo sucede con RR' y $R'H$ en la segunda refraccion al salir del cuerpo, en donde el rayo RR' es el incidente y sale en la direccion $R'H$ separándose de la perpendicular, por ser menos denso el aire que el cuerpo refractante.

En esta esperiencia se observarà tambien que el rayo al refractarse en R se descompone en fajas de diversos colores, como el íris, dispersándose en el espacio angular cuyo vértice está en R; y para remediar tal accidente, que seria muy perjudicial à la vision, los instrumentistas de óptica sobreponen un cristal á otro, de modo que se recomponga la luz. Se llama *acromatismo* esta operacion, y *acromático* el instrumento por cuyo cristal pasa la luz sin descomponerse.

3.º Si el rayo se dirige con cualquiera inclinacion á

un prisma de caras AB y CD paralelas, la observacion y el càlculo hacen ver que en la incidencia LR fig. 4.
y en la salida $R'H$ está el rayo igualmente inclinado ácia la recta LOH, dirigida desde el punto radiante L al medio O del imerso.

4.° Cuando el prisma es triangular, el rayo en sus dos refracciones se inclina ácia la parte mas gruesa, fig. 5.
como se ve en la figura 5 que representa una seccion ABD perpendicular á las aristas longitudinales del prisma.

La inclinacion del rayo incidente sobre las superficies curvas, se valúa por la que tiene respecto al plano tangente en aquel punto; y pudiéndose considerar que en fig. 6. 7.
las superficies curvas, cuyos perfiles representan las figuras 6 y 7, forman los planos tangentes unos prismas, cuyos gruesos estan ácia EE' en el primer cuerpo, y ácia los estremos AD y BC en el segundo, los rayos refractados se inclinan ácia el lado del grueso de dichos prismas; influyendo precisamente en esta convergencia ó divergencia del rayo refractado la curvatura de la superficie refractante.

Veamos cuál es la refraccion en el cuerpo trasparente AB, terminado por dos superficies esféricas igua- fig. 6.
les AEB y $AE'B$, que se llama *lente* por la semejanza que tiene con la lenteja. Siendo EF el eje de las dos superficies, y haciendo en el lente una seccion AB con un plano AEB que pase por EF, se observa que de los rayos LM, LM, LM,.... paralelos al eje, el LE que coincide con éste no se rompe en la entrada ni salida, de suerte que sigue siempre la misma direccion: lo cual es conforme al fenómeno 3.°, pues los planos tangente en E y E' son paralelos. Los demas rayos segun caen mas separados del eje padecen refraccion mayor, para venir despues de la segunda á

concurrir con el eje en los distintos puntos $F, F' F''$,... conforme al fenómeno 4.°.

fig. 8. Cuando la curvatura de la superficie es poca respecto de su estension, se concentran cerca de un punto F muchos rayos; por lo cual, este se llama *focus principal* del lente. Es fácil inferir que para la perfecta concentracion de los rayos refractados que hubiesen venido paralelamente al eje, y lo mismo aunque sea cualquiera su incidencia, como despues se observará, es conducente que se cubra con alguna faja opaca la parte C C.... mas distante del eje, y admitir solamente los rayos que formen pequeño ángulo con él.

fig. 9. Como cada punto L del objeto despide rayos en todas direcciones, indaguemos las circunstancias que convendrá tenga el lente para que todos estos rayos que recibe de los puntos del objeto se concentren despues de su refraccion en la forma conveniente, á fin de que la série de puntos de concurso resulte con el mismo órden que la série de puntos radiantes del objeto.

Si elegimos cada punto de estos poco separado del eje D E, y de sus rayos solamente los que pueden herir en un pequeño espacio al rededor de E, en un lente de poca curvatura y muy delgado cuyas caras pueden considerarse cuasi paralelas; no puede menos de suceder por el fenómeno 3.°, que los rayos emanados de cada punto L vayan despues de su refraccion á reunirse muy cerca de un punto G de la recta L E G que pasa por el centro O del lente. Se llama *focus particular* del punto L radiante el G en que se forma la imágen de aquel; é igual efecto resulta en G' respecto de L'; de modo que concibiéndose la continuidad de puntos en la recta L L' radiante, su imágen se hallará en G G' invertida en cuanto à la posesion del todo, pero con la série de focus organizada desde un estremo á

ℓ LOG

ℓ posicion

otro por el mismo órden con que estan los puntos correspondientes del objeto.

Todas las circunstancias que contribuyen à la concentracion de rayos procedentes de un punto L en su focus particular, son necesarias para que sea clara y distinta la imágen G de L, puesto que sin ellas los rayos refractados en los estremos del lente no irian á concurrir en un mismo punto de la recta $L\,G$, sino en distintos puntos de esta recta, y asi resultaria una confusa imágen de L. Verificándose pues dichas circunstancias respecto de todos los puntos del objeto, sea línea ó superficie, resultará la série de sus focus particulares en la disposicion conducente para que la imágen sea clara, bien terminada y exacta.

5. El ojo humano está organizado propiamente para que se verifique todo esto con admirable perfeccion: se reduce á un lente natural E que nada en cierta fig. 10. sustancia mucosa contenida por membranas, formando un cuerpo convexo $A\,E\,B\,G\,G'$...... de tal modo que los rayos visuales despues de atravesar el lente, van á formar la imàgen del objeto en la pared interior $G\,G'$ llamada *retina*, en donde estan arraigados los nervios conductores de la sensacion. Como obra de la divina sabiduría, no solo tiene la propiedad que se ha dicho, sino tambien la del acromatismo, ó de corregir la descomposicion de la luz en colores, la de aumentar ò disminuir la convexidad de la superficie del lente E hasta ciertos límites, para que las imágenes de los objetos situados á cualquiera distancia vayan siempre á pintarse con la posible determinacion en la retina, y la de presentar siempre el lente como es debido al mirar, sea que el objeto esté alto, bajo ó ácia los costados del individuo.

El ángulo $L\,O\,L'$ que forman en el centro O del fig. 11.

lente los rayos visuales emanados de los estremos L y L' de una línea $L\,L'$, se llama *ángulo óptico*, y la recta $D\,O$ que divide á dicho ángulo en dos partes iguales es el *eje óptico*, nombre que tambien se da al eje de la pirámide ò cono visual que forman los rayos terminales despedidos por una superficie. Los triàngulos $G\,O\,G'$ y $L\,O\,L'$ semejantes dan la proporcion,

$$G\,G' : O\,D' :: L\,L' : O\,D;$$

y por ser constante la distancia $O\,D'$ entre el lente y la retina, como tambien la estension $L\,L'$ del objeto, se sigue que *la magnitud de la imágen resultante en la vision está en razon inversa de la distancia entre el ojo y el objeto lineal á que se mira.* Esta es la causa de que un objeto parezca tanto mas pequeño cuanto mas lejos esté del espectador; y de llamarse *magnitud aparente* la que resulta en la vision. Como la imágen serà comunmente menor que el objeto, necesita el hombre una larga práctica desde su infancia para valuar por la vista la magnitud del objeto que ve; habilidad que adquiere con el auxilio de los demas sentidos, y desengañándose con el ejercicio en resolver problemas de esta clase.

El espectador deseoso de percibir la idea de todas las particularidades visibles del objeto que tiene delante, se va acercando á éste cuanto puede habitualmente; pero es preciso tener entendido que, si bien le conviene acercarse mucho para distinguir cada parte diminuta, le puede perjudicar para el goce simultàneo de todo lo que ofrece el espectáculo total; es decir, que debe tener un límite el ángulo visual $L\,O\,L'$ para ser visto el objeto $L\,L'$ con una mirada, por las razones espuestas en el artículo (4). La esperiencia enseña que cuando el espectador quiera ver á un mismo tiempo todo lo principal que ofrece un espectàculo en toda su estension, conviene que no se acerque á él mas

que hasta ser poco mas ó menos semirecto el ángulo $L\,O\,L'$; pues á menor distancia será mayor este ángulo, y de consiguiente sus lados, que son los rayos visuales estremos, y aun los contiguos á estos, vendrán á la vista muy separados del eje òptico, circunstancia contraria á la vision (4). Por tanto, à fin de conciliar los dos deseos de que la imágen sea grande y al mismo tiempo circunstanciada, conviene que adoptemos el caso de ser el ángulo visual semirecto; y vamos á determinar cual sea la distancia à que habrá de colocarse el espectador segun dicha condicion. Espresando con R el àngulo recto, será $\frac{1}{2}\,R$ el ángulo visual adoptado, y $\frac{1}{4}\,R$ su mitad $D\,O\,L$; y por la propiedad trigonométrica del triángulo $L\,D\,O$ tendremos la proporcion $L\,D : D\,O :: \mathit{seno}\ \frac{1}{4}\,R : \mathit{coseno}\ \frac{1}{4}\,R$, y duplicando las antecedentes, $L\,L' : D\,O :: 2 \times \mathit{seno}\ \frac{1}{4}\,R : \mathit{coseno}\ \frac{1}{4}\,R$. Si se registran las tablas trigonométricas y las de logaritmos se hallará, que suponiendo igual á 10 el seno del àngulo recto R, el seno de $\frac{1}{4}\,R$ es algo mayor que 3, y el coseno de $\frac{1}{4}\,R$ algo mayor que 9. De resultas, despreciando las partes fraccionarias, la proporcion viene á ser $L\,L' : D\,O :: 2 \times 3 : 9$;
y finalmente, reduciendo los términos de la segunda razon queda $L\,L' : D\,O :: 1 : 1\frac{1}{2}$;
demostracion de que *la distancia desde el ojo al objeto ha de ser tanta, á lo menos, como vez y media la mayor estension lineal de éste, para que resulte una bien terminada y clara imágen de todo él en la retina, al dirigir el espectador su mirada.*

ASUNTO II.

Fuerzas con que hieren los rayos luminosos y visuales.

6. La diversidad de incidencias con que los rayos luminosos llegan á la superficie de un cuerpo, ocasiona la variedad de claros y oscuros que se observa en ella, y que determinaremos en el artículo siguiente.

El valor del ángulo de incidencia depende de dos causas: 1.ª de la posicion y magnitud del cuerpo luminoso respecto del opaco: 2.ª de la figura que tenga éste, y posicion en que se halle respecto del luminoso: y segun estas circunstancias es la figura de la columna luminosa que va de uno á otro, compuesta de rayos cuyas direcciones vamos à tomar en consideracion desde luego.

fig. 12. Cada punto de la superficie *A C* es vértice de un cono formado por las tangentes tiradas desde él al cuerpo luciente, de quien recibe todos los rayos que componen la masa luminosa del cono: y al mismo tiempo cada punto de dicho cuerpo es vértice de otro cono ò pirâmide terminado en la superficie: de suerte que el conjunto de todos estos conos forma la figura *L A C* del fluido luminoso capaz de ejercer su accion directa en dicha superficie. Si es cilíndrico el volúmen fluido, se podrá considerar como un conjunto de rayos paralelos á *L B*, lado del cilindro: y si es cónico, la inclinacion de ellos será tanto menor cuanto sea la diferencia de bases, permaneciendo constante la distancia *L B*; ò à bases constantes, cuanto mayor sea *L B*. Por esta última circunstancia se consideran paralelos en el dibujo los rayos venidos del sol á los cuerpos terrestres, pues la diferencia que puede haber de paralelismo y de sus efectos es invaluable en la mayor ò menor escena que un dibujante se pueda proponer, á causa de la inmensa distancia à que se halla de la tierra el ástro.

En los tres sistemas de luz, esto es, de rayos divergentes, paralelos y convergentes, parte de la superficie opaca aparece iluminada y parte oscura. Ademas, la continuacion de la columna luminosa *L A C*, despues del cuerpo *A B C* opaco, es la *A C S* oscura, é imprime en las superficies á que encuentra una *sombra S* llamada *esbatimento* por las artistas; cuya determinacion y la del *claro-oscuro* de la superficie *ABC*, será el asunto de las investigaciones que siguen. A esta mancha del esbatimento circunda una faja menos oscura *P* llamada *penumbra*, que resulta de semiprivacion de rayos en esta parte á donde llegan incompletos los rayos luminosos, porque algunos de ellos estan interrumpidos en *A B C* y otros no. Atendiendo à las causas de mayor ó menor divergencia de lados de la columna oscura, es fácil conocer que cuanto mas dista del cuerpo luminoso el opaco, tanto menor es la penumbra; y por esto se considera muy poco estensa en el sistema de rayos paralelos que se suponen procedentes del sol.

7. La luz se dirige á chocar en las superficies con cierta fuerza que depende de su densidad, la cual se va disminuyendo sucesivamente en la columna luminosa por la dispersion que padecen los rayos conforme se van alargando desde el punto luminoso que los despide. Pero nuestro objeto no es por ahora el valuar la fuerza que la luz en sí trae, sino la que cada simple rayo puede ejercer en la superficie á quien ilumina, en virtud de la inclinacion con que llega. Y asi, dejando para mas adelante (9) el hacer un cálculo aproximativo de esta fuerza segun las distancias que haya entre el cuerpo luminoso y el iluminado; vamos à indagar la fuerza de presion que la luz ejerce sobre éste, segun la inclinacion del rayo respecto de una parte superficial plana en donde choca.

Por las reglas de mecánica se sabe que podemos re-
fig. 13. presentar por número ó por una recta $M N$ cualquiera cantidad de fuerza: y segun dicha ciencia, la fuerza $M N$ que se dirige contra un plano $A'B'$ le hiere con una intensidad, que se llama de *presion*, cuyo valor es el cateto $M G$ perpendicular al plano en el triàngulo $M G N$ trazado sobre la hipotenusa $M N$. En dicho triángulo rectángulo $M G N$ se verifica la proporcion

$$M G : seno\ M N G : : M N : seno\ total.$$

Si el rayo $M N$ chocare en otro plano $A'' B''$; construyendo tambien sobre la hipotenusa $M N$ el triángulo rectángulo $M H N$ se verifica,

$$M H : seno\ M N H : : M N : seno\ total;$$

y por igualdad de razones se forma la proporcion final

$$M G : M H : : seno\ M N G : seno\ M N H.$$

Luego, *la fuerza con que hiere un rayo luminoso al plano que le recibe, es proporcional al seno del ángulo que forma con él:* y se deducen de aqui las siguientes consecuencias.

I.ª *La mayor presion ó claridad será cuando el rayo es perpendicular al plano, como* $A B$; *é irá disminuyéndose á medida que el plano vaya tomando las posiciones* $A' B'$,.... *mas oblicuas, hasta que en* $A''' B'''$, *prolongacion del rayo, la presion será nula, y de consiguiente habrá oscuridad.*

fig. 14. II.ª *De la infinidad de rayos* $L M$, $L M'$,..... *emanados de un punto luminoso* L *ácia el plano* $A B$, *causará máxima claridad el perpendicular* $L M$, *y mínima el mas separado de él* (Geom. 18)*: de modo que la claridad del plano se irá disminuyendo insensiblemente desde el punto en que recibe al primero hasta donde recibe al segundo.* Por esta razon, el punto M mas inclinado de una superficie plana se encuentra dirigiendo á ella descritivamente la perpendicular $L M$

desde el punto L luminoso, como se dirà mas adelante.

III.ª *Los rayos* LM, $L'M'$..... *paralelos, cuya fuerza ó intensidad sea constante, causarán iguales presiones en un plano; es decir, que en el sistema de iluminar las escenas por una columna luminosa cilíndrica, ó sea de rayos paralelos, un plano gozará del mismo grado de claridad en toda su estension.*

IV.ª *Un poliedro tendrá unas caras mas iluminadas que otras, sea el sistema de rayos cualquiera: la mas clara será quien los reciba con menos inclinacion, y la mas oscura* (respecto de la luz directa) *quien los reciba mas oblicuos.* Aun habrà otras caras en que la luz directa no choque por la interposicion del mismo cuerpo; mas, podrán recibir la influencia de la que venga reflejada de otras superficies vecinas: y aplicando á esta nueva luz la misma doctrina se puede concluir, que *la parte mas oscura de una superficie será la que menos partícipe de la influencia de ambas luces, directa y refleja.* fig. 15.

La geometría elemental presta medios de hallar descritivamente el àngulo que forma el rayo con el plano (Geom. 159, IV.°); y para este objeto es útil el instrumento dibujado en la figura, el cual consiste en el semicírculo ELF perpendicular á otro plano EF á que está unido, teniendo ademas el radio DL movible. Cuando se haya de usar se aplica EF al plano MN, cuya claridad se quiere valuar, en disposicion que el rayo luminoso coincida con el plano del semicírculo, y en tal estado se sitúa DL en direccion del rayo luminoso para medir el ángulo LDE que forma dicho rayo con el plano MN. fig. 15.

Cuando la superficie que recibe luz es curva, se aplican los mismos principios para valuar la presion del fluido en cada punto de ella, pero apreciando la inclinacion del rayo por el ángulo que formaria con un plano tangente á la superficie curva en dicho punto: y como las posiciones de los planos tangentes à una superficie curva en sus diversos lugares varian en general de un punto à otro, se deducen las consecuencias que siguen:

V.ª *La superficie curva tendrá claro solamente un*
16. fig. 17. *punto R, como en las figuras 16 y 17, ó á lo mas una*
18. *línea RR′ en que sea tangente un plano perpendicular á los rayos cuando sean estos paralelos, como en la figura 18. Todos los demas puntos recibirán el rayo con tanta mayor inclinacion cuanto mas discrepe de recto el ángulo que forma el rayo con el plano; hasta que por último serán oscuros todos aquellos cuyo plano tangente coincida con el rayo.*

VI.ª *Los puntos M, H, N de contacto oscuros forman*
16. *en la superficie curva una línea MHN....., que será el*
fig. 17. 18. *concurso del cono ó cilindro luminoso con la superficie iluminada, y dicha línea es la divisoria entre la parte de la superficie que recibe luz con mas ó menos presion, y la parte que no la recibe directa; lo que sucede igualmente en toda superficie aunque no sea curva, entendiéndose entonces que la línea oscura es interseccion de la pirámide ó prisma luminoso y el cuerpo que recibe luz.* La superficie curva, y lo mismo el poliedro, pueden recibir en su parte privada de rayos directos otra luz que venga reflejada de los cuerpos vecinos; y los dibujantes suponen siempre que la recibe en efecto, para moderar la gran masa de oscuridad que sin ella resultaria muchas veces en los dibujos; y asi logran figurar perfectamente el relieve del bulto, imaginando que el reflejo viene en sentido contrario de la luz directa, segun deba despedirla algun otro cuerpo inmediato, quedando absolutamente oscura solamente la línea de los contactos men-

cionados. Los artistas llaman *tintas* á los grados diversos de claridad que corresponden à los planos segun su inclinacion respecto del rayo; y distinguen en su lenguaje cinco grados diferentes ò términos de la escala que se debe suponer entre el claro absoluto y el oscuro absoluto, cuyos lugares hemos hallado. Estos grados en la superficie curva de la figura 18 en sentido de una seccion curva son, *C claro*, *C' media tinta clara* á uno y otro lado del claro, *C'' media tinta oscura* despues de la clara, *O oscuro* ó punto de contacto del rayo tangente, despues de la media tinta oscura, y *O' reflejo* ú oscuro moderado con la luz refleja: y desde aqui por el otro lado del cuerpo vuelve á reproducirse la escala de las cinco tintas en sentido inverso hasta el claro. Cada término de estos en la escala sirve al dibujante de guia, para la infinidad de otros que debe interponer entre cada dos, á fin de hacer insensible el paso desde el claro al oscuro, y desde aqui al reflejo; de lo cual resulta lo que llaman *suavizado*. En los poliedros tambien sirven dichas cinco tintas para términos de comparacion, en la escala que deba resultar segun las inclinaciones del rayo, pero con la distincion de que en la arista queda interrumpida la tinta de cada plano: y los buenos dibujantes espresan las aristas de la parte que recibe luz directa ò refleja, con solo este paso repentino de una tinta á otra, como estan espresadas verdaderamente en el natural. 27

8. No es menos interesante para representar con propiedad la posicion y figura de un cuerpo respecto de otro imediato, el determinar la *sombra*, ó segun los artistas el *esbatimento* que causa el mas cercano à la luz fig. 16. 17.
en el mas lejano. La masa de luz, sea del cilindro ò prisma, sea del cono ó pirámide, figuras que resultan formadas por la infinidad de rayos tangentes á la que

recibe luz segun hemos dicho en la consecuencia VI.ª del artículo precedente, queda interrumpida en la línea del contacto ú oscuro absoluto; pero si consideramos prolongado dicho cilindro ó cono, la masa de aire contenida en su prolongacion es oscura: de suerte que otro cuerpo á quien encuentre recibirá el esbatimento *SS'*, cuyo contorno será la interseccion de la superficie de dicho cuerpo con el cilindro ó cono si fuere curva la línea de contactos, y con el prisma ó piràmide si fuere polígono dicha línea, como se indicó á fin del artículo (6). Por estas consideraciones vemos, que el medio mas fácil de hallar el contorno del esbatimento en cualquier sistema de rayos luminosos, y siendo cualquiera la figura y posicion del cuerpo que cause sombra, y de la superficie que la reciba, es marcar cada punto *S* de dicho contorno, correspondiente al rayo interrumpido por cada punto *M* de la línea de contactos: y este será el método que usaremos cuando llegue el caso (30).

9. Determinados los lugares de mayor claro y mayor oscuro, la graduacion de tintas correspondientes á cada parte de la superficie iluminada, y los esbatimentos que causan unos cuerpos en otros, fenómenos dependientes todos de la inclinacion del rayo respecto de la parte superficial que lo recibe; haremos las reflexiones prometidas al principio del artículo (7), acerca de la diminucion de intensidad que padecen los rayos luminosos y visuales conforme se van prolongando desde el cuerpo que los despide, tanto por la rarefaccion ó dispersion de los rayos, como por la multitud de pequeños cuerpos estraños que nadando en la atmòsfera interrumpen el curso de muchos rayos, y resarcen por otra parte en algun modo con sus reflejos la luz directa que quitan.

Para formar un càlculo aproximativo de lo que se debilita la luz por la dispersion de los rayos, supongamos cortado por planos paralelos á diferentes distancias el fajo cónico ó piramidal que sale del punto radiante; y haciéndonos cargo de que la capa luminosa de cada seccion va siendo mayor en razon del cuadrado de su distancia al vértice (Geom. 183 y 186), y que es una misma la cantidad de luz repartida en cada una de las secciones, debemos inferir que la densidad de la capa luminosa estará en razon inversa de la amplitud superficial de las secciones, esto es, en razon inversa de los cuadrados de sus distancias al vértice que es el punto luminoso. Segun esto, por la divergencia de los rayos la densidad de la luz á las distancias 1, 2, 3, 4, ... m sigue el órden de la série $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{m^2}$.

Atendiendo ahora á la densidad del aire por donde atraviesa el fajo, supongamos interceptada la n^{sima} parte de rayos en cada capa ó seccion, por los corpúsculos opacos que fluctúan en la atmósfera; y tomado por unidad el número de rayos de la capa mas próxima al cuerpo luminoso, será $\frac{1}{n}$ el número de rayos interceptados en ella, y $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ el de residuos: en la segunda capa será $\frac{n-1}{n^2}$ el número de rayos interceptados, y $\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ el de residuos: despues de la tercera capa los rayos residuos serán tambien $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$, y asi sucesivamente. De suerte que la densidad de la luz, sino hubiese mas causa que la interrupcion por la atmósfera para debilitar su fuerza, habia de seguir desde el orígen adelante por el òrden de la série

$$\frac{n-1}{n}\ ,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\ ,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^m.$$

Como á un tiempo se verifican las dos causas que debilitan la luz, que son la divergencia de los rayos y la densidad del medio; en la segunda capa solo habrà $\frac{1}{4}$ de masa luminosa que hubiere quedado franca de la primera, ó $\frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)$; en la tercera no habrá tampoco sino $\frac{1}{9}$ de la que no fue interrumpida en la segunda, ó $\frac{1}{9}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$, y asi sucesivamente. Luego, atendiendo á las dos circunstancias, la densidad de la luz conforme se van alargando los rayos desde su orígen, sigue por el órden de la série

$$\frac{n-1}{n}\ ,\ \frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\ ,\ \frac{1}{9}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \frac{1}{m^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^m;$$

es decir, que la luz cuya densidad ó fuerza es 1 en el orígen, si en cada unidad de camino pierde por la atmósfera la n^{sima} parte de la fuerza que lleva; tendrá $\frac{n-1}{n}$ de fuerza despues de la primera unidad de distancia, asi como $\frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)$ despues de la segunda, y sucesivamente las fuerzas espresadas en los términos de la série que acabamos de escribir. Esta se ha fundado en el supuesto de que la densidad perdida en cada unidad de espacio está siempre en razon directa de la residua, y no en razon de la abundancia de corpúsculos, cuyo número debemos considerar como invariable en toda la atmósfera equidistante de la superficie terrestre; ni tampoco hemos resarcido con los reflejos de los mismos corpúsculos la luz perdida por interceptacion.

Si atendiendo á estas circunstancias se hiciese otra suposicion, cual es la de ser n constantemente la diminucion de la densidad desde su orígen, en que fuese 1 la fuerza, entonces seria $1-n$, $1-2n$, $1-3n$, ..., $1-m\times n$ la série de la claridad residua sucesivamente à las distancias $1, 2, 3$, ..., m del orígen. Y como al mismo tiempo la divergencia de los rayos hace que dichos términos valgan en razon inversa de los cuadrados de las respectivas distancias al orígen, resulta que la claridad va decreciendo por el órden $\frac{1-n}{1}$, $\frac{1-2n}{4}$, $\frac{1-3n}{9}$, $\frac{1-4n}{16}$ .... $\frac{1-nm}{m^2}$.

Para graduar segun esta série la claridad de los objetos que estuvieren á las distancias $1, 2, 3, 4$, ..., m del orígen de la luz, observaremos à que distancia m aparece sin claridad un objeto en el dia y lugar de la representacion de la escena, se sustituirá por m su valor en $\frac{1-mn}{m^2}=0$, y saldrá para n el valor $n=\frac{1}{m}$: por último, sustituyendo el valor de n en cualquiera término, se tendrá la densidad de la luz ó la claridad del objeto situado á la distancia que espresa el coeficiente de n. La misma série hará conocer la claridad de la imágen segun las distancias á que el objeto se halla de la vista; pues se observará á que distancia m se hace invisible, y la sustitucion de ella por m en el término general igualado á cero, dará el valor de n; y la de este valor en el término correspondiente à la distancia del objeto dará la claridad de su imágen en el cuadro.

Sea cualquiera de estas séries la mas propia para espresar la graduacion de la luz, es evidente por cada una de las dos causas que la motivan, que las superficies á quienes corresponderia igual grado de ella en su-

posicion de intensidad constante en todo el ámbito de
fig. 19. la escena, deben aparecer tanto mas claras cuanto mas cerca estén del cuerpo luminoso, á causa de la densidad atmosférica; y que lo mismo debe suceder en suposicion de una diafanidad absoluta de la atmósfera, pues la densidad del fajo decrece segun se aleja del punto radiante.

Estando sujetos á la misma ley los rayos visuales, se-
fig. 20. rá mas distinta en el cuadro la imágen del cuerpo mas cercano à la vista, debiéndose tener presente que para esta valuacion de la distancia menor á que puede hacerse $m = 1$, ò la de mas claridad, es como vez y media la magnitud lineal del objeto (5). Cuanto la imàgen va siendo mas ofuscada, tanto menos limitados son sus contornos y ángulos, y tanto menor diferencia de claros y oscuros hay, porque se disminuyen los mayores y menores, y en la escala de ellos se cierran los términos de clasificacion.

10. Los colores padecen la misma suerte, aunque no todos por una comun escala, pues unos aparecen mas visibles que otros á igual distancia. Se tienen por *colores primarios ó simples* el blanco, el amarillo, el rojo, el azul y el negro; y si se reputa el blanco como luz y el negro como sombra, quedan solo tres colores simples, de los cuales el rojo es el mas visible á distancia, y despues el amarillo. Combinando los simples de dos en dos, resultan tres compuestos binarios; pues del
fig. 21. amarillo y el rojo viene el naranjado; del rojo y azul el morado, y del azul y amarillo el verde. El arco íris presenta modelos de estos seis colores por un órden conforme à nuestra narracion, segun se manifiesta en la figura, que es la seccion de un prisma que suponemos compuesto de partes longitudinales coloreadas.

Como la combinacion de cada dos colores simples se verifica en el íris por grados insensibles, de suerte que no se puede percibir la línea divisoria entre dos contiguos, de aqui resultan infinitos compuestos de un mismo nombre, mas ó menos parecidos en color al simple de su imediacion. El verde, por ejemplo, termina en azul despues de infinitas clases de verdes que van siendo cada vez mas azulados, y termina en amarillo despues de infinitas clases de verdes que van siendo cada vez mas amarillentos. Observando esta prodigiosa composicion de simples en el íris, se aprende à distinguir cada clase de compuestos que haya de imitarse en las artes, y á formar las ideas del perfecto amarillo, perfecto rojo y perfecto azul. Mas, atendiendo à la diversidad de matices que presentan los cuerpos de la naturaleza, en general entran tambien el blanco y el negro como simples; pues, combinando el blanco con los seis de la tabla escrita, en mas ò menos cantidad, resultan estos mas ó menos claros; y combinando asimismo el negro, resultan mas ó menos oscuros. De aqui viene la infinidad de compuestos variados que puede haber, y con los cuales el pintor establece la armonía de colores, à manera que el músico la de los sonidos.

PARTE II.

Dibujo Geométrico.

11. El dibujo geométrico se reduce à representar en un papel estendido, ò en otra materia de esta forma, la imágen de un objeto segun resulta de proyectarle en un plano, esto es, á construir una figura semejante á la que resultaria de marcar en el plano de proyeccion los puntos en que á este encontrarian las perpendiculares encaminadas desde todos los puntos del objeto: debiéndose ademas espresar en el dibujo los efectos que la luz haga en la faz de lo que se representa. El trabajo de trazar la figura en el papel, ò *cuadro* como dicen los artistas, se llama la *delineacion*; y el de espresar los efectos de la luz se llama el *sombreado*. El primero es el mas esencial y en el que no se debe tolerar inexactitud alguna, tanto en la delineacion del perímetro ò *contorno* de la figura, como en sus líneas interiores ó *dintornos*; pues aunque el sombreado causa la ilusion de dar á la figura realce, y esta ilusion conduciria à error si estuviesen mal entendidos los efectos de la luz, hay el recurso de no emprender este trabajo cuando no se tiene confianza de poderle desempeñar, y entonces el delineado solo cumplirà con los fines para que se haya hecho el dibujo.

Una y otra parte del problema que el dibujante se propone, exigen ciertos datos para la resolucion, es decir, que para delinear el cuadro necesita saber de antemano el lugar en que ha de situar cada punto, y para sombrear necesita asimismo saber la direccion que trae la luz y el efecto que hará en cada punto de estos. Cuando llegue el caso de esplicar los métodos de la ejecucion, procurarémos que no quede al discípulo duda alguna sobre la exactitud de ellos. Entretanto debemos advertir que los datos para la delineacion se adquieren midiendo distancias desde unos puntos á otros en el objeto que se propone dibujar, ó en el conjunto de objetos que forman la *escena*: y asi, cuando esta no ofrezca mas que una planicie con ciertos puntos notables, que por esta circunstancia ò la de ser vértices de la figura se han de situar en el cuadro, bastarán los datos que en la geometría plana se piden para formar una figura: mas, cuando la escena consta de bultos, habrà que conocer por mediciones las distancias de longitud, latitud y grueso para situar cada punto de la escena en el cuadro segun corresponde à la situacion que ocupa en el espacio.

CAPÍTULO PRIMERO.

DELINEACION.

ASUNTO PRIMERO.

Delineacion por datos de la Geometría plana.

12. Suponiendo que el dibujante sabe los preceptos de la geometría elemental y la construccion perteneciente á ella, se ocupará bajo la direccion del profesor en aprender practicamente el uso de los instrumentos de estuche; preparacion y conocimiento de tintas, lapiz y papel que necesita; y cuando en esto se halle corriente, empezará las lecciones de encerado, en donde

se deben esplicar teórica y practicamente las reglas de situar puntos debidamente en el cuadro ó papel, que para el dibujo sabrá destinar. Decimos que debidamente, porque la posicion de un punto en un plano es relativa á la posicion de otros que ocupen lugares fijos en el mismo plano; asi como para espresar en qué lugar de un campo cuyo nombre se ignora està un objeto, necesitamos referir aquella posicion à la de ciertos lugares conocidos por el oyente.

De tres modos podemos espresar la situacion del punto *B* en el cuadro.

1.° Estableciendo *B* con relacion á otros dos puntos *A* y *C* que estén ya marcados: y entonces necesitamos conocer las tres distancias *AC*, *AB*, *BC*, que son los tres lados del triàngulo *ABC*; datos que solo á él pueden pertenecer (Geom. 72).

fig. 1.

fig. 2.

2.° Con relacion à dos rectas *Ox* y *Ov*, comunmente perpendiculares, que se hallen ya trazadas en el cuadro; esto es, conociendo las distancias *Bb* y *Bb′* á dichas rectas, ó lo que es lo mismo la distancia *Bb*, ò longitud de la perpendicular bajada desde *B* á la recta *Ox*, y la distancia *Ob* desde el punto *O* de donde salen dichas rectas fijas hasta el punto *b* en que encuentra á *Ox* la perpendicular *Bb*; y lo mismo si se quiere por las *Ob′* y *Bb′* á la otra línea fija *Ov*. Conviene distinguir todos los elementos de este aparato con los nombres que en la Geometría se usan. Las rectas fijas *Ox* y *Ov* que siempre supondremos perpendiculares, se llaman *ejes coordenados*; las distancias *Bb* y *Bb′* del punto *B* á los ejes, ó sus iguales *Bb* y *Ob*, ô bien *Ob′* y *Bb′*, son las *coordenadas* del punto *B*; y se llama *orígen de coordenadas* el punto *O*, porque segun se aleja de el dicho punto *B*, se va alargando una ó ambas de sus coordenadas. No cabe duda en que la situacion de B está determinada por las dos distancias Bb y Bb' simultàneas á los ejes; porque, si variase B de lugar aunque fuese muy poco, variaria tambien alguna de dichas dos distancias, á causa de que desde un punto no se puede bajar á una recta mas que una perpendicular (Geom. 17).

3.° Tambien la geometría enseña otro modo de situar un punto B en el plano, y consiste en conocer el ángulo MAB que con una recta fija AM forma la AB, fig. 3.
y al mismo tiempo la longitud de la recta AB; pues no cabe duda en que el ángulo MAB solo pertenece à los puntos que se hallen en la prolongacion de AB; y diciendo que la distancia desde él hasta A es determinadamente AB, solo B puede ser el punto de la cuestion.

13. Sea cualquiera de los tres métodos el que adoptase un dibujante, siempre habrá de situar el punto B en su cuadro, y lo mismo los demas puntos fijos ó variables, con distancias proporcionales á las que haya entre ellos en el natural ú original que tenga por modelo; como por ejemplo, cuando tiene que situar puntos de un campo llano en el cuadro, donde ha de presentar proporcionalmente reducidas las distancias que haya entre los fijos y variables de aquel: es decir, que necesita construir una *escala*, ó sistema de unidades lineales como el aritmético se vale del sistema de numeracion. Generalmente habrá de ser conforme al sistema duodecimal dicha escala, porque tal es el de la division del pie en pulgadas, líneas y puntos: y sabemos que se construye tirando dos rectas MN y PQ parale- fig. 4.
las, dividiendo en 12 partes iguales la perpendicular MP á ellas, marcando tambien estas en las paralelas desde M y P para tirar la Mp desde M al punto p de la primera division, y paralelas á Mp desde unos

puntos de division à otros, y finalmente paralelas à MN desde todos los puntos de division de MP. La primera dificultad que sobre esto le ocurra serà el fijar oportunamente el grandor de la unidad de su escala, para que los límites de lo que se propone dibujar no salgan fuera de los del cuadro que tenga preparado, ni tampoco incurran en el estremo de que sobre mucha parte de él por imprevision: y cuando le den precisamente el grandor de la unidad de escala, tendrá que calcular las dimensiones que ha de tener el cuadro para que sea proporcionado al objeto.

El còmputo de la relacion que ha de haber entre la unidad de la escala y la del original para el cuadro que tiene preparado, se resuelve por medio de una proporcion cuya incógnita es el grandor de la unidad de escala, siendo los tres términos conocidos la mayor estension a del objeto en sentido de su longitud, la unidad b del tipo legal con que esté medida, y la estension c del cuadro en el mismo sentido; cuidando tambien de comprobar por una proporcion anàloga, si la unidad que resulte para la escala es ó no demasiado grande para el ancho. Supongamos por ejemplo que la mayor estension del original en sentido de la longitud es de 18 pies, la del cuadro $1\frac{1}{2}$ pies, y la unidad del original 1 pie; para saber qué grandor corresponde á la unidad de escala, formaremos la proporcion,

$a : b :: c : x$, que aqui es $18 : \frac{3}{2} :: 1 : x = \frac{3}{36}$;

la cual nos dice que la unidad de la escala ha de ser $\frac{3}{36}$ de pie, ó bien $\frac{1}{12}$ de pie que es una pulgada. Con que
fig. 4. tenemos averiguado que la distancia MP entre MN y PQ, y lo mismo la parte MH ha de ser una pulgada, y que de consiguiente cada parte de MP y de MH es una línea, á que se sigue que la parte ij es un punto del tipo legal. Si tomamos como pie para el dibujo la

distancia MP igual á una pulgada del tipo legal, de consiguiente como pulgada Pp y como línea ij, se dice que el dibujo está arreglado á *pulgada por pie.*

El problema de averiguar el grandor que corresponde al cuadro para dibujar un objeto de estension determinada, cuando se nos da la unidad de escala, se resuelve por la misma proporcion; pero entonces la incógnita es b. Sea por ejemplo 18 pies la longitud del objeto, y pulgada por pie ó $\frac{1}{12}$ de pie la unidad de la escala, y tendremos

$$18 : b :: 1 : \tfrac{1}{12};\ \text{de donde sale } b = \tfrac{18}{12} = 1\tfrac{1}{2}\ \text{pies};$$

con que, ha de tener $1\frac{1}{2}$ pies de longitud el cuadro.

14. Despues de haber construido la escala, vamos fig. 1. 5. 3.
á situar el punto B y cuantos fueren precisos para determinar el contorno del objeto, por los tres métodos que indicamos al principio, teniendo entendido que en cualquiera de ellos hay que hacer siempre dos operaciones distintas. 1.ª Medir en el original las distancias que han de servir de fundamento para la construccion. 2.ª Construir el dibujo con estas medidas, reduciéndolas proporcionalmente segun la escala.

Método I.° = *Para situar en el dibujo el punto B* fig. 1.
respecto de los A y C, como está en el original que suponemos representado en la figura 5, se miden primeramente las tres distancias de este, $'A\,'C$, $'A\,'B$, $'B\,'C$, fig. 5.
y se anotan en un papel los números de pies, pulgadas, etc. á que asciende cada una de ellas: se construye la escala despues; y al fin, tirando en el cuadro una recta indefinida, se corta la distancia AC con el compas, fig. 1.
tomando en la escala tantas unidades de ella como $'A\,'C$ tenia en el original: y tomando tambien para AB y BC las correspondientes, se trazan desde A y C los arcos de los radios AB y BC, que se cortarán en B, punto que se pidió situar en el cuadro.

El método que se ha seguido para un punto, es el que se ha de seguir para cada uno de todos los vértices de un polígono rectilíneo plano *ABDEFGH*
fig. 6. segun vamos á esplicar; pero advertimos que por no duplicar figuras, nos referiremos á una misma tanto cuando se hable del original como del cuadro. Tirando en el natural una recta *AC* que lo atraviese, y tomando dos puntos *A* y *C* cualesquiera en ella, estos son los cardinales desde donde se han de medir las distancias *AB*, *AD*, *AE*, etc., y las *CB*, *CD*, *CE*, etc. Luego que se tengan estas medidas, ademas de la *AC*, se tira en el cuadro con cierta prevision una recta *AM*, en la cual se toma la distancia correspondiente *AC* por la escala: en seguida por ella tambien con los radios *AB* y *BC*, se situa *B*; con los *AD* y *DC* el *D*, y asi sucesivamente hasta el último punto: y al fin se ligan con las rectas *AB*, *BD*, etc. los puntos contiguos, con lo cual resultará trazado el polígono propuesto.

Si el polígono plano es de lados curvos ó mixtos cuan irregular se pueda imaginar, se situan del mismo modo en el cuadro todos los puntos de su perímetro cuyas
fig. 7. distancias à los dos fijos *A* y *C* se hayan medido, tomando puntos bien cercanos entre sí, especialmente aquellos en que haya sinuosidad ò punta, à fin de que se pueda dirigir con bastante aproximacion el contorno y dintornos. Despues de haber situado en el cuadro dichos puntos del contorno, éste se completa á ojo con rectas de punto à punto contiguos: y asi quedarà trazado un polígono rectilíneo tanto mas semejante al verdadero cuanto mas pròximos estuviesen los puntos situados. Aun serà mas exacto si en vez de ligar con rectas los puntos, se ligan à ojo con curvas parecidas á las del original; operacion que, estando bien hecha, acreditará exactitud de vista en el dibujante,

cualidad que se adquiere y se perfecciona con el uso. fig. 2.

Método II.° *Para situar en el dibujo el punto B respecto de las perpendiculares Ox y Ov segun está en el original*, se tiran en este dichas rectas, y bajando á ellas las perpendiculares *'Bb*, *'Bb'* desde el punto *'B*, se miden con el tipo. La segunda operacion que es construir el dibujo, se empieza tirando las perpendiculares *Ox* y *Ov* indefinidas, en las cuales desde el orígen *O* de coordenadas se toman las partes *Ob*, *Ob'* proporcionales á las distancias *'Bb*, *'Bb'* que se midieron en el original; y finalmente, levantando en el cuadro desde *b* y *b'* las perpendiculares *Bb* y *B'b'* á los ejes respectivos, vendrán á cortarse en *B*, que será el punto pedido. fig. 5. fig. 2.

Cuando se quiera dibujar asi un polígono rectilíneo plano que supondremos el mismo de antes, se tiran los ejes que representan *Ox* y *Ov* desde cualquiera punto *O* del plano, aunque puede convenir que este punto sea el mas central de la figura por lo que se verà mas adelante; y se miden las dos distancias desde cada punto del polígono original à los ejes. Concluida esta operacion primera, se procede à tirar en el cuadro los ejes *Ox* y *Ov*, y à construir la figura tomando por la escala en el eje *Ox*, prolongàndole por una y otra parte en caso necesario, las distancias *Ob, Od, Of, Og, Oh,* proporcionales à las que se hayan hallado desde los puntos *B, D, E, F, G, H* al eje *Ov*, y en éste las distancias *Ob'*, *Od'*, *Oe'*, *Of'*, *Og'*, *Oh'* que resultaron desde los mismos vértices al eje *Ox*, àcia el lado correspondiente del orígen; y ligando por último los puntos contiguos con rectas, quedarà trazado el polígono en el dibujo. Claro està que el orígen pudo haberse colocado en cualquiera lugar del plano, como por ejemplo en un vértice del polígono, y aun tomar por uno de los ejes un lado fig. 8.

cualquiera de él; pero entonces algunas de las distancias resultarian mayores, y cuando la figura es grande, puede ser esto inconveniente de consideracion; aunque es verdad que asi todas ellas caen ácia un mismo lado del orígen, circunstancia que favorece para no tener en cuenta el lado en donde se ha de tomar cada distancia para construir el dibujo.

Por este medio se traza tambien el contorno de una
fig. 9. figura curvilínea, ó mixtilínea plana cuan irregular se pueda imaginar; situando en el dibujo el mayor número posible de puntos, especialmente aquellos mas salientes y entrantes, y ligando al fin los contiguos con rectas ó mas bien con curvas parecidas á las originales.

El método II.° es ventajoso para trazar las figuras simétricas respecto de una recta; pues tomando esta por eje, solo habrá que medir la distancia de uno de cada dos puntos simétricos. Suponiendo, por ejemplo, que
fig. 10. en el polígono $ABDEFGHJ$ sean simétricos respecto de la recta OM los vértices E y F, D y G, B y H, A y J; se toma por eje de las v la OM, y solo hay que medir las distancias á él desde los puntos de un lado, como E, D, B, A; y la circunstancia de ser simétricos los puntos finales A y J proporciona tambien la ventaja de poderse tomar AJ por eje de las x: á que es consiguiente el bastar la medicion de distancias á dicho eje desde los puntos de un lado del eje Ov. Para la construccion hay las mismas ventajas; pues con tomar en Ov las distancias Od, Oe, etc., y tirar desde los puntos e, d, etc. las perpendiculares prolongadas por una y otra parte, sirve cada abertura de compas para uno y otro lado del eje; y en breve se fijan asi de dos en dos los puntos E y F, D y G, B y H, A y J. De un modo análogo se puede trazar la figura tomando en el eje Ax las distancias iguales Oe y Of, etc. á uno

y otro lado de O, y elevando perpendiculares desde los puntos e, f, etc.

Aun es mas ventajoso dicho método II.° cuando la figura sea simétrica respecto de los dos ejes Ox y Ov; fig. 11.
pues entonces con una misma abertura de compas se marcan cuatro puntos. Siendo por ejemplo de esta clase el polígono $ABCDEFGHJKLM$, con los puntos B y F, los M y H, etc., simétricos respecto del eje Ov, y con los B y M, los F y H, etc. simétricos respecto del eje Ox; se sigue que por ser B y F simétricos respecto de Ov, y tambien B y M respecto de Ox, el ángulo MBF es recto por análoga razon en cuanto á F respecto de B y H, será tambien recto el àngulo BFH, y asimismo el MHF; y por consiguiente BMH. Luego, el cuadrilátero $MBFH$ es un rectàngulo, y con solo dos aberturas de compas iguales á las mitades respectivas de sus lados, se marcarán los cuatro puntos de los vértices, tomando cada dimension desde el orígen O á uno y otro lado en el eje correspondiente, y levantando las perpendiculares en los puntos que diere el compas.

Cualquiera curva $ABCDEFG$ simétrica respecto de alguno de los ejes, puede ser tambien dibujada venta- fig. 12.
josamente por este método, cuando no se conoce la ley de dicha curva, esto es, el modo de trazarla tal vez por continuidad, como el círculo, la elipse, etc.: y à favor de la simetría podrá el dibujante marcar con celeridad de dos en dos muchos puntos, en términos de resultar los del dibujo tan contiguos, que cuasi sea tan exacto el contorno como si se hubiera trazado por continuidad.

Método III.° *Debiendo situar un punto B en el di-* fig. 3.
bujo á la distancia AB de otro A fijo, en la recta AN que con la fija AM forma el ángulo MAN, á quien mide el arco uu' que empieza en AM, se trazan en el fig. 5.

original dichas dos rectas, y con el semicírculo graduado se mide el arco uu' ó àngulo que forman. Despues de haber adquirido estos datos, se tiran en el cuadro
fig. 3. las rectas indefinidas *AM* y *AN* formando el ángulo *MAN*, con el auxilio del semicírculo trasportador; y en seguida con el compas por la escala se toma desde *A* la distancia *AB* correspondiente en la recta *AN*.

fig. 13. Cuando se quiera dibujar por este medio un contorno *BCDEFG* plano cualquiera, rectilíneo ó curvilíneo, se repite la operacion respecto de cada punto *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* de dicho contorno desde el mismo orígen *A*, valiéndose siempre de la recta fija *AM* para lado comun de todos los ángulos *MAB*, *MAC*, etc. Este método es el menos usado, aunque no deja de haber casos en que se pueda emplear con preferencia.

15. Habiéndose dado una idea suficiente de los tres métodos generales que hay para trazar los dibujos, necesitamos tambien de otros medios para ciertos problemas que ocurren. El geómetra no admite mas construcciones que aquellas exactas, provenidas del cálculo de las líneas: pero el dibujante necesita ademas los métodos aproximativos, como se ha verificado antes para completar los contornos curvilíneos é irregulares.

Uno de los problemas que con frecuencia ocurre al dibujante es el inscribir ò circunscribir cualquiera polígono regular á un círculo; y en verdad que si el caso no es de aquellos que se resuelven rigorosamente (Gem. 101), se verá en la precision de hallar á tanteo con el compas el lado del polígono en la circunferencia que debe trazar de antemano; sirviéndole de gobierno para el primer tanteo el conocimiento de que el lado del exàgono es igual al radio, que el del óctágono es la cuerda de la mitad del cuadrante, etc. Cuando el número de lados es divisor de 360, hallará bien exactamente el lado tirando por medio del semicírculo del estuche dos radios que abracen el arco, que resulta en grados dividiendo 360 por el número de lados que ha de tener el polígono. Supongamos, por ejemplo, que se trata de inscribir un nonágono en un círculo dado; y como de dividir 360 por 9 resulta 40, la cuerda del arco de 40 grados es el lado del nonágono, la cual se toma facilmente con el compas, aplicando el centro del semicírculo del estuche al centro del círculo del papel á quien se ha de inscribir el polígono, y tirando dos radios á los puntos de division o y 40 de la graduacion. Señalando los estremos de las nueve cuerdas con la misma abertura de compas, se traza el polígono regular inscrito: y levantando despues perpendiculares en los estremos de los radios que se bajan á los puntos medios de sus lados ó á sus vértices, quedará trazado el polígono regular circunscrito del mismo número de lados. fig. 14.

En el dibujo se usan tambien los polígonos *estrellados*, tales son aquellos que constan de ángulos salientes y entrantes alternativamente, como representan las figuras 11 y 15; y se llaman *regulares* los que tienen iguales entre sí todos los àngulos salientes, como tambien los entrantes del mismo modo. A esta clase corresponden aquellos que resultan de prolongar los lados de los polígonos regulares inscritos, como el *a b c d e f g h j* fig. 15. *k l m n o p q r s*; pues de este modo sobre cada lado *b d* del polígono inscrito sale un triàngulo *bcd*, que es isósceles à causa de la igualdad de los ángulos de la base por suplementarios de los del polígono regular, y no solo son iguales todos los ángulos salientes *c*, *e*, *g*, *j*, etc. del estrellado, sino tambien los entrantes *d*, *f*, *h*, *k*, etc. por verticalmente opuestos á los del polígono inscrito. Segun esto, el estrellado consta de doble número de lados que el inscrito: y á poco que se discurra se conocerá que solo puede provenir asi polígono estrellado, de un polígouo regular inscrito, cuyos lados alternativos se puedan encontrar fuera del círculo prolongàndolos; lo cual no tiene lugar en el triàngulo inscrito, porque sus lados alternativos van separàndose cada vez mas fuera de dicho círculo; ni tampoco en el paralelógramo, porque sus lados alternados jamas pueden concurrir: de suerte, que solo desde el pentágono inscrito en adelante podemos adquirir polígonos estrellados por medio de la prolongacion de lados, es decir, que asi no podemos construir sino los que tengan diez ó mas lados.

Pero el artista puede necesitar los de seis y ocho la-
fig. 16. dos; y para construir los primeros debe inscribir el triàngulo equilátero *a c e* al círculo, y tomando desde el centro *O* las distancias iguales *Ob*, *Od*, *Of* en las perpendiculares tiradas desde *O* á los lados, ligar con rectas los puntos contiguos *a* y *b*, *b* y *c*, *c* y *d*, etc. Para construir el polígono estrellado regular de ocho
fig. 17. lados se traza el cuadrado, y bajando desde el centro *O* perpendiculares á los lados de éste, se toman sobre ellas desde *O* las distancias iguales *Ob*, *Od*, *Of*, *Oh*, que se ligaràn despues con los vértices *a*, *c*, *e*, *g* del cuadrado. Este método que consiste en dividir la circunferencia en cualquiera número par de partes iguales con radios, y tomar por vértices de los ángulos salientes los estremos de los radios alternados, es aplicable á la construccion de todos los polígonos estrellados regulares, que como se sabe tienen siempre número pár de lados. Tam-
fig. 15. bien se pueden construir tomando los estremos de los radios por puntos de los ángulos entrantes, y marcando desde cada dos contiguos con cualquiera abertura de compas el vértice del ángulo saliente intermedio.

16. Aunque tienen lugar en las artes y manufacturas muchas clases de curvas regulares, cuyas leyes res-

pectivas se esplican en la Geometría, la mas comunmente usada es la circular por su constante uniformidad y fácil construccion; y asi, la manufactura con curvas suele tener alguna parte esférica, como casquete, zona, etc. ò cilíndrica perteneciente á cilindro de base circular, ó cónica de la misma base, etc., y á veces consta de varias de estas partes, correspondiéndolas iguales ò diferentes diámetros. Aqui no se trata mas que de dibujar figuras planas, y de consiguiente no podemos entrar en detalles de los dibujos de dichas manufacturas. No obstante, si tomamos en consideracion solamente las líneas terminales de ellas, que los artistas llaman *perfiles*, podemos dar ciertas ideas de cada una que serán conducentes para lo sucesivo.

El perfil, sea recto, cóncavo, convexo ó mixto, puede representar el término de algun cuerpo que se llama de revolucion, trazado con aquel perfil por medio de un torno dando vuelta al rededor de su eje, ó el término de dos superficies que se cortan formando aquella figura, etc., y en todos los casos se llama *moldura* el adorno ó resalte de la superficie que se espresa en el perfil. Nuestro objeto ahora no es el tratar de cuàl será el que resulte en cada combinacion de las inumerables que puede haber de dos en dos entre las diversas superficies que se cortaren, sino únicamente dar idea de cómo se construyen los circulares simples y compuestos.

El perfil AEC semicircular convexo, cuyo diámetro es el grueso de la figura $AECDB$, se construye fig. 18. 19.
facilmente hallando el punto O medio del diámetro ò grueso del cuerpo. En este caso el adorno $AECDB$ se llama *junquillo* cuando es muy angosto, como en la figura 18, y *almohadon* ó *toro* cuando es bastante grueso, como en la 19. Si el cuerpo fuere de revolucion, este perfil manifiesta que aquel es semicilíndrico presen-

tado por su convexidad. Si el semicírculo no es grande y presenta su concavidad, la moldura se llama media *caña*.

fig. 21. A una superficie plana corresponde siempre un perfil recto *FG*: si la recta es de poca estension, como en la figura 21, se llama *filete* la moldura, y *faja* si es mas ancha. Los arquitectos llaman *plinto* el cuerpo de caras planas representado en la figura 19.

Cuando el perfil es un cuadrante *AC*, se traza desde su centro *O* que estará dentro del cuerpo si es con-
fig. 22. 23. vexo como en la figura 22 llamada *cuarto-bocel* en arquitectura, y fuera si es cóncavo el perfil como en la figura 23 que se llama *cabeto*. Si el cuerpo es de revolucion, este perfil manifiesta que en el primer caso tiene superficie cilíndrica convexa el adorno, y en el segundo còncava.

La belleza, que suele ser consiguiente à la variedad,
fig. 24. 25. 26. induce á los artistas á formar perfiles compuestos de dos arcos circulares, uno còncavo y otro convexo. Si cada parte de estas es un cuadrante que tiene su centro en el mismo diámetro del otro, como en la figura 24, que en arquitectura se llama *talon*, y la 25 que se llama *gola*, se ve por las mismas figuras el modo de construir el perfil. Este en los cuerpos de revolucion espresa que el adorno se compone de dos superficies cilíndricas, una còncava y otra convexa.

Otras veces el perfil consta de dos arcos circulares menores que cuadrantes, y en tal caso hay que hallar el centro de cada arco por el método que el dibujante debe saber (Geom. 50). Este perfil en los cuerpos de revolucion manifiesta que el adorno se compone de dos porciones cilíndricas, una còncava y otra convexa, menores que los cuartos cilíndricos.

Nos resta una especie de perfiles cóncavos ó convexos en toda su estension, que resulta de construir varios arcos circulares consecutivos con radios sucesivamente mayores, á manera que en la Geometría sublime se hace con los radios osculadores de las curvas. Asi trazan los arquitectos el perfil del adorno representado en la figura 27 que llaman *escocia*. Proponiéndonos dibujar el perfil $ACDEF$, desde A á F, siendo AH el grueso del cuerpo, le suponemos compuesto del cuadrante AC cuyo centro es O en la recta AH, del arco CD menor trazado desde O' que se halla en OC prolongado, de otro arco consecutivo DE cuyo centro es O'' en la recta $O'D$ prolongada, y finalmente de otro arco EF trazado desde el punto O''' tomado en la prolongacion de $O''E$, á tanta distancia de E como de F en donde debe terminar. Segun varíe el crecimiento de los radios con que se construyen estos arcos, y sea mayor ó menor cada arco, asi resultará variada la figura de la curva discontinua que salga: bien entendido que, cuando los dos estremos de ella A y F sean dados como en la propuesta, habrá que arreglar la ley de los radios para que parezca continua la curva; circunstancia que es precisa en todos los casos. fig. 27.

ASUNTO II.

Delineacion por datos de la Geometría del espacio.

17. Sabemos por esperiencia que para formar idea de la figura de un cuerpo, como por ejemplo un edificio, necesitamos mirarle desde varios lugares de su contorno á fin de observar las dimensiones principales, que son altura, latitud y grueso de las diversas partes que componen cada una de sus fachadas: y por la misma causa, para espresar en dibujos geométricos la idea del esterior del objeto, es menester que tracemos sus

proyecciones en planos presentados oportunamente. Si el dibujante quiere queresulten cabales las dichas tres dimensiones de alto, ancho y grueso, del espacio que ocupa el cuerpo ó conjunto de muchos, bastan tres planos de proyeccion respectivamente paralelos á ellas: y á este fin al rededor del objeto cuyos tres aspectos geométricos se van á representar en dibujo, coordenará tres planos, $A\,E$ horizontal, y $A\,J$, $A\,G$ verticales, de modo que cada dos entre sí formen àngulo recto, siendo $A\,x$ la arista ó interseccion de los $A\,E$ y $A\,J$, igualmente $A\,v$ interseccion de $A\,E$ y $A\,G$, así como Az interseccion de AJ y AG. En este sistema de planos son rectos por condicion los ángulos planos xAv, xAz, vAz, y por lo demostrado en el artículo (157) de la Geometría elemental, cada interseccion será perpendicular al tercer plano, como tambien á las otras dos intersecciones: luego, todas las rectas imaginables del espacio paralelas á una de estas intersecciones serán perpendiculares al tercer plano coordenado, segun consta por el artículo (142) de dicho tratado. Si en tal disposicion se dirigen perpendiculares á cada plano coordenado desde cada punto de los que constituyen la superficie del objeto, como por ejemplo los vértices M, N, O, P de un poliedro, y se ligan despues con rectas debidamente los puntos m, n, o, p, los m', n', o', p', y los m'', n'', o'', p'', en que las perpendiculares ó rectas *proyectantes* encuentran al plano respectivo, puntos que se llaman *proyecciones ó dibujos geométricos* de M, N, O, P; quedarán trazados los dibujos geométricos $m\,n\,o\,p$, $m'\,n'\,o'\,p'$, $m''\,n''\,o''\,p''$, ó proyecciones de la superficie $MNOP$, y por consiguiente del bulto contenido dentro de ella.

fig. 28.

Pero es preciso saber cómo se situa en cada plano de estos la proyeccion de un punto del espacio, teniendo

por datos las tres distancias que hay desde él á los planos coordenados, y para ello fijaremos la atencion en el punto M y sus proyecciones m, m', m''. Tírense desde estos puntos en los planos respectivos las rectas fig. 28.
$m\,c$ y $m'd$ paralelas á la interseccion Ax, asimismo las $m\,b$, $m''d$ paralelas á Av y las $m'b$, $m''c$ paralelas á Az: y es bien claro que estas líneas, combinadas con las tres distancias Mm, Mm', Mm'' del punto M á los planos coordenados, forman de cuatro en cuatro los paralelógramos rectangulares de dos en dos idénticos $Mm\,cm''$ y $m'b\,A\,d$, $Mm'dm''$ y $m\,bAc$, $M\,m'b\,m$, y $m''d\,A\,c$, y que por esta razon serán iguales entre sí las rectas bA, $m'd$, mc, Mm'', las Ac, $d\,m''$, $b\,m$, $m'M$, y las $A\,d$, $b\,m'$, $c\,m''$, $m\,M$. De suerte que, si al dibujante se dan medidas las tres distancias naturales $M\,m''$, $M\,m'$, $M\,m$ desde el punto M á los planos coordenados, situará en cada plano la proyeccion correspondiente, tomando en las intersecciones desde A partes que equivalgan á dichas distancias, como $A\,b$ en vez de Mm'', Ac en vez de Mm', y $A\,d$ en vez de Mm; y los paralelógramos rectangulares Am, Am', Am'' construidos con estos equivalentes sobre los planos coordenados, darán las proyecciones ó dibujos geométricos m, m', m'' del punto M del espacio. La misma consecuencia tiene lugar para los puntos N, O, P del espacio y sus proyecciones; por lo cual, si despues que hubiere situado tambien estas, liga debidamente las proyecciones que hay sobre cada plano con rectas, que serán las proyecciones de las aristas del poliedro, quedarán delineados los tres dibujos del objeto.

Entendido esto, y pintadas las tres estampas geométricas de la superficie $MNOP$, supongamos que los planos AJ y AG se separan sirviendo sus intersecciones Ax y

Av de charnelas, hasta ser horizontales y de consiguiente prolongaciones de *AE*: de que resultarà el aparecer dichos tres dibujos y todos los paralelógramos rectangu-
fig. 29. lares con las dimensiones y figuras propias de la Geometría plana, sin el artificio perspectivo de que nos hemos valido para venir á este caso, con el fin de manifestar todas las circunstancias de la composicion. En tal estado vemos las tres dimensiones de que se habló al principio, y con la latitud $'''b\,'b$, el grueso $'''c\ c$, y la altura $d\ '''d$ del cuerpo *MNOP*, consideradas en direcciones respectivas de las líneas *Ax*, *Av*, *Az*; como tambien las distancias desde estas líneas á la proyeccion de cada punto, distancias que por lo dicho antes nos consta son iguales respectivamente á las naturales entre el punto del espacio y los tres planos coordenados.

Ademas, el dibujo horizontal *AE* que se llama *planta*, está combinado con los verticales *AJ* llamado de *elevacion* ò *alzado*, y *AG* *de perfil*. Por esta razon basta una de dichas dos combinaciones para formar idea de las tres medidas del cuerpo y del lugar que cada punto de la superficie suya ocupa en la escena, pues en cada combinacion estan descritas las tres dimensiones necesarias para ello. Sin embargo, se suelen dibujar las dos combinaciones, ó al menos la de planta y elevacion y ademas el cuadro del perfil, para manifestar dos aspectos ó fachadas del cuerpo, ademas de la planta, cuando en ambos hay particularidades que se quieren representar. Esto se practica llevando el cuadro de perfil *vAz*
fig. 30. de la figura 29 al par del de elevacion *xAz*, como si girase sobre el punto *A* en el mismo plano, comun ya de los tres, formando cuadrantes circulares todos los puntos de dicho cuadro desde la posicion que tenia en la figura 29 à la que tiene en la 30, pues asi los puntos c, $'c$, $''c$, $'''c$ que son los que se necesitan para elevar las

coordenadas z del cuadro de perfil, quedan marcados en su línea Av, como si con un compas se hubiesen trazado arcos circulares desde A con los radios Ac, $A'c$, $A''c$, $A'''c$ tomados en la linea Av de la planta. De este modo procederemos en las aplicaciones, y aun simplificaremos entonces la demarcacion de los cuadros, construyendo solamente las dos rectas perpendiculares zAv y xAv.

En el aparato que hemos establecido para estampar los tres aspectos geométricos de planta, elevacion y perfil de uno ó muchos objetos, las tres distancias Mm, fig. 28. Mm', Mm'' desde el punto M á los respectivos planos coordenados ó de dibujo, se llaman *coordenadas* de M: las aristas Ax, Av, Az del ángulo triedro son *ejes coordenados*, y el punto A comun á los tres ejes y planos, desde donde se toman sobre los ejes los valores Ab, Ac, Ad de las coordenadas de M, es por esta causa *orígen de coordenadas*. Cuando se quieren espresar por escrito los valores de las distancias coordenadas del punto M, se hace por las igualdades $x=Ab$, $v=Ac$, $z=Ad$, sustituyendo por las líneas Ab, Ac, Ad sus valores numéricos; y en general se dice indeterminadamente que à cada punto del espacio corresponden las coordenadas x, v, z. A veces tambien se suele decir plano xv ò de las x, v el coordenado de planta, en que se hallan simultáneamente los ejes Ax y Av; asimismo plano xz ó de las x, z el coordenado de elevacion, en que se hallan los ejes Ax y Az; y plano vz ó de las v, z el coordenado de perfil, en que estan los ejes Av y Az.

Si se consideran prolongados los tres planos coordenados mas allá de sus intersecciones ò ejes Ax, Av, Az, resultaràn ocho ángulos triedros cuyo vértice comun será el orígen A, y en el hecho quedarán tambien prolongados los ejes ácia uno y otro lado de este punto. Bien pudiéramos suponer diseminados por todo el espacio que circunda el punto *A* los objetos que se quieran dibujar; mas, para facilitar las operaciones del dibujo y simplificar el lenguaje, supondremos que todos ellos estan dentro de un mismo àngulo triedro, pues que somos àrbitros de darle la cabida necesaria: y llamaremos *escena* al conjunto ó composicion de objetos que estén en dicho espacio, dispuestos casual ó artificialmente para ser dibujados. Unicamente cuando la estension de la escena sea dilatada, como por ejemplo una porcion de terreno cuyos dibujos topográficos tratemos de construir, nos convendrá suponer el orígen dentro de su àmbito, para ejecutar las mediciones mas facilmente, y à fin de que resulten las distancias horizontales en números menores; como se hizo en el método II.° del artículo (14) por lo mismo; pero la escena siempre debe suponerse en la parte superior del plano de planta.

Cuando no se pueda medir directamente ò de una
fig. 28. vez cada distancia coordenada Mm, Mm', Mm'' de un punto de la escena, como sucederà con los vértices de las figuras que forman las habitaciones y otros departamentos de un edificio por el obstàculo de las paredes intermedias, y con los puntos esteriores de un cuerpo elevado ó profundo, como edificio, montaña, barranco, etc. por su larga estension; suponemos en el geòmetra los conocimientos necesarios para ejecutar la medicion de dicha coordenada. Pues dirigiendo primeramente una recta paralela á alguno de los ejes coordenados, desde el punto hasta donde sea posible medirla; desde aqui otra paralela tambien á uno ú otro de los ejes, hasta salir á donde parezca que conviene, y asi sucesivamente hasta llegar al plano del sistema trazado á que se encamina la coordenada; tendrá que ha-

cer sumas ó restas ó ambas operaciones con las partes de paralelas à cada eje, para deducir el valor de la coordenada en aquel sentido.

18. Permítasenos hacer aqui una digresion, para manifestar que no se ha establecido caprichosamente el sistema de los tres planos coordenados en las posiciones determinadas, horizontal el de planta, y verticales los de elevacion y perfil; sino por la oportunidad que asi ofrecen para facilitar la medicion de las coordenadas, á causa de que la misma naturaleza enseña en todas partes cómo se han de dirigir. Debiéramos suponer que el dibujante sabe hallar en la naturaleza las direcciones horizontal y vertical de una recta y de un plano: pero sin embargo recordaremos el mecanismo de las operaciones.

Si despues de atar el estremo *P* de un hilo á cualquiera cuerpo, como por ejemplo al centro de la base de un cono recto de plomo, elevamos el otro estremo *M* del hilo con la mano hasta quedar libremente suspendido y en reposo: al aparato que asi resulta se da el nombre de *plomada* ó *perpendículo*, y de *vertical* á la línea *MP* que marca el hilo, como tambien á todo plano situado en disposicion que se ajuste al hilo completamente. fig. 31.

Encerrando algun líquido en un tubo *A* de cristal, ó en otro *SNS* con dos recodos de cristal abiertos, que se llama *nivel de agua*, la superficie superior del líquido en estado de reposo es por su naturaleza un plano horizontal, y toda recta *OR* que se ajuste á dicho plano es tambien horizantal. Por medio de estos aparatos la naturaleza nos manifiesta las posiciones horizontal y vertical de una recta ó de un plano: y para los usos indispensables que con frecuencia se hacen de ellos, se tienen preparados de antemano en formas acomodati- fig. 31.

vas á las necesidades. Sabemos tambien que una recta ó un plano horizontal es perpendicular siempre á una recta ò un plano vertical; de suerte que las posiciones OR, horizontal y MP, vertical son dos perpendiculares entre sí que la naturaleza nos da trazadas en cualquiera punto H, entre las inumerables perpendiculares que el geómetra sabe construir en dicho punto H: de consiguiente, hallada la vertical con la plomada y construyendo geométricamente una perpendicular, ésta será horizontal; asimismo, halladas con el nivel dos horizontales que se crucen, y construyendo geométricamente una perpendicular comun à ellas en el punto donde se cortan, ésta será vertical (Geom. 139).

Comunmente se hace mas uso de la primera construccion que de la segunda, por ser mas simple el aparato: y esto ha dado orígen al instrumento llamado *nivel de albañil*, que consiste en una plomada pendiente del
fig. 32. vértice M de un triángulo MLL' isósceles, formado con dos listones iguales ML y ML' de madera ó metal, cuyos estremos L y L' se aplican á un reglon NN' de madera, independiente del triángulo. Los brazos ML y ML' estan sujetos con un arco de círculo FF' graduado, cuyo centro es M y se halla en el plano mismo de aquellos: por otra parte, sabemos que si la recta MP divide el ángulo M del triángulo MLL' isósceles en dos partes iguales (Geom. 66), dicha recta es perpendicular al lado opuesto LL'. Luego, si aplicando el triàngulo al reglon en la forma que dijimos, se ordena todo el aparato en disposicion que el hilo se ajuste sin violencia al plano del triángulo MLL', y que pase al mismo tiempo por el punto medio del arco, será perpendicular al lado LL', y de consiguiente al reglon NN': y como MP es vertical, será horizontal la línea OR que se ajusta á la cara superior ò inferior

del reglon. De este modo y repitiendo la operacion á lo largo de OR, se nivela un piso en un sentido, es decir, en direccion de una recta; pero como sabemos por el artículo (138) de Geometría que se necesitan dos rectas para determinar un plano, hay que practicar igual operacion con otro nivel al mismo tiempo en direccion de otra línea del piso para nivelarle completamente.

Cuando es muy larga la línea OR que se quiere nivelar, como sucede en la construccion de caminos y en mediciones de tierras, se usa del nivel de agua, que co- fig. 31. mo se ha dicho es un tubo de metal con dos brazos en àngulo recto y en ellos acomodados otros de cristal, para ver las superficies S y S del agua tinturada con que se llena el tubo hasta subir á dicha altura el líquido, que está libremente en comunicacion por todo el interior del tubo. Colocando éste sobre un trípode apoyado en tierra, en disposicion que el tubo largo esté encaminado ácia el punto R lejano, y dirigiendo la fig. 33. recta visual OR ajustada à la superficie del agua, serà horizontal dicha recta: y si mientras hace esto el observador desde O, va otro colocando unas estacas verticales en puntos convenientes del terreno que estén en el plano vertical que pasa por OR, y marcando en ellas los puntos B', C', D',...... por donde pasa la horizantal á satisfaccion del observador O, quedarà trazada en el terreno la línea $ABCD$........, que resulta de cortar el plano vertical del nivel á la superficie de dicho terreno; y al mismo tiempo las distancias AA', BB', CC', DD',.... verticales desde los puntos principales del terreno á la recta horizontal, y las distancias horizontales $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$,....... desde A à los puntos B, C,....... de la tierra.

Sea con el nivel de albañil, sea con el de agua, sabemos marcar la recta horizontal que pasa por un punto en el sentido que se quiera al rededor de él, y tambien con la plomada la recta vertical única que puede pasar por dicho punto: y la medicion de las distancias horizontales desde él á una recta ó en plano està reducida, á contar las veces que en este intérvalo cabe sobre la línea trazada una medida, cual es vara, braza, etc.; asi como para las distancias verticales se cuenta las veces que cabe dicha medida en el hilo de la plomada, estando el vértice del cono de plomo en un estremo de la vertical que se mide, y un punto del hilo en el otro estremo. Si en vez de referir las distancias verticales AA', BB',......... al plano horizontal que pasa por OR, se quieren referir al plano horizontal que pasa por KE, siendo E el punto mas bajo de la escena, como habrá que hacer siempre por el convenio establecido de que toda ella ha de estar á la parte superior del plano de planta, necesitamos las distancias verticales AA'', BB'', CC'',........, y se deja conocer que se tendrán restando de la mayor ordenada EE' sucesivamente las ordenadas medidas AA', BB', CC',........., sea que correspondan á una misma horizontal, sea á todas las horizontales que paralela y perpendicularmente á esta se tiren, para medir las dos ordenadas perpendiculares horizontales y la vertical de cada punto de la escena.

fig. 28. Pero hemos convenido en que las dos ordenadas horizontales han de ser perpendiculares respectivamente á los planos coordenados verticales que habrá de antemano situado el dibujante; planos que, cuando la escena se halle en una sala rectangular, podrán ser los mismos de las paredes de ella ú otros dos paralelos á éstas, que pasando mas cerca de los objetos ó por medio de ellos se determinaren con unos reglones verticales ligados con travesaños fijos ò movibles. Y aunque aplicando el nivel á la regla con que se miden las coordenadas, fá-

cilmente se dirige la horizontal que pasa por un punto; la condicion de que esta sea perpendicular á un plano dado exige se encamine asi precisamente. Bien fácil debe ser al dibujante determinar esta direccion precisa de la coordenada horizontal (Geom. 139, II.º); pero á fin de economizar la repeticion para cada caso, mas cómodo le será el usar de un mecanismo fundado en el mismo principio, y que consiste en una cruz de tres brazos iguales formada con una regla y un brazo que se mueva en el plano de ella circularmente, siendo centro el punto donde se cruzan al cual está asida la cuerda larga que ha de marcar el horizontal, y saliendo de los estremos de los brazos tres cuerdas iguales que vayan á unirse en un punto de la larga. Se usa aplicando esta al punto del objeto, y al mismo tiempo la cruz al plano coordenado en disposicion que se ajuste á él, y queden tirantes las tres cuerdas de los brazos y la larga. En tal estado, la distancia desde el punto al centro de la cruz es la coordenada de que se trata, pues por construccion es perpendicular al plano coordenado, y de consiguiente horizontal á causa de ser vertical dicho plano.

19. Volviendo á nuestro asunto de las proyecciones empezado en el artículo (17), sabemos que se necesitan dos clases de operaciones para el dibujo de un punto, despues de situar oportunamente el sistema coordenado. 1.ª *Medir en el natural las tres coordenadas del punto*, que son dos horizontales perpendiculares entre sí y una vertical. 2.ª *Halladas estas dimensiones, construir las combinándolas de dos en dos*, con el auxilio de la escala que se ha de trazar préviamente.

Supóngamos que de la primera operacion han resultado $x=38$, $v=30$, $z=11$ para un punto M del espacio; luego, solamente nos resta situar en los tres cuadros la proyeccion de M. Para ello construiremos fig. 28.

ante todo la escala segun el grandor que se quiera dar
fig. 30. á los dibujos, y trazaremos los tres cuadros, como se dijo en el citado artículo, con solo las dos perpendiculares xAv y zAv. Despues de hacer esto, se toman sobre los ejes Ax, Av, Az, ó marcos de los cuadros desde el orígen A dichos tres valores de las coordenadas, y desde los puntos b, c, d en que terminan se dirigen las rectas bm y cm, las bm' y dm', y las dm'' y cm'' paralelas á dichos marcos respectivamente, y quedarán determinados los tres dibujos m, m', m'' geo-
fig. 28 métricos del punto M. No cabe duda en que por ellos, y aun solamente por dos, se puede formar idea justa de la posicion del punto en el espacio; pues que, si desde la planta m, por ejemplo, se eleva una perpendicular al plano de este dibujo, y se corta dicha perpendicular á la altura que espresa bm' ó su igual cm'', el estremo superior de la perpendicular será el punto M.

Si hay mas puntos N, O, P, ... que situar en los dibujos, se miden las tres distancias x, v, z desde cada uno, y se anotan por escrito sus valores en una tabla dispuesta del modo siguiente:

	M.	*N.*	*O.*	*P.*
x.				
v.				
z.				

Con los datos de ella se procede á situar en los tres cuadros las tres proyecciones de cada punto, lo mismo
fig. 30. que se ha hecho con el primero: mas, para que sea visible la estampa del objeto á que pertenecen, es necesario ligarlos al fin con líneas rectas ó curvas como el natural indique, y asi resultará el *contorno* ó límite de

la proyeccion del objeto, y los *dintornos* ó líneas incluidas dentro de dicho límite.

Cuando de los puntos del espacio unos pertenecen á un cuerpo y otros á otro, se sigue la misma regla. Situando primero las plantas por los valores de x y v, y ligàndolas debidamente segun el natural requiera, quedará construida la planta geométrica de la escena. Asi tambien con los valores x y z de cada punto se forma la elevacion geométrica, y con v y z el perfil.

Siempre que los objetos de la escena son de figura rectilìnea ò poliedral, los dibujos delineados de este modo gozan de toda exactitud si se hacen bien las operaciones; pues con situar en los tres planos sus vértices y dirigir rectas de unos á otros, resultaràn los tres dibujos de cada vértice, arista y plano segun estan ordenados en el objeto, y por ello, necesariamente cada figura delineada será el dibujo exacto de éste.

Dado por ejemplo un poliedro $MNOP$ cuya situacion, ya sea dada ya dispuesta por el dibujante á su voluntad, es en la escena cual se representa por la figura 28; mídanse las tres coordenadas de cada vértice, y supongamos resulte la tabla siguiente: fig. 23.

	M.	*N.*	*O.*	*P.*
x.	38.	29.	32.	40.
v.	30.	$27\frac{1}{2}$	$23\frac{2}{3}$	20.
z.	11.	$15\frac{1}{2}$	18.	14.

Fòrmese la escala segun el tamaño que se quiera tengan los dibujos; constrúyanse los puntos en planta, elevacion y perfil, como por ejemplo m en la planta con las coordenadas $Ab=38$ y $Ac=30$, m' en la elevacion con las coordenadas $Ab=38$ y $Ad=11$, y m'' fig. 30.

en el perfil con las coordenadas $Ad=11$ y $Ac=30$: é igualmente n, n', n'' con $A'b=29$ y $A'c=27\frac{1}{2}$, $A'd=15\frac{1}{2}$, etc.; y dirigiendo por último rectas correspondientes desde unos puntos á otros en cada uno de los tres cuadros, quedará concluida la delineacion ó parte artística de las proyecciones del objeto.

fig. 34. El cuerpo *M N O P* .... terminado por planos, y cuya posicion en la escena es cual manifiesta la tabla siguiente, no ofrecerá mas dificultad que la de repetir los mismos procedimientos del problema anterior respecto de todos sus vértices. Sea la tabla adjunta

	M.	*N.*	*O.*	*P.*	*Q.*	*R.*	*T.*	*V.*
x.	31.	11.	38.	57.	56.	29.	9.	37.
v.	62.	26.	11.	46.	47.	64.	28.	12.
z.	20.	19.	8.	8.	0.	0.	0.	0.

la que haya resultado de las mediciones: por ella se construirán los valores de x y v correspondientes á cada vértice de los ocho que el poliedro tiene, y quedarán las proyecciones de todos marcadas en la planta; y si se trazan entonces las rectas mn, no, op, pq, ... quedarà completada la delineacion de ella. Haciendo lo mismo con los valores de x y z, se ligan con rectas debidamente los puntos que resultan, y quedarà delineado el dibujo de alzado ó elevacion. Sígase tambien la misma pràctica con los valores de v y z, para situar los puntos en el perfil, y completar este dibujo con rectas correspondientes.

fig. 35. De un modo análogo se procederá para representar el grupo compuesto de dos poliedros, que se hallan dispuestos como se infiere por los datos que espresa la tabla siguiente:

	E.	F.	G.	H.	J.	K.	M.	N.	O.	P.	Q.	R.	T.	V.
x.	26.	5.	55.	55.	26.	5.	30.	25.	36.	41.	53.	42.	45	57.
v.	52.	31.	24.	24.	52.	31.	43.	35.	27.	32.	45.	56.	60.	50.
z.	9.	9.	9.	0.	0.	0.	26.	20.	20.	28.	0.	0.	9.	9.

En los dibujos de estos prismas se ven interrumpidas las líneas de un contorno por las del otro, y nótese que estan señaladas por puntos las líneas que se ocultan de la vista del dibujante, por estar cubiertas con la proyeccion de alguna de las caras del poliedro.

Las figuras de las superficies curvas regulares ó irregulares, tambien se pueden dibujar de este modo generalmente, midiendo las distancias x, v, z de sus puntos constituyentes en las respectivas perpendiculares á los planos de dibujo; pero se deja conocer que por muchos que sean los puntos que se marquen, habrá infinidad de otros intermedios que forman la continuidad de los contornos y dintornos; y que para obtener un resultado menos inexacto, deben ser los puntos mas notables y bastante contiguos los que se sitúen asi, teniendo el cuidado de no omitir aquellos á quienes correspondan las mayores y menores coordenadas, ni tampoco aquellos en que el contorno forma àngulo saliente ó entrante. Aun asi la figura trazada en el dibujo será las mas veces aproximada á la figura del natural, á causa de que el dibujante se verà precisado á ligar en su cuadro los puntos con rectas ò con curvas trazadas à ojo, mientras en el natural estan ligados con curvas cuya proyeccion exacta ignora, á menos que esta sea de naturaleza conocida, y posible su construccion por continuidad. Para completar à ojo en los casos precisos un contorno ó dintorno, se necesita que el dibujante posea la propiedad que se llama *ojeada*, la cual es en parte una exactitud de vista natural que se perfecciona con el hábito, y aun se adquiere, cuando por naturaleza no se halla dotado de un don tan precioso, con el ejercicio en valuar las distancias, los ángulos y las posiciones. Hé aqui la razon por qué todo dibujante se deberà ejercitar cuanto le permitan sus ocupaciones, en el dibujo llamado natural, trazando á ojo los contornos, y midiendo despues en el original la estension que haya fijado antes, para corregir por este medio los defectos de su vista, ò mas bien para acostumbrarse á apreciar diferencias entre la estension verdadera y la aparente.

Sea dado, por ejemplo, un cuerpo compuesto del poliedro de la figura 34, y de un promontorio de tierra
fig. 36. puesto encima, el cual desde el cúspide *W* desciende en figura cóncava respecto del plano de planta, formando cuatro aristas curvas que terminan en los vértices de la cara superior del poliedro, segun la tabla siguiente:

	M.	*N.*	*O.*	*P.*	*Q.*	*R.*	*T.*	*V.*	*W.*	*A.*	*B.*	*C.*	*D.*
x.	31.	11.	38.	57.	56.	29	9.	37.	36.	46.	39.	28.	32.
v.	62.	26.	11.	46.	47.	64.	28.	12.	51.	50	31.	44.	57.
z.	20	19.	8.	8.	0.	0.	0.	0.	28.	22.	20.	26.	25.

Despues de situar todos los puntos en los cuadros y haber ligado con rectas los del poliedro, el dibujante se hallará perplejo por no suministrar la tabla ni la definicion suficientes datos para trazar exactamente la marcha de las aristas curvas, y aun cuando quisiera medir las coordenadas de mas puntos, la irregularidad le sujetará siempre á la necesidad de ligar con rectas ó mas bien con curvas à ojo los puntos de dichas aristas, que estén marcados en los cuadros.

Ultimamente, el dibujo llamado *topográfico* que es el de un territorio de poca estension, se construye tambien por las coordenadas de cada punto notable. Para la planta se miden las x y las v en la correspondiente horizontal de las dos perpendiculares encaminadas à cada punto por medio del nivel (18), tomando el orígen en medio del plano de planta por la gran estension horizontal de la escena. Para los dibujos de elevacion y perfil hay que medir ademas las distancias verticales desde cada punto al plano de planta; y cuando por lo montañoso del terreno sean muy grandes algunas de dichas verticales para la medicion, será preciso dirigir visuales cortas y sucesivas en escalones desde el punto en que aquello sucediere hasta los estremos de las coordenadas horizontales, para deducir por sumas ó restas el valor de la vertical que no se pudo medir de una vez. No podemos estendernos en los detalles del dibujo topográfico, porque este ramo corresponde mas bien á la Trigonometría, y generalmente se prefieren para el objeto los sistemas fundados en los triángulos, sin ser precisamente rectángulos como en el sistema de coordenadas.

20. El método general que se ha establecido para las operaciones de medir coordenadas y delinear el dibujo geométrico de cualquiera objeto, admite algunas modificaciones cuando concurren ciertas circunstancias favorables para abreviarle. Citaremos varios casos en que esto se verifica, y se verá por ellos que la modificacion del método general proviene de la simetría (Geom. 175), ó de tener lugar en la cuestion alguno de los teoremas del artículo (159) de Geometría, segun el cual toda figura plana y su proyeccion sobre un plano

paralelo al de dicha figura son idénticos, y la proyeccion de toda figura plana sobre un plano perpendicular es una línea recta; debiéndose tener presente ademas que la proyeccion de un plano paralelo á uno de los coordenados sobre otro es una recta paralela al eje coordenado en que se cortan éstos (Geom. 143).

Caso I.° El prisma ó cilindro de bases paralelas á uno de los planos coordenados admite abreviacion; por-
fig. 37. que tienen iguales alturas todos los lados, las bases dan sobre dicho plano proyecciones de figura idéntica á la de los originales, y las proyecciones de ellas sobre los otros dos planos coordenados son líneas rectas paralelas al primer plano. Si ademas fuere recto el prisma ó cilindro, su proyeccion en el plano sobre que se eleva el cuerpo está reasumida en la proyeccion de la base. Para dibujar cualquiera de estos cuerpos basta que se nos dé la definicion de la base, el lugar que un punto de ella ocupa en el plano sobre que insiste, y las coordenadas del punto correspondiente de la otra base: y cuando sea regular la figura de las bases, conviene que los puntos dados sean los centros de ellas. En los dibujos que se citan al márgen se supone que el cuerpo se eleva sobre el plano de planta.

fig. 38. Tambien la piràmide ó el cono de base paralela á uno de los planos coordenados, dará sobre éste por base en la proyeccion una figura idéntica á la del original, y en los otros dos planos una línea recta. Si ademas fuere recta la piràmide ó el cono, su proyeccion sobre el plano á quien es paralela la base está reasumida dentro del contorno de la base. Para dibujar cualquiera de estas dos figuras basta que se nos dé la definicion de la base, y las coordenadas del cúspide; pues aun en la planta del cono se trazan los lados tirando dos tangentes desde el cúspide al círculo de la

base, si cae fuera de este la proyeccion de aquel punto.

Caso II.° Los cuerpos que son disponibles en la escena simétricamente respecto de uno ó de dos planos perpendiculares á uno de los coordenados, como por ejemplo al de planta, ofrecen medio de abreviar mucho las operaciones trazando en primer lugar la proyeccion del plano á que se refiere la simetría (Geom. 175). Se propone por ejemplo dibujar una mesa tosca de 3 pies de altura, cuyo tablero tiene figura rectangular de 6 fig. 39. pies de longitud, 4 de latitud y 3 pulgadas de grueso, sostenido por cuatro pies paralelepípedos con bases de 4 pulgadas de lado mayor y 3 de menor, que desde los ángulos del tablero en donde estan fijos á la distancia de 6 pulgadas de sus bordes, vienen à formar en el plano de planta una base rectangular concéntrica á la del tablero, y cuyo lado mayor tiene $7\frac{1}{2}$ pies de longitud y 5 de latitud. En vista de que los dos grandes rectángulos del tablero y base son simétricos respecto de dos planos perpendiculares, que pasando por los centros sean perpendiculares al de planta, se trazan desde luego en este dos rectas *ab* y *mn* perpendiculares, que serán las proyecciones de dichos planos à que se refiere la simetría, pero con la prevision de que disten de los ejes cuanto es necesario para que quepan las semilongitudes de los lados de los grandes rectángulos. Se toman para el tablero en *ab* à uno y otro lado del concurso *c* con la perpendicular, las distancias *ce* y *c'e* iguales á 3 pies de la escala, y en *mn* las *cf* y *c'f* iguales à 2 pies; lo mismo para la base, *cg* y *c'g* iguales à $3\frac{3}{4}$ pies en *ab*, y despues *ch* y *c'h* iguales á $2\frac{1}{2}$ pies en *mn*. Los rectàngulos quedaràn trazados tirando paralelas à las rectas *ab* y *mn* respectivamente desde los puntos, *e*, *'e*, *f*, *'f*, *g*, *'g*, *h*, *'h*; y por último, construyendo despues sobre los àngulos de la base los paralelógramos de las dimensiones dadas para los pies, como tambien otros iguales en los vértices del rectángulo interior diseñado en el tablero, se ligan con rectas los vértices correspondientes de estos paralelógramos, y quedaràn trazados los pies y toda la planta. De un modo análogo se construyen los dibujos de alzado y perfil, elevando ante todo la perpendicular respectiva al plano de simetría, y en seguida las demas necesarias para marcar los vértices del tablero y de los pies, y los gruesos que les corresponden.

Caso III.° Los cuerpos que se llaman de *revolucion*
fig. 40. à causa de ser engendrados por una figura plana, como por ejemplo $b'g'o'n'm'k'j'h'$, dando vuelta al rededor en su lado recto $b'g'$ mientras el lado $o'n'm'k'$..... recto, curvo ó mixto describe la superficie de dicho cuerpo, son muy fáciles de dibujar por métodos particulares, cuando la recta $b'g'$ ò *eje de revolucion* es perpendicular à uno de los planos coordenados, como por ejemplo al de planta. Pues en tal caso la proyeccion sobre este plano se compone de círculos concéntricos y contenidos en el descrito con la mayor distancia $d'k'$ desde la generatriz de la superficie al eje de revolucion: las proyecciones sobre los otros dos planos coordenados son iguales, y por ello, en general basta la de alzado; que se forma construyendo à uno y otro lado de la recta $b'g'$ la misma figura plana generatriz del cuerpo. Cuando el lado de esta figura ò la línea generatriz de la superficie es curva de naturaleza desconocida, se construye en el alzado por puntos, despues de medir muchas perpendiculares $'hh'$, $'jj'$, $'kk'$, etc. al eje de revolucion por medio de un compas curvo aplicado sucesivamente al cuerpo que se quiere dibujar, y las distancias correspondientes $b'g'$, $c'g'$, $d'g'$, etc. desde dichas perpendiculares al plano de planta por medio de dos ploma-

das, cuyos hilos pendientes de las prolongaciones del diámetro *'hh'* del círculo superior del cuerpo de revolucion, y puestos en contacto con los puntos *'k*, *k'*, de este mas salientes, determinan el plano de la figura generatriz en que se han de medir las distancias espresadas. Los semidiámetros *b' h'*, *c' j'*, *d' k,'* etc. seràn las distancias que se han de tomar desde el eje de revolucion á correspondientes alturas, para formar el alzado; y con los mismos semidiámetros se trazan los círculos de la planta. Si la curva generatriz es de las que en geometría se describen por continuidad, como por ejemplo, el círculo, la elipse, la paràbola y la hipérbola, ó es discontínua compuesta de partes de esta especie; se traza por las reglas que en dicha ciencia se habrán aprendido. En el artículo (16) dijimos que la mayor parte de las manufacturas de figura curva se componen de porciones esféricas, y por consiguiente de circulares la curva generatriz; en cuyo caso despues de anotar los puntos de division *j'*, *m'*, etc. de los varios arcos circulares, se hallan los centros respectivos, y desde estos se trazan los arcos, como queda dicho en el artículo citado.

Caso IV.° Vamos á ocuparnos de otro caso importante, proponiendo delinear las proyecciones de una fig. 41. curva del espacio, situada en plano perpendicular á uno de los coordenados, sea cualquiera la posicion del plano de la curva; y para mas determinar las circunstancias, convendremos en que éste sea perpendicular al plano de planta, y que va girando al rededor de una recta vertical representada por *o o'*.

Sabemos que la planta de la curva en este caso es una línea recta *ao*, ó *bo*, ò *eo*, etc. que coincide con la proyeccion del plano mismo vertical en donde se halla (Geom. 159, 1.°): y asi, en el caso de ser dicho plano paralelo al coordenado de elevacion, la planta de la curva es una recta bo paralela al eje coordenado Ax (Geom. 143), y la elevacion una curva $b'f'o'$ idéntica á la original del espacio (Geom. 159, II.°); y cuando el plano de esta curva se halla situado paralelamente al de perfil, su planta es una recta eo paralela al eje Av y la elevacion una recta $e'o'$ paralela al eje Az. En todos los casos la planta del eje de revolucion de la curva es un punto o (Geom. 159, I.°), y su elevacion una recta $e'o'$ paralela al eje coordenado Az (Geometría 159, III.°), y que prolongada pasa por o; de suerte que en los dibujos se confunde con la planta y alzado de la curva cuando el plano de ella es perpendicular al de las x, z.

En el intérvalo que media desde ser el dibujo de alzado una curva $b'f'o'$ idéntica á la original, hasta ser una recta $e'o'$ paralela á Az, es decir, mientras el plano mòvil anda un cuadrante, el alzado de la curva y lo mismo el perfil, debe necesariamente variar de forma con arreglo á una ley desde un límite al otro, y lo mismo en cada uno de los otros tres cuadrantes que restan para dar la vuelta completa. En todo este viage cada punto de la curva, como por ejemplo el representado por b', cuya distancia al eje de revolucion $e'o'$ es $b'e'$, describe un círculo con el radio $b'e'$ paralelo al plano de planta; y por ello (Geom. 159, II.°) las plantas bo, ao, etc. de la curva son iguales al mayor radio $b'e'$ de la $b'f'o'$; y en el alzado el dibujo de la circunferencia descrita por cada punto b' de la curva, resulta confundido con el de su radio (Geom. 143): por cuya razon, siendo b' el estremo movible de la curva, se halla siempre dicho estremo en la recta $b'e'$ paralela á Ax, mientras el otro estremo fijo o' permanece en el mismo lugar.

Estas observaciones preliminares nos dan suficiente luz para delinear las proyecciones de cualquiera curva del espacio situada en plano vertical, considerándola como generatriz de una superficie de revolucion al rededor de una recta vertical; como por ejemplo la curva que debe dar la proyeccion $a' c' o'$ cuando su plano $a' o' c'$ està en la posicion que determinan el eje $o' e'$ de revolucion, y un punto a' de la circunferencia que describe el movible representado por él. Para ello mediremos las coordenadas de los estremos de la curva en la posicion que ocupa; y suponiendo que son AK y AL las x, AP y AQ las v, como tambien AM y AN las z, situaremos los puntos a y o en la planta, a' y o' en la elevacion, y los correspondientes en el perfil si fuere necesario, aunque aqui se suprime porque su construccion se hace lo mismo que la del alzado; y veamos ahora còmo se dirige el curso de la línea que los ha de ligar. En la planta no cabe duda; pues por lo dicho, la recta $a\,o$ es la línea. Pero en la elevacion, la recta $a' o'$ que se tire servirà solamente para señal de que la curva debe ir por encima, si la original presenta su concavidad ácia el plano de planta, y por debajo si presenta la convexidad; pues en el primer caso las ordenadas z de la curva intermedia á los estremos a' y o' son mayores que las de la cuerda; y en el segundo caso menores. fig. 41.

Tràtese pues de encaminar la curva $a' c' o'$ cóncava por puntos que se fijen entre los ya situados a' y o', y con este fin, despues de tirar la recta $e' o'$, y la $a' e'$ perpendicular à ella desde el punto a', constrúyase la curva $b' f' o'$ idéntica á la original, desde el punto fijo o' al estremo b' movible de la recta $a' e'$ segun la Geometría enseña, tomando desde e' la longitud $b' e'$ igual al radio de revolucion original. Tràcense tambien las plantas ao y bo rectas de la curva en sus dos posiciones determinadas por los puntos o, a, b; y despues de dividir estas plantas en partes iguales, elévense desde sus puntos de division rectas paralelas á oo'. Las elevadas desde bo cortan á la curva $b'f'o'$ en puntos correspondientes á aquellos, en que las elevadas desde ao cortarian à la curva $a'c'o'$ si estuviese construida; y como cada par de dichos puntos correspondientes debe hallarse en una recta paralela al eje Ax, como b' y a' en la $b'e'$, á causa de pertenecer á una misma circunferencia de revolucion, se sigue que tirando desde los puntos de division de la curva idéntica $b'f'o'$ rectas perpendiculares á las elevadas desde ao, los puntos en que resulten cortados serán de la curva $a'c'o'$. Para convencerse de ello, fijaremos por ejemplo la atencion en los puntos f' y c' que decimos correspondientes, y que lo son en efecto, pues que se hallan en la recta $f'c'$ paralela á Ax y de consiguiente proyeccion de la circunferencia que describe el punto original: y como el punto c' de la curva que se quiere construir se debe tambien hallar precisamente en la recta cc' elevada desde su planta c, se sigue que es la interseccion c' de las rectas $f'c'$ y cc'. Lo mismo se demuestra que pertenece á la curva $a'c'o'$ otro cualquiera de los puntos que resultan de cortar las rectas elevadas desde los puntos de division de ab, por las perpendiculares à ellas que vengan de los puntos de division de la curva $b'f'o'$: y por tanto, despues de haber determinado asi muchos puntos de la curva que se ha de construir entre los estremos a' y o' fijados, se ligan debidamente; siendo bien sabido que el resultado será tanto mas aproximado á lo exacto, cuanto mayor número de puntos determinados haya. A fin de que el dibujo salga mas limpio, conviene dividir en partes iguales en vez de *bo* la recta *ho'* esterior que sea paralela é igual á *bo* y bajar perpendiculares desde sus puntos de division, como *gf'*, para señalar en la curva *b'f'o'* los puntos desde donde se deben tirar despues las perpendiculares, como *f'c'*, que corten á las rectas que suban de la planta *ao*; método equivalente al anterior, pues las divisiones de *h'o'* resultan de las de *bo*, mediante las perpendiculares que se levantan desde ella. Cuando queda indeterminada alguna parte grande de curva entre dos intersecciones, se subdivide en dos ò mas partes iguales la parte de *ho'* y la de *ao* entre quienes se halla la indeterminacion.

Si la curva fuere convexa respecto del plano de planta, el dibujo sobre éste será el mismo de la cóncava, pues coincide siempre con la proyeccion del plano vertical en que se halla la curva; y para construir el alzado se practican las mismas operaciones del caso anterior. Entonces cada punto *d'* de la curva desde *a'* á *o'*, se termina bajando desde el correspondiente *i* de la idéntica convexa perpendiculares à las rectas elevadas desde las divisiones de *ao*.

Con el fin de presentar ejemplos ó casos de aplicacion de este método, proponemos para dibujar una cúpula cerrada por cuadrantes circulares cóncavos respecto del plano de planta; y otra cúpula ó torre chinesca tambien cerrada con arcos circulares convexos respecto del mismo plano, y apoyados interiormente con armazon ó macizo equivalente. En ambas figuras consideramos que la superficie comprendida entre dos aristas, está engendrada por una línea recta horizontal que caminase sola tocando siempre à éstas; y por ello, en la planta será un polígono rectilíneo el contorno de la figura, el cual resulta de proyectar todas las rectas generatrices cuando se hallan á una misma altura.

fig. 42.

fig. 43.

Caso V.º Aunque sea simétrico el cuerpo respecto de algun plano, ò de revolucion formado sobre una recta, si este plano ó recta no son perpendiculares á alguno de los planos coordenados, porque tienen ya en la escena otra posicion determinada, no habrá lugar en su totalidad á las modificaciones del método general que se acaban de esponer. Sin embargo, aun entonces no dejará de ofrecer las mas veces algun alivio la regularidad del cuerpo, despues que por el método general se hayan trazado en los dibujos las proyecciones de dicha recta ó plano á que se refiere la regularidad.

Se propone, por ejemplo, el construir los dibujos de un cuerpo de revolucion engendrado al rededor de un
fig. 44. eje que no sea perpendicular á plano coordenado alguno: y desde luego, por la definicion misma de esta clase de cuerpos, se deduce que se pueden considerar compuestos de una infinidad de círculos perpendiculares al eje de revolucion, cuyos centros estan todos sobre esta recta, como sucede en el cono y el cilindro (Geom. 186 y 188).

Por tanto, lo principal de la resolucion del problema que nos ocupa depende de otro, que es el siguiente:

Dados los dibujos ab y $a'b'$ de una recta AB del espacio, no perpendicular á plano coordenado alguno, y la longitud k del radio de un círculo perpendicular á la recta dada en su estremo A representado por a y a', donde tiene el centro, determinar los dibujos de planta y elevacion de este círculo, distinguiendo con apóstrofe el orígen A' de coordenadas.

Primeramente, observaremos que en general los dibujos de un círculo pueden ser de tres formas distintas; una recta, como en la elevacion de la figura 37; un cìrculo igual al del espacio, como en la planta de la misma, ó una curva cerrada de la especie del círculo, pero de diàmetros desiguales que se llama elipse, como *cedf* y *hlgi* en la planta y elevacion de la figura 44. Sucederá lo primero cuando el círculo del espacio esté sobre el plano proyectante (Geom. 159); lo segundo, cuando el círculo sea paralelo al plano de dibujo (Geom. 159, II.°); y lo tercero en todos los demas casos, por la distinta inclinacion que cada diámetro del círculo del espacio tiene respecto al plano de dibujo. La determinacion de los dibujos en los dos primeros casos es muy fácil, y se esplicó ya el modo en sus lugares respectivos; pero en el tercer caso, que es el del problema, para poder trazar las curvas *cedf* y *hlgi* elípticas, dibujos del círculo del espacio, es necesario averiguar ante todo las posiciones y magnitudes respectivas de los diámetros que resultan mayor y menor en cada dibujo.

Fijándonos primeramente en la planta, imagínese un plano horizontal que pase por el estremo superior de la recta *AB*, ó lo que es lo mismo, por el centro *A* del círculo que está situado en aquel punto; este plano cortará el círculo segun un diámetro que será paralelo al plano de planta, y por consiguiente su proyeccion sobre este plano será igual al diámetro del círculo del espacio, ó 2*k* (Geom. 159, II.°). Por otra parte, todos los diámetros del natural serán perpendiculares á la recta *AB*, por hallarse en un plano perpendicular á ésta y pasar por su pie (Geom. 139), de consiguiente lo será el horizontal que consideramos; y como ademas es paralelo é igual à su proyeccion (Geom. 159, II.° y III.°), resulta que, si en el punto *a* dibujo horizontal del centro levantamos la perpendicular *cd* á la recta *ab*, y sobre ella tomamos las partes *ad*, *ac*, iguales à la estension *k*, la recta *cd* será el diámetro mayor del dibujo de planta. Para determinar el menor, hágase pasar por la recta AB un plano perpendicular al de planta, el cual cortará al círculo en un diámetro cuyos estremos serán los puntos mas distante y mas próximo à dicho plano de planta; el dibujo horizontal de este diámetro, asi como el del plano vertical que lo ha causado, caerán sobre el de la recta AB y su prolongacion, que es bae; mas, falta determinar la longitud del dibujo de dicho diámetro. Para conseguirlo, concíbase que el plano vertical proyectado en be con todas las líneas que en él asisten, gira conservando todos sus puntos á la misma altura, al rededor de una línea vertical proyectada en b, hasta que sea paralelo al plano de elevacion. Concluido este paso, dicho plano estará proyectado en br; el punto a habrá pasado á m, el a' á m', y la recta del espacio cuyo dibujo de elevacion era $b'a'$ se hallará en $b'm'$: de manera que $b'm'$ es igual á la verdadera longitud de esta recta, y forma con el eje $A'x$ un àngulo $m'b'x$ igual al que mide la inclinacion de la recta del espacio con el plano de planta (Geometría 159, IV.°). Luego, si en el punto m' se tira la perpendicular $n'o'$ á la $b'm'$, y se toman sobre ella las partes $m'o'$ y $m'n'$ iguales al radio k dado, la recta $n'o'$ serà igual en posicion y magnitud al diámetro que consideramos despues del giro. Proyéctese en seguida el punto n', estremidad de este diámetro en n sobre el plano horizontal; y haciendo que todo el aparato vuelva á su posicion primitiva, el punto n proyeccion del estremo del diámetro marcará sobre la recta be, por medio del arco del círculo ne la parte ae mitad del diámetro menor ef.

Construidos ya los diàmetros cd y ef, y fijados asi los cuatro puntos c, e, d, f de la curva $cedf$, que será el dibujo de planta, vamos á determinar los demas puntos de ella imaginando en el círculo del espacio un sistema de cuerdas paralelas al diámetro que ha dado el menor *ef* de la planta. Se sabe que cada cuerda del círculo paralela al diámetro original de *ef*, dará una proyeccion paralela á *ef* (Geom. 159, III.°), y en virtud del paralelismo de las cuerdas y de sus proyecciones entre si, precisamente habrá entre las longitudes de cada cuerda y su proyeccion la razon misma que entre el diámetro del círculo y su proyeccion *ef*, por ser cada razon de estas igual al coseno del ángulo que dicho diámetro forma con el plano de dibujo (Trigonometría 47, XIII). Apoyados en esta verdad, y trazando con el radio *ac* un círculo, y con *af* otro, tírense en el dibujo muchos radios $a\lambda$, ..., y desde los puntos λ .... en que estos cortan al círculo mayor encamínense cuerdas $\lambda\psi$, ... paralelas al diámetro menor *ef*, como tambien desde los puntos *j*, ... en que los radios cortan al círculo menor paralelas *jt*, ... al diàmetro mayor *cd*, y resultará que los puntos *t*, ... en que estas cortan á las cuerdas son de la curva del dibujo, la cual se llama *elipse* (Geom. anal. 84), pues cada uno de sus puntos goza de la propiedad característica análoga á la que en la proporcion siguiente está cifrada para el *t*, que se toma por ejemplo,

$$ac : af :: \omega\lambda : \omega t,$$

segun resulta de comparar las partes proporcionales en que la recta *jt* divide los lados del triángulo rectángulo $a\lambda\omega$ (Geom. 34), en que $a\lambda$ y *aj* son respectivamente iguales á las rectas *ac* y *af* determinadas; es decir, que el semidiámetro mayor de la elipse es al menor, como la semicuerda original es á la correspondiente de su dibujo elíptico. De esta suerte se van marcando todos los puntos que se quieran de la elipse desde *e* y *f* hasta *c*, y lo mismo hasta *d*, simétricamente situados de dos en dos respecto de los diàmetros mayor

cd y menor ef. Al fin se ligaràn los puntos contiguos que se hubieren situado, y resultará la figura elíptica con tanta mayor exactitud cuanto mas cercanos entre sí se hallen dichos puntos contiguos.

Para trazar el dibujo ó curva elíptica de elevacion, procédase lo mismo relativamente al plano vertical, ó hágase la construccion de la siguiente manera. En el punto a' de $a'b'$ levántese la perpendicular hg igual al diàmetro del natural ó $2k$: haciendo centro en b' con el radio $b'a'$ trácese el arco de círculo $a'p'$, y proyéctese p' en p sobre la paralela ap de $A'x$: en el punto p levántese la perpendicular sq á la bp, y tómense sobre ella las partes pq, ps iguales á la estension k. En seguida proyéctese q en q'; y trazando el arco $q'l$, quedará determinada la parte $a'l$, semidiámetro menor, y de consiguiente la otra mitad $a'i$. Ya tenemos los cuatro puntos elípticos h, l, g, i, estremos de los diàmetros mayor y menor del dibujo de elevacion, con cuyos datos y el método de construccion que se ha empleado para la planta se trazará la elipse $hlgi$ de la elevacion. Con esto hemos concluido de resolver el problema que se ha propuesto como preliminar del que sirve de asunto al artículo, y es el siguiente.

Delinear los dibujos del cuerpo de revolucion engendrado al rededor de un eje, cuyos dibujos de planta y elevacion ab y $a'b'$ suponemos construidos, despues
fig. 44. *de haber medido las coordenadas x, u, z de cada uno de sus estremos, teniendo construidos tambien los dibujos de planta y elevacion de una de sus bases.*

Sea cualquiera la curva generatriz del cuerpo de revolucion; la base inferior de este dará tambien elipses por dibujos de planta y elevacion en virtud de lo demostrado, los cuales se delinearán siguiendo el método mismo que para los de la base superior. Hecho esto, supongamos θ, y δ en la planta los estremos del diámetro mayor de la base inferior correspondientes á los c y d de la superior, asi como ξ y ν en la elevacion los estremos del diàmetro mayor de la base inferior correspondientes à los h y g de la superior; y solo nos resta conducir las curvas $c\theta$, $d\delta$ en la planta, y las $h\varepsilon$, $g\nu$ en la elevacion, ò sean los dibujos de la curva generatriz. Con este fin, recuérdese que el cuerpo propuesto se puede considerar formado por infinidad de círculos paralelos à las bases, y que por tanto han de dar sus proyecciones elípticas con diàmetros mayores paralelos entre sí, é iguales à los diàmetros de los círculos correspondientes. En consecuencia de esta verdad, mediremos muchos diàmetros consecutivos del cuerpo equidistantes; y dividiendo la proyeccion $a\alpha$ del eje en otras tantas partes iguales entre sí como tambien la $a'\alpha'$, tiraremos en los puntos de division perpendiculares à dichas proyecciones, y tomaremos en aquellas por uno y otro lado del eje partes iguales à los respectivos semidiàmetros originales, como $\zeta\varepsilon$, $\zeta\beta$ en la planta, y $\zeta'\mu$, $\zeta'\pi$ en la elevacion. Asi quedan establecidos todos los puntos que se quieran de las cuatro curvas laterales $c\beta\theta$, $d\varepsilon\delta$, $h\pi\varepsilon$, $g\mu\nu$, y ligando los contiguos de cada una de ellas, resultarà determinada con toda la exactitud que se quiera su curso desde una base à otra.

21. Muchas veces interesa construir el *dibujo de la seccion ó corte* que haria un plano segun determinada direccion en un cuerpo ó en toda una escena; y comunmente es horizontal ó vertical el plano secante. Para ello se traza en la planta si el corte es vertical, ó en la elevacion si es horizontal, la recta ó proyeccion de la línea por donde ha de pasar el plano; y à fin de construir el otro dibujo de la seccion, que es en donde se espresan las circunstancias de ella, necesitamos gene-

ralmente determinar puntos por medio de coordenadas (19).

Cuando es un objeto mediano ó irregular el que ha de ser cortado verticalmente, se marcan en la superfi-
fig. 45. cie por medio de muchas plomadas pendientes de un reglon situado en la cima horizontalmente segun la recta indicada *js*, puntos del corte que en toda la estension de la superficie haria el plano vertical: se miden las coordenadas *AC′* horizontal y *C′C* vertical de cada punto *C* de la seccion; y el dibujo de elevacion que resulte construido por las coordenadas que se han medido, *es la seccion vertical por la línea ab.*

En el caso de ser el corte horizontal, se usa tambien
fig. 46. un aparato semejante, siendo igualmente largos todos los hilos de las plomadas, y haciendo que sobre un reglon *AB* horizontal marche el horizontal *N′K′* de las plomadas, perpendicular al primero, paralelamente á sí mismo para determinar la raya de seccion horizontal al rededor de la superficie del objeto. Aqui la distancia *AJ′* que haya desde un punto *A* del reglon fijo al movible es la coordenada x comun à dos puntos *N*, *K* de la seccion, y las distancias *J′N′*, *J′K′* son las coordenadas v de *N* y *K*. El dibujo de planta que resulta será la *seccion horizontal por la línea js.*

Si el objeto es hueco en la parte donde se supone la seccion, serà necesario hacer tambien en su interior operaciones anàlogas; y por último, sumando ó restando segun sea necesario unas dimensiones con otras, se tendràn todas las alturas y gruesos del objeto. De este modo se pueden considerar hechas las mediciones para
fig. 76. 77. construir los dibujos de las dos secciones en las figuras que se citan, aunque se deja conocer que por su regularidad se pueden abreviar en estos casos.

Para la seccion vertical de un terreno se hace uso de las operaciones esplicadas al fin del artículo (19), con una ó mas miradas de nivel, segun la línea *MN* que se haya marcado en el plano de planta. Veànse las figuras 31 y 32 de la perspectiva. Habiendo anotado las coordenadas horizontal y vertical de cada punto, se construye por escala en el papel la figura *'M'NLK* de la seccion vertical por la línea *MN*. De un modo semejante se traza la seccion vertical de una laguna ó rio por la línea *PQ* marcada en el papel, señalando en las márgenes los puntos *'P* y *'Q*, asimismo en la prolongacion de la línea sobre la superficie del agua por medio de señales flotantes fijas los puntos *'R*, *'S*, *'T*, y midiendo con plomadas de mucho peso que se llaman *sondas* las verticales *'Rr*, *'Ss*, *'Tt*.

El contorno ó la línea de seccion que resulta de cortar por un plano la superficie de una manufactura se llama entre los artistas *plantilla*, y se emplea para dar à la superficie esterior ó interior de dicha manufactura la figura que debe tener segun el sentido del corte. La figura 47 representa la plantilla esterior de un objeto. La figura 48 I.ª es plantilla interior, y la 48 II.ª, esterior de una moldura misma. Cuando se quiere dar á la manufactura forma circular en todas las secciones paralelas á una, esto es, que sea figura de revolucion la superficie, basta una plantilla sola para toda ella, como sucede en las obras de torno, las cuales se trazan de dos modos: 1.º haciendo girar al cuerpo tosco sobre un eje, de modo que le hiera la plantilla situada en posicion fija: 2.º haciendo girar á la plantilla circularmente, de modo que desvaste al cuerpo tosco que està fijo. fig. 47. 48.

Otras veces la plantilla no tiene filo; y su objeto es entonces el servir para la comprobacion de sí una obra hecha tiene la figura que está prescrita.

Aunque la plantilla se puede formar por medio de

plomadas pendientes de un marco, dando antes al cuerpo cuando sea posible la posicion conveniente; será muy útil á los artistas para sacar dicha plantilla de un objeto delicado, ya con objeto de dibujarla en papel ya de recortarla en una lámina de metal, un aparato construido de antemano; que consiste en un marco con muchos agujeros ocupados por unos alambres rectos
fig. 47. 48. corredizos en sentido del plano secante y perpendiculares al lado del marco. Acercando al objeto el marco en la direccion que se quiera segun el corte, corriendo las alambres hasta que sus estremos toquen á la superficie del objeto, y asegurándolos entonces al mismo marco de modo que no se puedan mover, resultará la figura de la plantilla marcada por los puntos de los alambres, tanto mas determinadamente cuanto mas cercanos estén entre sí.

22. Ha debido causar al dibujante cierta estrañeza la variacion de formas que se observa entre la figura original que dibuja y la que sale en el cuadro; y para ilustrar algun tanto esta materia consultaremos á la
fig. 49. Geometría. Dirigiendo desde los puntos de la recta MN situada en cualquiera posicion, perpendiculares á uno de los planos de dibujo, como por ejemplo al de planta, sea mn su proyeccion, y de consiguiente el plano $MmnN$ perpendicular al de xv; Mm y Nn los valores de z respectivos à M y N, como tambien AB y AC los de x, y AD y AE los de v correspondientes à ellos. Trazando en el plano Mn la recta MO paralela á la proyeccion, será igual á ella (Geom. 30), y formará el triángulo MNO rectángulo, por el cual se ve que MN se acercará tanto mas á ser igual á su proyeccion, cuanto menor sea la diferencia ON de las z, esto es, cuanto mas se acerque la línea del espacio á ser paralela al plano en que se proyecta. De suerte que

cuando llegue el caso del paralelismo, resultarán iguales la línea y su proyeccion: cuando *MN* sea perpendicular al plano en que se proyecta, será su proyeccion un punto *m* ò *n*; y entre estos límites varía la diferencia segun resulta de comparar la hipotenusa *MN* con el cateto *MO*. Lo mismo se puede decir de la línea respecto de su proyeccion sobre cualquiera plano de los de dibujo, ó sobre otro en que se quiera proyectar.

La Trigonometría nos enseña el modo de averiguar en todos los casos la relacion que tiene la longitud de una recta del espacio con la de su proyeccion. Para ello sabemos (Trigom. 21) que en un triàngulo estan los lados en razon de los senos de los ángulos opuestos á dichos lados; y por tanto, del triàngulo rectángulo *MON* en que el seno de un àngulo agudo es coseno del otro, se deduce el valor de la proyeccion de una recta respecto del valor de esta, suponiendo igual á la unidad el seno máximo ó del ángulo recto, y *M* el ángulo *MNO*, por medio de la proporcion

$$mn : MN :: \cos. M : 1.$$

Y como el coseno de *M* es menor que 1, y solo llegarà á ser 1 cuando la recta no forme ángulo con el plano de proyeccion, es decir, cuando sea paralela à él; se sigue que una recta del espacio es generalmente mayor que su proyeccion, y solo puede ser igual à ella cuando la recta es paralela al plano en que está proyectado, segun antes hemos deducido tambien sin haber necesitado de la espresion trigonométrica. Los artistas llaman *escorzo* á esta diminucion aparente de la línea, y lo mismo á la variacion, de forma que una figura plana padece en su proyeccion sobre otro plano oblicuo. Por el escorzo vienen á disminuirse algunos diámetros de la proyeccion de un círculo descrito en plano oblicuo al de poyeccion, en términos de quedar convertida en figura elíptica: por la misma causa llega à ser un punto la proyeccion de una recta perpendicular al plano en que se proyecta; y tambien á ser una línea recta la proyeccion de toda figura descrita en plano perpendicular.

La proporcion que se ha escrito espresa en números lo mismo que el triángulo *MNO* rectángulo manifiesta con sus lados y ángulos: de suerte que aquello sirve para resolver aritméticamente los problemas, que tambien se resuelven por construccion trazando el triángulo con los datos geométricos necesarios. Este método último es el preferible para el dibujante: y asi, cuando necesite averiguar la longitud que tendrà en el cuadro la proyeccion de cualquiera recta del espacio, cuya inclinacion respecto del plano de dibujo conoce, deberá
fig. 50. trazar con dos rectas indefinidas *MG* y *MQ* el àngulo que la recta del caso forme con el plano en que se proyecta, ó lo que es igual con su misma proyeccion (Geometría 159, IV.°); y despues de tomar con el compas desde el vértice en uno de los lados indefinidos la longitud de la recta, que supondremos *MN*, hallará el valor de la proyeccion graficamente, bajando desde el punto *N* la perpendicular *Nn* al otro lado indefinido, en quien resultarà interceptada la distancia *Mn* igual á la proyeccion pedida.

Para formar idea de la influencia de esta verdad en el dibujo, haremos algunas aplicaciones describiendo en un mismo plano proyectante cuantos ángulos fueren menester. Con este objeto imagínese que la recta *MN* va girando al rededor de su estremo fijo *M*, sin salir fuera del plano $MQNN'''$ perpendicular al de proyeccion ó de dibujo que pasa por *MQ*; y el estremo *N* mòvil de la recta irà descubriendo la circunferencia $NN'N''$........., es decir, formando con su primera posicion *MQ* todos los àngulos imaginables que puede haber entre las rectas de la escena y el plano de dibujo, sin que sea necesario pasar del cuadrante para resolver cualquiera problema de hallar sobre la recta $M Q$ la proyeccion que se quiera: pues aunque una recta forma dos ángulos suplementarios con un plano, la proyeccion cae siempre en el lado del ángulo agudo. Para las aplicaciones se toma desde el vértice la longitud de la recta original, sobre el radio que forme con MQ el àngulo debido. Suponiendo por ejemplo àngulo semirecto, se traza el $N'' M Q$ de este valor; y tomando en uno de sus lados indefinidos el valor ME ò MN'', ó MJ, etc. de la línea dada, se baja desde E ó N'', ó J, etc. la perpendicular $E e$ ó $N'' n''$, ò $J j$, etc. para deducir el valor Me ó Mn'', ó Mj de su proyeccion sobre el plano con quien forma ángulo semirecto. fig. 50.

Mas adelante necesitaremos emplear este método en los problemas del artículo (27) y el 4.º del (28), que traen la circunstancia de que la recta forma con el plano de dibujo un ángulo tal, que el seno es al coseno como el lado del cuadrado á la diagonal de este; y entonces habremos de trazar el ángulo del modo siguiente. Formando primero el ángulo $N'' M Q$ semirecto y el triángulo $M n'' N''$ rectángulo isósceles, tómese sobre el cateto $M n''$ prolongado la longitud $M j$ igual à la diagonal $M N''$; y levantando en el punto j la perpendicular $j T$ igual al cateto, la recta MT formarà con MQ el ángulo que se pide, y la perpendicular $N' n'$ bajada desde el punto N' en que dicha recta corta el arco dará la proyeccion pedida Mn'.

El método de los triàngulos rectángulos no es menos apreciable para determinar la proyeccion ò dibujo de una curva $P E Q$ generatriz de un sólido de revolucion, en todas sus posiciones mientras se mueve al rededor fig. 51.

del eje PQ de revolucion. En efecto, cada recta MA, ME, etc....... perpendicular á dicho eje es radio de un círculo que engendra al dar su vuelta; y las proyecciones consecutivas de cada uno de ellos conforme va girando el plano de la curva, reciben modificaciones análogas, pues han de ser iguales á los cosenos Ma, $M'a$, $M''a$, etc. Me, $M'e$, $M''e$, etc. de los ángulos que forma dicho plano con el de proyeccion, siendo radios trigonométricos los de revolucion respectivos MA, ME, etc. como aparecen descritos en la planta. Y por tanto, hallando las proyecciones de los diversos radios
fig. 52. en cada posicion de la curva generatriz, como por ejemplo Ma; Mb, etc. cuando el plano de la generatriz está en $Pab....Q$, y tomando en los respectivos radios de revolucion desde la proyeccion PQ del eje estos valores, se tendrán los puntos a, b, c, d, etc. por donde ha de pasar la curva, la cual se traza ligando los puntos consecutivos. Es indudable que asi se obtendrá la misma proyeccion de la línea curva que por el sistema del artículo (22 IV°); pero segun aquel se marcan gráficamente los puntos de la proyeccion curva, mientras aqui se marcan por medio del compas tomando desde el eje de revolucion las distancias Ma, Mb.... etc., halladas por construccion de la fórmula trigonométrica. De suerte que este método es mas general, por ser aplicable aun á las curvas cuyo eje de revolucion esté oblícuamente situado respecto de los planos coordenados.

Hemos averiguado por medio de la proporcion con
fig. 49. el auxilio de la Trigonometría el valor de la proyeccion mn de una recta MN del espacio, conociendo el valor de esta y el ángulo que forma con el plano sobre quien se proyecta: y ahora vamos á deducir el valor de la línea MN por medio de sus dos proyecciones de planta y alzado, ó planta y perfil. Para este objeto, el

mismo triángulo MNO rectángulo en O dice, que MN es la hipotenusa, la proyeccion mn igual á la MO un cateto, y la diferencia NO de las ordenadas z de los estremos M y N el otro cateto. Luego, si por los dibujos consta ser mn la planta de una recta del espacio, y $m'n'$ su elevacion, se tirarà la recta $m'h$ paralela al eje Ax; y tomando en ella desde el punto h en que corta á la ordenada mayor, la longitud Kh igual à la proyeccion mn de planta, se tira la recta Kn' que será la hipotenusa del triàngulo $Kn'h$, é igual à la recta MN del espacio à quien corresponden las proyecciones mn y $m'n'$. fig. 53.

Por este medio podemos hallar la longitud de cada una de las rectas originales que han debido producir todas las proyecciones, que veamos trazadas en planta y elevacion de cualquiera dibujo dado que conste de las dos partes.

23. Nos resta decir algo sobre el modo de trazar el relieve ò bulto semejante de un objeto, sin tener delante mas que los dibujos de planta y elevacion, ó de planta y perfil, ò bien la tabla de coordenadas (79). En primer lugar, si el contorno de la superficie està espresado en uno de los dibujos por círculos todos concéntricos, debemos inferir que el cuerpo representado es de revolucion, compuesto de círculos paralelos al plano de dicho dibujo: y considerando este como de planta, el contorno del dibujo de elevacion idéntico al de perfil será la plantilla. Construyendo esta en una plancha, ó bien llevando en el torno un instrumento cortante arreglado sucesivamente segun la disposicion y longitud de los radios de revolucion, siendo eje el del torno, se construirà el cuerpo de la superficie que se pide. fig. 40.

Si la planta en un polígono sin dintornos, y los lados de este vienen á caer en la elevacion sobre una recfig. 37. ta paralela al eje Ax, ligados con aristas perpendiculares á otra recta paralela á aquella, vemos que el cuerpo es prisma recto. Este se construye facilmente; pues trazando segun reglas de geometría en un tablero el polígono idéntico ó semejante al de la planta, elevando barillas perpendiculares al tablero desde los vértices del polígono y cortándolas iguales, las puntas superiores serán vértices de la base superior del prisma, y las perpendiculares, aristas de las caras laterales.

Si la planta es cualquiera figura rectilínea con dintornos tambien rectilíneos, se traza en el tablero una
fig. 28. figura igual ò semejante á la planta, se elevan desde todos los vértices de ella perpendiculares al tablero, se cortan estos á las alturas que requieren las ordenadas z correspondientes á la elevacion, y sus estremos superiores de tres en tres si son triángulares las caras, de cuatro en cuatro si son cuadrilàteras, etc. serán vértices de la figura de cada cara del poliedro, y las líneas con que se liguen debidamente serán las aristas. Por último se cubre este esqueleto vistiéndole, digàmos asi, con las partes superficiales determinadas por los estremos de las verticales. De este modo se deberá ejecutar el relieve de una poblacion ó el topográfico de un pais cuya planta y altura fueren dadas, y lo mismo el relieve geográfico de mayor estension, dando antes á la superficie que sirviere de planta la curvatura esférica correspondiente al radio de la tierra, y à las verticales la inclinacion ácia su centro.

Si en el relieve hay líneas curvas; es necesario despues de construir la planta en el tablero, elevar desde la proyeccion de la curva muchas perpendiculares para mayor aproximacion á la exactitud, cortarlas á la altura que exigen las ordenadas z correspondientes que aparecen en el dibujo de elevacion ò de perfil; y ligando los estremos superiores é inferiores de dichos perpendiculares como indiquen los dibujos, viene á resultar una figura poliedral tanto mas aproximada à la curva cuanto mas cercanos estén los perpendiculares entre sí.

Cuando por el dibujo de planta aparece regularidad en el objeto, se podrá abreviar la operacion de trazar su bulto. Siendo este un cono, que se cita por ejemplo, se deja ver que, trazando dos diámetros perpendiculares en la planta de la base, elevando perpendiculares desde los cuatro estremos, cortándolos como requiera el dibujo de elevacion, y ligando en cruz con rectas los estremos superiores de ella, el punto en que concurren será centro de la base circular del cono siempre que resulten iguales dichas rectas, base que se podrà trazar exactamente con el compas en el plano que determinan dichos estremos superiores de las perpendiculares: últimamente, se situará el cúspide en el espacio, y haciendo que una recta fija en dicho punto gire resvalàndose en la circunferencia de la base, resultarà el cono.

CAPITULO II.

El sombreado de los objetos que estan delineados en los cuadros.

24. Aunque se haya delineado con toda escrupulosidad el dibujo de un cuerpo, no presentarà la idea del original completamente sino se imitan ademas los efectos de la luz, porque sin ellos al dibujo faltarà la semejanza del realce que tiene la naturaleza. En los principios de óptica hemos indicado que una masa cilíndrica luminosa producida por un cuerpo radiante, se puede considerar compuesta de rayos paralelos que siguen la direccion del eje del cilindro; y que una masa cónica se puede considerar compuesta de rayos divergentes

que vienen de un punto luminoso, que es el vértice del cono. El primer sistema es generalmente el que se adopta en el dibujo de que tratamos; y llegó la ocasion de establecer el convenio mas adecuado acerca de la direccion que respecto de la escena podemos dar à los rayos paralelos que componen el cilindro luminoso, cuyo àmbito suponemos tan estenso al menos como la escena à que debe alumbrar.

fig. 54. Tomando en consideracion solo el rayo LA que pasa por el orígen A de coordenadas, supòngasele tal direccion que sea diagonal del cubo que en la escena se forme con tres aristas iguales AH, AH', AH'' tomadas en los ejes coordenados. Completando el cubo y trazadas desde A las diagonales Al, Al', Al'' en las tres caras que tienen este comun vértice, seràn l, l', l'' las tres proyecciones del punto L del rayo sobre los planos de dibujo, y de consiguiente Al, Al', Al'' las proyecciones del rayo sobre dichos planos; y los ángulos que con ellos forma serán LAl, LAl', LAl'', iguales entre sí por ser correspondientes en los tres triángulos LAl, LAl', LAl'' idénticos, á causa de tener cada uno sus tres lados respectivamente iguales à los de los otros.

Dirigiendo tambien desde el vértice L del cubo diagonales en las otras tres caras, seràn LAH, LAH', LAH'' los àngulos que forma el rayo con los tres ejes; ângulos iguales por complementos de los que forma con los planos coordenados. La relacion entre estos ángulos y aquellos facilmente se deduce de cualesquiera de los triàngulos en que se divide el plano diagonal, como por ejemplo de LAl; pues el àngulo LAl es el que forma el rayo con el plano xv, y lLA el que forma el rayo con el eje: y comparando resulta el *seno del primero al seno del segundo, como el lado del cuadrado es á la diagonal.* Por otra parte se halla por dicho triángulo, que el *seno del ángulo formado por el rayo y plano es al del ángulo recto, como el lado del cubo es á la diagonal; y el seno del ángulo formado por el rayo y eje al seno total, como la diagonal de la cara del cubo es á la diagonal de éste.* En el artículo (22) al tratar de los escorzos manifestamos el modo de dividir el ángulo recto en dos partes como aqui resultan.

El rayo luminoso LA, á quien hemos supuesto diagonal del cubo, tiene como vemos las ventajas de la regularidad en la posicion respecto del sistema coordenado; y asi, es facil determinar en la escena su direccion, y de consiguiente la de todos los demas paralelos á él, y cuyo infinito número compone la masa del cilindro luminoso. En efecto, si se toman sobre dos ejes las distancias arbitrarias AH y AH'' iguales, y construyendo el cuadrado HH'' se eleva desde el vértice l la perpendicular lL igual á AH, será LA el rayo del sistema, y todas las paralelas imaginables á él serán las que iluminan la escena. Si se quiere determinar de otro modo el punto L, nos consta que las diagonales LH, LH', LH'' del cubo son iguales; luego, tomando tres puntos H, H', H'' en los ejes á igual distancia del orígen A, y tres hilos LH, LH', LH'' tirantes desde dichos puntos é iguales á la diagonal del cuadrado que tenga de lado dicha distancia AH, vendràn los otros estremos de los hilos à reunirse en L punto del rayo LA.

Ademas, las proyecciones Al, Al', Al'' del rayo sobre los planos coordenados dividen cada ángulo plano recto coordenado en dos semirectos, por ser diagonales de cuadrados; de suerte, que *la proyeccion de cada rayo paralelo del sistema forma ángulo semirecto con los ejes del plano en que se halla.*

Por tanto, y en atencion à los buenos efectos que resultan para la visualidad de la escena, admitiremos desde ahora el sistema de rayos paralelos con la circunstancia de formar cada rayo ángulos iguales con los ejes, ó lo que es lo mismo con los planos coordenados: à lo que es consiguiente la de formar cada una de sus tres proyecciones àngulos semirectos con los ejes coordenados.

Establecido el sistema luminoso, vamos à tratar de los efectos que segun él deben resultar en la escena, ya en cuanto á la fuerza del claro que corresponda á cada punto de una superficie iluminada, ya en cuanto á las sombras, llamadas *esbatimentos* por los artistas, que cada punto principal de dicha escena y de consiguiente cada línea y cada superficie, pueda causar en las superficies de objetos de ella.

ASUNTO PRIMERO.

Graduacion de tintas ó del claro-oscuro en el sistema de rayos luminosos paralelos.

25. Se trata de valuar el grado de claridad que á cada punto iluminado de la escena corresponde, imaginando para ello una escala de tintas ó grados de *claro-oscuro* desde el claro absoluto al oscuro absoluto, y suponiendo que los rayos llegan con igual fuerza á todos los puntos que hieren en la escena, aunque tal supuesto padece algunas modificaciones por lo que se dijo en el artículo (9), y se repetirá mas adelante (26). Para esto es necesario ante todo recordar la descomposicion que en el artículo (7) hicimos de la fuerza con que viene el rayo, pues entonces vimos que se verifican las propiedades siguientes. 1.ª Esta fuerza hiere con toda su intensidad al plano si el rayo es perpendicular à él; y de consiguiente será de claro absoluto la tinta de este plano. 2.ª La fuerza no ejerce accion alguna en el

plano que coincide con el rayo; y de consiguiente la tinta de este plano serà de oscuro absoluto. 3.ª En general, la fuerza con que hiere el rayo á un plano es proporcional al seno del ángulo que forma con él, y este principio general en que estan comprendidos los dos anteriores enseña que, à pesar de no ser los ángulos proporcionales con los senos, será mas ó menos clara la tinta de cada uno de los planos de un poliedro, entre el plano claro absoluto y el oscuro absoluto, segun el rayo forme con él un ángulo mas cercano à recto, ó mas cercano à cero. 4.ª Como todos los rayos son paralelos, los ángulos que formen con un mismo plano serán iguales; y asi, cada plano tendrá igual tinta en toda su estension, y ademas todos los planos paralelos entre sí tendrán la misma tinta, por formar el rayo ángulos iguales con todos ellos. De suerte, que en el sistema que nos ocupa solo hay que hallar el valor de la tinta de un punto en cada plano, para formar la escala de claro-oscuro que necesitamos; y aun cuando haya varios planos paralelos entre sí, basta conocer la tinta de uno, pues todos tienen la misma.

La cuestion de formar escala de tintas presenta dos dificultades; la una consiste en hallar el valor del àngulo que forma el rayo con cada plano; y la otra en modificar con la práctica la vista para valuar asi los grados de la escala pictórica, como el músico regula con el oido los sonidos de la escala armònica. Dejando á la aplicacion del dibujante el adquirir habilidad con la pràctica en la entonacion de tintas, vamos á indagar medios de valuar el ángulo para deducir exacta ó proximamente la fuerza ò grado de la tinta de cada plano. Si la escena con todos los objetos es dada, se tiene facilmente el àngulo que el rayo forma con cada plano, haciendo uso del instrumento que describimos en el artículo (7); y por las tablas trigonométricas se halla e seno en número, y por construccion en línea. Pero nuestro asunto actual consiste en deducir proximamente el valor del àngulo, y por este el grado de la tinta, dados los dibujos geométricos del plano y del rayo.

CASO PRIMERO. *Tintas de los planos perpendiculares á alguno de los coordenados.*

26. Tómense primero en consideracion los planos perpendiculares á uno ú otro de los coordenados, y desde luego los que tengan esta cualidad respecto del de planta, los cuales supondremos trasportados paralelamente hasta ajustarse con el eje *Az*, pues lo que se diga de cada plano vertical que pasa por el orígen, y del rayo luminoso dirigido à este punto, se debe entender de cualquiera otro plano y rayo respectivamente paralelos á aquellos. Con esta prevencion, é imaginando todos los planos perpendiculares al de planta al rededor del eje *Az*, como si fuesen hojas de un libro abierto completamente, es indudable que las proyecciones de todos en la planta son rectas que se cortan en *A*; y que siendo *Al* planta del rayo, y *mn* una perpendicular á ella, solo tenemos que tomar en consideracion los planos comprendidos entre el de la proyeccion *Al* que coincide con el rayo, y los de las proyecciones *Am* y *An* perpendiculares por uno y otro lado de aquella, porque todos los del otro lado de la recta *mn* son prolongaciones de los primeros. Desde luego sabemos por el principio citado al empezar el artículo, que el plano vertical *zAL* que coincide con el rayo, asi como coinciden sus proyecciones *lA* entre sí, es oscuro absoluto, es decir, cero el valor de su claridad; con que, conocemos el límite cero en la escala de tintas, y corres-

fig. 54.

ponde à todos aquellos planos cuya planta es paralela á la del rayo.

En el artículo precedente se hizo ver que el seno del ángulo que forma el rayo LA con cada uno de los planos coordenados zAl' y zAl'' tiene con el seno total...., ó bien la tinta de los planos coordenados de elevacion y perfil con el claro absoluto, la misma relacion que el lado Ll' del cubo con la diagonal LA. En este cuerpo, por la propiedad del triángulo rectángulo se verifica

$$\overline{LA}^2 = \overline{Ll'}^2 + \overline{Al'}^2 = 3\,\overline{Ll}^2 :$$

y suponiendo 1 el valor LA de la diagonal, resulta $Ll' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$: con que, tenemos el término $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ de la escala, ó la tinta de los planos cuya planta forma ángulo semirecto con la del rayo, suponiendo 1 el claro absoluto.

Proyectando el rayo LA sobre el plano zAM perpendicular á zAL en que está él, se ve que es zA la proyeccion, de consiguiente LAz el ángulo que forma el rayo con el plano zAM y su prolongacion zAN: y como sabemos que hay la proporcion (24), *seno de* LAz *á seno total, como la diagonal de la cara del cubo á la diagonal de éste*, ó bien, tinta del plano MAN al claro total, como $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ es á 1, tenemos el término $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ de la escala, ó la tinta de todo plano cuya planta es perpendicular á la del rayo, suponiendo 1 el claro absoluto.

Conocemos ya los términos 0, $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ de la escala de tintas correspondientes à los planos verticales en las cuatro situaciones mencionadas; y bien se deja conocer que $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ debe ser el término mas próximo à 1, ó bien que al plano MAN pertenece la mas clara tinta entre todos los verticales imaginables; pues cualquiera de ellos estará entre Al y Am, ó entre Al y An; y el ángulo que forma el rayo con él, tendrà su valor entre los límites o y $\sqrt{\frac{2}{3}}$, asi como entre los límites o y $\sqrt{\frac{1}{3}}$ los planos situados desde Al á Ax, ó desde Al á Av, y entre $\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{\frac{2}{3}}$ los situados desde Ax hasta Am, ó desde Av hasta An. Nos convendria conocer mas términos del número infinito de ellos que debe tener la escala entre dichos límites; pero lo sabido basta para establecer el principio, de que las tintas de los planos verticales se van aclarando desde cero, que es la oscura, hasta $\sqrt{\frac{2}{3}}$ que es la mas clara de tales planos, segun sus plantas se van desviando desde la planta Al del rayo por una y otra parte hasta la planta perpendicular mn.

Los mismos raciocinios podemos hacer sobre los pla-
fig. 54. nos perpendiculares al de elevacion, y los perpendiculares al de perfil, ó bien sobre las proyecciones de todos los planos imaginables de este modo; pues en ellos se verifica la misma escala de tintas desde cero hasta $\sqrt{\frac{1}{3}}$, y desde aqui hasta $\sqrt{\frac{2}{3}}$, que es la mas clara de las que puede haber entre las de dichos planos. Por tanto, debemos concluir, *que el grado de claridad de un plano perpendicular á uno de los coordenados crece desde cero hasta* $\sqrt{\frac{2}{3}}$, *supuesta* 1 *la claridad absoluta, segun el dibujo de dicho plano forme con el dibujo del rayo ángulo mas aproximado á recto: y que en esta escala es* $\sqrt{\frac{1}{3}}$ *el grado de la tinta de los planos coordenados y de cualquiera otro paralelo á alguno de ellos.* Es inútil
fig. 55. advertir que la valuacion que se hace en la planta sirve para los planos que se dejan ver en la elevacion y perfil, y la que se hace en estos dos dibujos sirve para los que se dejan ver en la planta. La causa es evidente, pues hemos deducido las tintas por los ángulos que la proyeccion del rayo forma con la del plano, es decir, por los àngulos planos que resultan de cortar en cada

dibujo el plano de él à dos perpendiculares, uno que es en donde està el rayo, y el otro que es el iluminado; tales como en la planta los àngulos *lma*, *lmb*, *lmc*, etc. que forma la proyeccion del rayo con las de los planos verticales que se han de ver en los otros dos dibujos; como en la elevacion los ángulos $l'nf$, $l'ng$, $l'nh$, etc. que forma la proyeccion del rayo con las de los planos que se han de ver en los otros dos dibujos; y finalmente como en el perfil los àngulos $l''ok$, $l''op$, $l''oq$, etc. formados por las proyecciones del rayo con las de los planos que son perpendiculares á este cuadro.

Por otro rumbo podemos llegar tambien á formar la escala de tintas de los planos perpendiculares à los coordenados, espresando por líneas los valores de sus términos, y no por números como antes. Para esto necesitamos valernos de un principio de Mecánica, por el cual se puede suponer que la fuerza del rayo original LA, representada por la diagonal del cubo en valor y direccion, està reemplazada por dos perpendiculares entre sí, una que es su misma proyeccion que coincide con la diagonal de la cara del cubo, y otra que es la arista, como lA y AH' para todos los planos perpendiculares al de planta, $l'A$ y AH'' para los perpendiculares al de elevacion, y como $l''A$ y AH' para los perpendiculares al de perfil. Por la misma razon espuesta en el artículo (7) y repetida al principio del actual, no puede causar efecto alguno la fuerza AH' en plano alguno vertical, ni la AH'' en el perpendicular al de elevacion, ni la AH en el perpendicular al de perfil; de suerte que en lugar del rayo verdadero LA, podemos considerar que solo ilumina el horizontal lA en los planos verticales, $l'A$ en los perpendiculares al de elevacion, y $l''A$ en los perpendiculares al de perfil: y segun el mismo artículo, la tinta ò grado de claridad de cada plano perpen- fig. 54.

dicular al de dibujo será proporcional al seno del ángulo que forma la proyeccion del rayo original con la del plano iluminado. Luego, si tomando como radio trigonométrico cualquiera parte de esta proyeccion del
fig. 55. rayo, como lm en la planta, $l'n$ en la elevacion, y $l''o$ en el perfil, y suponiendo trasportadas las proyecciones de los planos paralelamente à sí mismas hasta concurrir en un estremo del rayo, se bajan desde el otro estremo perpendiculares á dichas proyecciones; los grados de las tintas estarán en razon de los senos, ó las longitudes de las perpendiculares

lm, lb, lc, ld, le, etc.
$l'n$, $l'g$, $l'h$, $l'i$, $l'j$, etc.
$l''o$, $l''p$, $l''q$, $l''r$, $l''s$, etc.

He aquí pues un modo de formar completamente la escala de las tintas correspondientes à todos los planos perpendiculares à los de dibujo, tomando por radio una misma longitud en las tres proyecciones del rayo luminoso.

Problema. *Graduar las tintas de las caras de un prisma recto perpendiculares á los planos de dibujo.*

Segun los principios que se acaban de sentar para formar la escala de las tintas que corresponden á varios planos perpendiculares à uno de los del dibujo, como por ejemplo las de un prisma que da la proyeccion
fig. 56. $m\,n\,o\,p\,q\,r$, en que mn, no, op, pq, qr y rm son los dibujos de las caras laterales, y lm, ln.... los de los rayos paralelos; se miden los ángulos que forman estos dibujos con los de las caras en que pueden chocar los rayos por no ser interrumpidos, como sucede aqui con las rm, mn y no; y segun el àngulo sea mas aproximado á recto, será mas claro el plano que da tal proyeccion, aunque jamas puede ser el mas claro posible, es decir claro absoluto, á causa de que este grado solo

pertenece al plano perpendicular al rayo del espacio, y de consiguiente oblicuo respecto de los coordenados. En el ejemplo propuesto resulta coincidir *rq* con la proyeccion del rayo; y asi, el plano elevado sobre *rq* es oscuro absoluto; el mayor àngulo es el que forma *lm* con *mn*, y por ello será el mas claro el plano elevado sobre *mn*. Vemos tambien que los planos elevados sobre *op* y *pq* no pueden recibir la luz directa, á causa de estar interrumpida por el mismo prisma; pero segun la teoría de la reflexion (3) debemos suponer que lá reciben reflejada de otras superficies vecinas de la escena, en direccion que depende de la incidencia. Para suavizar algun tanto la gran oscuridad se acostumbra suponer que la luz refleja, viniendo con tendencia opuesta á la directa, ilumina aunque débilmente la parte oscura opuesta á la mas clara de la superficie, como se indicò en el artículo (7) y se observará en todas las figuras sombreadas de las láminas. Si el prisma es hueco y de materia opaca, habremos de considerar que cada plano tiene dos caras, una esterior y otra interior: y es facil conocer que la luz introducida por la base superior iluminará las caras interiores de los planos, cuyos esteriores resultan oscuras en el prisma sólido, é inversamente: de suerte que el acto de coincidir el rayo luminoso con un plano, es el paso de ser iluminada una de sus caras à serlo la otra; y por ello debemos establecer el principio de que en el prisma recto sólido, *resultan oscuros todos los lados cuyas caras interiores sean encontradas por las proyecciones del rayo antes que las esteriores.*

CASO II.° *Tintas de los planos oblicuos respecto de los coordenados.*

27. Ahora vamos á tomar en consideracion los planos oblicuos respecto de los coordenados, y ojalá pudiésemos deducir la escala de sus tintas con la precision y generalidad que la del caso anterior, para lo cual necesitariamos conocer las intersecciones de cada plano propuesto con dos de los coordenados, pues la posicion de él está determinada por dichas intersecciones, como se demuestra en Geometría. Mas, en los dibujos geométricos de un poliedro aparecen solamente cuasi siempre las intersecciones de sus caras planas, y no las intersecciones de éstas con los planos cordenados: por lo cual, y á causa de la infinita variedad que admiten las posiciones de los planos oblicuos respecto de los coordenados, habremos de contentarnos con resultados aproximativos que se hallarán por los medios que vamos á manifestar.

En los prismas oblicuos y en las pirámides que tengan su base en plano coordenado, se pueden inferir por los trazos de la figura muchas circunstancias que den á conocer aproximativamente su claro y oscuro.
fig. 57. 53. Dados por ejemplo los dibujos de un prisma oblicuo ó de una pirámide que tenga su base en el plano de planta, y trazados los dibujos de los rayos paralelos; podemos considerar que los planos laterales del prisma ó de la pirámide se han inclinado desde la posicion vertical ácia el plano de planta, girando sobre las rectas *mn*, *no*,.... de interseccion con este plano; y que los rayos luminosos estan en los planos verticales elevados sobre sus dibujos *lm*, *ln*,...... En esta inteligencia, para que el rayo natural encaminado al punto *m*, por ejemplo, sea perpendicular al lado que tiene por base *mn*, es

necesario que lo sea á la recta *mn*, y juntamente á otra recta que pasando por *m* se halle en dicho lado (Geometrìa 139), como por ejemplo la arista *m'm* en el prisma y *mc* en la pirámide: y para que la horizontal *mn* sea perpendicular al rayo, es necesario que lo sea á todas las rectas del plano vertical elevado sobre *lm*, y de consiguiente á esta recta; luego, *no podrá ser claro absoluto el lado del prisma ó de la pirámide á menos que el dibujo lm del rayo sea perpendicular á la base mn de dicho lado*; y serà en efecto claro absoluto si el rayo verdadero es perpendicular á las dos aristas que se juntan en *m*.

No podemos hacer un raciocinio semejante respecto de las tintas de los otros lados, á cuyas bases no sea perpendicular el dibujo del rayo; pues atendiendo á la figura que se cita vemos, que serán oscuros todos los que coincidan con el rayo *LA*, de los cuales conocemos ya tres, que son $l'H''$, lH', $l''H$, cuyas intersecciones con el plano de planta son *Al*, *AH*, AH'': y solo podemos establecer por cierto que *no puede ser oscuro absoluto el lado oblicuo del prisma ó de la pirámide á menos que coincida con el rayo natural, ó que hiera éste en su cara interior á dicho lado siendo sólido el cuerpo.* fig. 54.

En vista de lo manifestado, tratemos de indagar aproximadamente los lugares del claro y del oscuro, y las tintas producidas por la fuerza de la luz en sentido de la proyeccion del rayo luminoso, con precision de modificar despues el resultado, segun el efecto que al mismo tiempo deba producir la otra componente en direccion del eje coordenado perpendicular al plano de dicha proyeccion. Para esto necesitamos suponer la fuerza del rayo *LA* descompuesta en dos, como *lA* y $H'A$ cuando sea dada la interseccion del plano ilumi- fig. 54.

nado con el de planta, y descompuesta de un modo análogo cuando sea dada la interseccion con alguno de los otros planos coordenados, á fin de indagar el efecto de estas fuerzas en el punto A, que suponemos del plano iluminado. Las leyes de la Mecànica permiten dicha descomposicion; y segun ellas, el efecto compuesto de las dos fuerzas ó rayos, como lA y $H'A$, equivale al que hará el rayo diagonal del cubo, siendo la fuerza segun la proyeccion del rayo á la fuerza perpendicular al cuadro, como la diagonal de la cara del cubo es á la arista.

PROBLEMA I.° *Graduar las tintas de las caras de un prisma oblicuas respecto de alguno de los planos de dibujo; y tambien las tintas de la pirámide.*

Refiriéndonos al prisma oblicuo ó á la pirámide que tenga su base en uno de los planos coordenados, y desde luego al caso de tenerla en el plano de planta, serán lm, ln..... los rayos horizontales componentes que obran en los puntos m,n,... del objeto, puntos que para nuestro fin hemos elegido en la base de la superficie. Por otra parte, podemos considerar cada lado plano del cuerpo como engendrado por la línea mn de su base, moviéndose paralelamente á sí misma sobre la arista $m'm$ en el prisma, y sobre mc en la pirámide; de consiguiente que el plano está compuesto de una infinidad de rectas paralelas á mn, ó mas bien de infinidad de fajas planas paralelas: y como el plano está iluminado por infinidad de rayos paralelos, lo que digamos de la recta mn y del rayo que obra en m, comprende á todo el plano. Lo mismo se debe entender de los demas lados del cuerpo, respecto de sus bases, y de los rayos que los puedan herir; y para podernos esplicar, llamaremos cara interior de la línea y del plano la que cae ácia lo interior del cuerpo, y esterior la que cae ácia fuera. En esta inteligencia, y atendiendo primeramente á los rayos *lm*, *ln*......, proyecciones de los originales, la fuerza con que herirá cada rayo *lm* à cada recta *mn* de la base será mayor, segun el ángulo *lmn* sea mas aproximado á recto; será nula cuando no resultare ángulo, como suponemos entre el rayo *lr* y el lado *rq*; y será imposible que el rayo llegue à los lados *qp* y *po* siendo sólido el cuerpo, porque los heriria interiormente; pero siendo hueco, aparecerá tanto mas claro el lado herido interiormente, cuanto mas aproximado à recto sea el ángulo que con él forme el rayo componente. Es decir, que, *atendiendo solo á la fuerza que ejerza paralelamente al cuadro cada rayo luminoso, se determina el claro y oscuro de los lados del prisma oblicuo y de la pirámide que tengan su base en el tal cuadro, por las mismas reglas que los del prisma recto;* de que resulta en el prisma ser las aristas *r'r* y *o'o* límites que separan la parte clara de la oscura, asi como en la pirámide la línea compuesta de las aristas *rc* y *co*.

Mas, por lo dicho antes necesitamos atender al efecto del otro rayo componente ó bien à la fuerza que el rayo natural ejerce perpendicularmente al cuadro; y para ello es indispensable atender en vista de las mismas proyecciones del cuerpo y rayo, á si hiere esterior ó interiormente al lado del prisma ó de la pirámide, y en conformidad ó no con la otra fuerza componente; es decir, ambas esteriormente, ó ambas interiormente, ó una por fuera y otra por dentro. En el primer caso sin duda cooperan ambas fuerzas á iluminar el lado del cuerpo, y por ello habrá que aclarar algo mas las tintas que resultan del cómputo anterior. En el segundo caso, el lado resulta oscuro obsolutamente si es de cuerpo sòlido, y claro mas ó menos siendo hueco el cuerpo y abierto por arriba. Ultimamente, si una de las fuerzas en que se ha descompuesto el rayo choca por fuera al lado, y por dentro la otra, cabe duda en el resultado; pues el rayo natural está entre los dos componentes segun la inclinacion que sabemos espresar por la construccion que se hizo en el artículo (22), y que se ha recordado despues en el artículo (24): y en este caso la fuerza que puede causar efecto es tan solo aquella que hiera al lado por la misma parte ó faz que el rayo natural, siendo esteriormente en el cuerpo sòlido, é interiormente en el hueco abierto por arriba.

A fin de averiguar si el rayo natural se dirige à una ó á otra parte de cada lado, se traza un àngulo recto $c'it$ de lados indefinidos, y tomando uno de ellos $c'i$
fig. 58 de longitud igual à la altura de la pirámide ó prisma, se determina el estremo t del cateto it construyendo la recta $Lc't$ segun la inclinacion que sabemos tiene el rayo original Lc' respecto del plano coordenado en que está la base del objeto, y asi se determina el punto t en que encuentra á este plano el rayo que pasa por c', ó bien la distancia it á que se ha de tomar en dicho cuadro el punto t desde la proyeccion c del vértice de la piràmide ó de la arista del prisma. Marcando en el plano de la base el punto t, por él veremos de un modo muy simple lo que se desea: pues si la recta ct corta á la base del lado, prolongada en caso necesario, de suerte que el punto t vaya á parar fuera de ella, el rayo original hiere en su faz interior à dicho lado, y no le puede iluminar siendo sòlido el cuerpo, como sucede en los lados cop y cqp. Si el punto t va á parar á la base misma del lado, prolongándola en caso necesario, es visible que el rayo original coincide con dicho lado, puesto que tendrà comunes con él dos puntos c y t (Geom. 135): y entonces ha de ser oscuro ab-

soluto el lado. Si el punto t cae en el cuadro sin haber atravesado ct á la base prolongada en caso necesario, como sucede en el ejemplo con todas las caras, escepto las dos mencionadas; no hà lugar á duda en que el rayo original hiere por fuera al lado, y de resultas habrá que iluminarla algun tanto, aun cuando la proyeccion del rayo haya coincidido con la base, como sucede con lr en el lado crq.

Problema II.° *Graduar las tintas de las caras de cualquiera poliedro.*

El modo de valuar en la piràmide aproximadamente la fuerza del claro y oscuro, y de hallar los límites de este, puede ser aplicable à cualquiera poliedro, considerando al vértice y caras de cada àngulo sólido, como de una piràmide que tenga su base en aquel plano coordenado, á quien encontrarian las aristas del ángulo sólido prolongadas. Verificando esta prolongacion en los dibujos de elevacion y perfil, se tendrán las coordenadas x y v de cada uno de dichos puntos de concurso, para construir la planta de la pirámide cuyo vértice se tiene ya en el dibujo: de consiguiente existen todos los datos que hemos necesitado para determinar aproximadamente el claro y oscuro de las caras que formen cada ángulo sólido, y al fin el de todas las del poliedro: mas, por no retardar el curso que nos hemos propuesto, dejamos á la voluntad del dibujante el hacer aplicaciones á los casos que le puedan ocurrir.

CASO III.° *Tintas de las superficies curvas.*

28. Si la superficie es curva, se la considerará generalmente como un poliedro cuyos planos se ajusten mejor con partes superficiales de la propuesta; de suerte que, cuando es cilíndrica proximamente alguna par-

te de superficie, convendrá suponerla inscrita en un prisma para valuar asi las tintas de cada faja prismática supuesta: y cuando es parecida á cónica la superficie, se la considera inscrita en una pirámide para de este modo valuar las tintas de sus fajas piramidales. Mas al fin es necesario que el dibujante haga insensible la transicion de una tinta á otra en las superficies curvas, como se dijo en el artículo (7), sin olvidarse tampoco de los efectos de la luz refleja.

PROBLEMA I.° *Graduar las tintas de la superficie de un cilindro.*

Tomando primeramente para la cuestion el cilindro recto circular elevado sobre un plano coordenado, como por ejemplo el de planta, habremos de considerarle
fig. 59. inscrito en un prisma de muchísimas caras verticales: la circunferencia acb..... será proyeccion de la superficie; la semicircunferencia acb proyeccion de la parte iluminada; apb de la oscura, y el punto c proyeccion de la línea clara ò faja vertical estrechísima de la superficie; asi como a y b proyecciones de las líneas ó fajas estrechísimas oscuras verticales que dividen la parte clara de la oscura. Hallados en la planta los puntos a, c, b, facil será marcar en la elevacion la recta $c'c'$ clara, y la $b'b'$ oscura, como lo seria igualmente en el perfil la recta $c''c''$ clara y la $a''a''$ oscura; haciendo por último insensible la transicion de las tintas entre estos dos límites.

Aunque el cilindro recto no fuere circular, se hallarán de igual modo los puntos a y b de la planta por medio de los rayos tangentes, como tambien las verticales $c'c'$ y $c''c''$ claras, y las $b'b'$ y $a''a''$ oscuras; mas, el punto c de planta será necesario determinar con la prevencion de ser aquel en donde el rayo luminoso forme con la tangente ángulo mas aproximado á recto. Superfluo es advertir, que por un sistema anàlogo de operaciones resolveremos la cuestion en el caso de ser el cilindro perpendicular à cualquiera de los otros planos coordenados; y que cuando fuere oblicuo, se hallaràn los límites y la fuerza del claro y oscuro aproximadamente, aplicando el método que empleamos en el prisma oblicuo. fig. 59.

Problema II.° *Graduar las tintas de la superficie de un cono.*

Tomando tambien en consideracion el cono de la base *acb*..... y altura *o′o′*, supongámosle inscrito en la piràmide; y descomponiendo el rayo diagonal en dos, horizontal uno y vertical otro, como ya se sabe, en el primer sentido será límite de las partes clara y oscura la línea compuesta de las rectas *ao* y *ob*, que ligan el cúspide á los puntos *a* y *b* de la base en donde son tangentes los rayos horizontales; y será la línea de mayor claridad la recta *co*, que liga al cúspide el punto *c* en que el rayo horizontal es perpendicular al perímetro de la base. Mas, estos resultados estan sujetos á las modificaciones que pueda ocasionar el rayo vertical en la pirámide, considerando las tangentes de la base como lados de ella (27). fig. 60.

Problema III.° *Graduar las tintas de cualquiera superficie curva, mediante la consideracion de suponer la compuesta de faces planas.*

Si la superficie es cualquiera engendrada por línea recta ò por curva, se la considera generalmente como compuesta de partes prismáticas ó piramidales, que al fin lleguen á ser cilíndricas ò cónicas, segun se asemejen mas á una ú otra forma las partes correspondientes de la propuesta: y es facil conocer que la línea clara y la terminal del oscuro no pueden ser rectas sino en la superficie engendrada por recta, y aun entonces solo cuando resulten dichas líneas en direccion de la recta generatriz como en el cilindro y el cono, pues en todos los demas casos el claro absoluto se reducirà á un punto, en que el rayo sea perpendicular á la superficie; y la línea oscura será una curva compuesta de la multitud de partes rectas habidas por la consideracion de prismas ó de piràmides circunscritas.

fig. 42. 43. Tratàndose por ejemplo de graduar las tintas de las caras triangulares *abo*, *bco*, etc. de las cúpulas representadas en las figuras que se citan, desde luego induce su generacion (22, IV.°) á considerarlas como compuestas de infinidad de caras piramidales truncadas, que tengan por bases las partes respectivas de la recta generatriz comprendidas entre las aristas circulares. En este concepto vemos por el trazo de la planta, que la fuerza horizontal de los rayos luminosos obra solàmente en las caras *aob*, *boc*, *cod*, *doe*, con igual fuerza en la segunda y tercera, y con menos en las dos restantes. Atendiendo ahora à la fuerza vertical, prolónguense en el dibujo de elevacion las partes de arista, consideràndolas rectas, hasta que lleguen á la vertical de *o*, es decir, hasta completar cada pirámide, para observar si el rayo vertical puede ò no herir á todas sus caras, como se dice en el caso II.°; y se verà que aun á las privadas de luz horizontal puede herir aquel desde el medio cuadrante arriba en la figura 42, y desde este punto abajo en la 43, con tanta mayor fuerza cuanto mas pròxima esté la parte à los respectivos estremos de la arista curva. Con tales datos facil será valuar los términos de la escala de tintas, como aparecen espresados en los dibujos; atendiendo ademas á la degradacion de la luz àcia el cúspide y las aristas del contorno, en virtud de la dispersion de los fajos luminosos, y por la densidad atmosférica, que deben causar este efecto en

los términos de la escena mas distantes del orígen luminoso.

PROBLEMA IV.º *Graduar las tintas de la esfera y de toda superficie de revolucion cuyo eje sea perpendicular á los rayos.*

En la esfera se resuelve la cuestion completamente de un modo particular. Para ello supongamos por un momento que el cilindro luminoso es paralelo al plano de planta, à que se sigue ser el diàmetro $a\,b$, determinado por los rayos la y lb tangentes, la planta del círculo màximo que divide la parte clara de la oscura, fig. 61.
y el medio c de la semicircunferencia $a\,c\,b$ de la planta el punto mas claro de la esfera, por ser perpendicular á la tangente de este punto la proyeccion $c\,o$ del rayo que pasa por el centro. Pero como cada rayo luminoso del sistema que se acaba de suponer paralelo al plano de planta debe volver á la posicion verdadera (24), formando con dicho plano un ángulo cuyo seno es al coseno como la arista del cubo á la diagonal de su lado; al describir este àngulo los rayos tangentes à la esfera que formaron la circunferencia ó línea oscura $a\,d\,e\,f\,g\,h\,b$..........., cuya proyeccion dijimos que coincidia con la de su diámetro $a\,b$, habrá pasado la semicircunferencia $a\,d\,e\,f\,g\,h\,b$ al lugar $a\,'d\,'e\,'f\,'g\,'h\,b$, como si se la hubiera hecho girar sobre el diàmetro $a\,b$ para engendrar la esfera.

Ahora recordemos haber demostrado en el artículo (22), que la proyeccion del rayo de todo círculo generador en cada posicion que toma al dar la vuelta, es igual al coseno del àngulo que forma entonces con el plano de la posicion primitiva: y que en el citado artículo se indicó el modo de trazar la curva $a\,'d\,'e\,'f\,'g\,'h\,b$. En efecto, construyendo separadamente el ángulo LOX que forma el rayo luminoso LO diagonal del cubo con el plano de planta, tomando sobre el rayo desde O los radios de revolucion hp, gn, fm, etc., y bajando desde los estremos p, n, m, etc perpendiculares al otro lado del ángulo, resultarán por construccion las partes $O'h$, $O'g$, $O'f$, que se deben tomar en el dibujo de planta desde ab sobre los correspondientes radios de revolucion hp, gn, fm, etc., y los puntos $'h$, $'g$, $'f$, etc. serán de la línea oscura $a'd'e'f'g'h\,b$ divisoria de las partes clara y oscura de la semi-esfera, cuya faz es la visible que resulta en el dibujo de planta.

Al mismo tiempo el punto c que resultò claro en el sistema luminoso que supusimos al principio, habrà pasado al punto $'c$, el cual se determina en el radio co de revolucion, lo mismo que se han determinado los puntos de la línea oscura; y como el rayo luminoso que se dirija al centro es el único perpendicular á la superficie, se sigue que será $'c$ el punto único claro absoluto de ella. Para determinar en la elevacion y en el perfil dichos puntos y de consiguiente el claro y oscuro de la figura, se pueden practicar operaciones análogas; ó bien elevar verticales desde los puntos hallados en planta y construir en el otro cuadro las proyecciones, para tener los puntos de la línea oscura y el claro único por interseccion de cada vertical con la proyeccion del rayo correspondiente.

El modo satisfactorio con que se halla el claro y oscuro de la esfera, anima á emplear el mismo cuando la superficie curva que se propusiere sea parecida á esférica, salvo algunas irregularidades de poco momento: método que será siempre aplicable á toda superficie de revolucion con tal que en la escena su eje se halle situado en posicion perpendicular al rayo luminoso.

Problema V.º *Graduar las tintas de una su-*

perficie curva que recibe luz en su concavidad.

Para concluir el artículo hacemos notar, que en todos los casos mencionados lo mismo se halla el claro y oscuro de la superficie convexa de que se ha tratado, que el de la cóncava de igual figura que se ofreciere, con la diferencia de ser línea y parte superficial clara en aquella la que en esta será oscura, é inversamente, por la consideracion de las dos faces esterior é interior de cada superficie segun se ha indicado antes.

Si la figura fuese una porcion esférica còncava, se hallarà exactamente la línea divisoria entre la parte iluminada y la oscura; y el punto del claro absoluto será aquel en que el rayo despues de pasar por el centro concurra con la superficie, es decir, el estremo opuesto á $'c$ del diámetro que pasa por este punto. fig. 61.

Pero si la figura es de otra naturaleza, como por ejemplo, cual se representa en la citada al màrgen, que aunque de revolucion, no está situada de modo que su eje sea perpendicular á los rayos de la luz; habrá de considerarse que està inscrita en un poliedro compuesto de pirámides truncadas. En este concepto se hallaràn, segun queda dicho, las tintas de la parte cóncava representada en la planta, con la prevencion de que la luz horizontal se valúa por los àngulos que los rayos forman con los lados del polígono ulteriores al límite entre el claro y el oscuro, es decir, con aquellos á quienes encuentran en su faz interior, y haciendo despues la investigacion de que la luz vertical ilumina mas ó menos á toda la superficie cóncava. Pero como la parte de superficie interpuesta entre el orígen de la luz y la parte iluminada puede interrumpir el curso de cierta porcion de rayos, hay que atender al efecto que puede ocasionar este accidente segun se esplicará en el artículo (27) y està representado en la figura. fig. 62.

En el alzado aparece solamente la superficie esterior del vaso, y sus tintas se gradúan por los ángulos que el rayo horizontal forma en la planta con los lados correspondientes, y en concepto de que la fuerza vertical de los rayos no ejerce accion, pues asi resultará del ensayo que se debe practicar.

Si el vaso tuviera mayor amplitud en su vientre que en el borde superior, causarian efecto los rayos verticales, y seria precisa entonces la correccion de las tintas determinadas por los horizontales.

29. Despues de conocer el dibujante los efectos de la luz por los medios que se han espuesto, debe atender à un fenómeno de que dimos noticia en el artículo (9), reducido à que la fuerza de la luz decrece segun se aleja el cuerpo luminoso del iluminado; por lo cual los planos paralelos que por suposicion respecto de la luz estarian igualmente claros, no resultan asi en la naturaleza, sino que los mas lejanos estan menos claros: esta consideracion ha hecho degradar la fuerza del claro y oscuro en las representaciones geométricas de las escenas propuestas, debilitando la luz de arriba abajo. Ademas, la densidad de la atmósfera, que en parte contribuye al fenòmeno anterior, ofusca tambien los rayos visuales emanados de los cuerpos, y de consiguiente la apariencia de sus colores y fuerza del claro y oscuro, segun estén mas lejanos del lugar que ocupa el dibujante: y aunque solo tratamos aqui de proyecciones y no de figuras aparentes, conviene sin embargo ayudar con esta degradacion de tintas á la espresion de la naturaleza pintada en el dibujo geométrico; regla que se ha procurado seguir en los que van construidos hasta ahora, moderando la fuerza del claro y del oscuro de las partes superficiales de la escena segun la distancia á que en ella estan del plano vertical paralelo al de di-

bujo, y que pasa por el punto en que se halla el dibujante. De suerte que despues de hallar el grado de la tinta que corresponde à una parte superficial, que sea ò se considere plana, segun su inclinacion respecto del rayo luminoso, hay que modificar el resultado por los dos fenómenos que se acaban de recordar, y cuya teoría fue esplicada en el artículo (9), esto es, por una de las combinaciones posibles de dos en dos entre mayor ó menor distancia del cuerpo iluminado al luminoso, y mayor ó menor distancia de dicho cuerpo al plano vertical paralelo al de dibujo, y que pasa por el punto en que se supone al dibujante. Teniendo estas circunstancias en consideracion, la práctica enseña el acierto: por lo cual y à fin de no traspasar los límites de nuestro objeto, nos abstenemos de formar para la graduacion de tintas escalas compuestas, que se pudieran deducir combinando cada término de la escala simple de tintas relativa á la inclinacion del rayo luminoso (7), con el término correspondiente de la escala ó série del artículo (9).

ASUNTO II.

Esbatimentos ó sombras causadas en algunos cuerpos de la escena por otros, en el sistema de rayos luminosos paralelos.

30. El asunto que ofrecimos para este lugar es la determinacion de las sombras llamadas *esbatimentos*, que en el sistema de rayos paralelos causan los cuerpos en las superficies de otros, que dejan de recibir la luz directa por interrumpir aquellos el curso de los rayos luminosos; esto es, la demarcacion de dicha sombra por puntos situados geométricamente en planta, elevacion y perfil, para trazar despues el contorno de ella

ligando los puntos con líneas oportunamente, como en
fig. 63. el dibujo del objeto mismo. Sea pues H un punto de la escena opaco que interrumpe al rayo LH su curso, y tràtese de hallar las tres coordenadas de la sombra S que causa en una superficie cualquiera. Desde luego podemes hacer el raciocinio de que hallàndose H en la línea del rayo, la proyeccion de H será tambien un punto de la proyeccion del rayo; por lo cual, trazando en los tres dibujos la proyeccion del rayo que pasa por la de H, como se sabe ya, solo restará determinar cuál punto de dicha proyeccion del rayo es el que se busca.

CASO PRIMERO. *Esbatimento sobre un plano paralelo á cualquiera de los tres coordenados.*

31. Supongamos en primer lugar que la sombra s
fig. 63. debe caer en uno de los planos coordenados ò en otro paralelo á este; y para deducir aun tiempo todos los resultados, imagínense tres planos hs, $h's$, $h''s$ respectivamente paralelos á los coordenados, ó sean estos mismos. Queda establecido (24) que el rayo LH sigue la direccion de la diagonal Hs del cubo, que tiene de lado la distancia desde H al plano que recibe la sombra, siendo estremos de dicha diagonal el esbatimento s y el punto H opaco que le causa. Considérese primeramente al punto s en el plano BsD paralelo al de planta, y que h es la proyeccion de H, de consiguiente hs proyeccion del rayo en que se trata de determinar el punto s. Por el triángulo Hhs rectángulo en h vemos, que la estension hs depende de la distancia Hh que hay entre el punto opaco y el plano que recibe la sombra, distancia que llaman los artistas *vuelo* ò relieve del punto respecto del plano, y que hs es tambien hipo-

tenusa del triàngulo rectàngulo cuyos catetos son los lados hD y sD del cubo, é iguales por consiguiente al vuelo Hh del punto opaco H. Igualmente se puede razonar considerando al punto s en el plano paralelo al de elevacion, ó en el paralelo al de perfil, y siendo h' y h'' las proyecciones de H sobre ellos, de consiguiente Hh' el vuelo respecto del primero, y Hh'' el vuelo respecto del segundo; distancias que cuasi siempre serán desiguales entre sí y á la Hh de que hablamos antes, aunque en nuestra figura son iguales por haber supuesto á la sombra en la concurrencia de los tres planos. Luego, en cualquiera de los tres dibujos la proyeccion del rayo oscuro, ó distancia desde la proyeccion del punto opaco hasta la proyeccion de su esbatimento, es la hipotenusa de un triàngulo rectàngulo que tiene sus dos catetos iguales al vuelo del punto opaco respecto del plano que recibe la sombra.

Este principio sirve para deducir por los mismos datos que suministran las proyecciones de un objeto, el lugar de la sombra que haga cualquiera punto opaco de dicho objeto en el plano coordenado ó en otro paralelo á él, sabiendo por otra parte el vuelo del punto respecto del plano que ha de recibir la sombra, es decir, la distancia à que del plano esté el punto en sentido de las z si es paralelo al de planta, en sentido de las v si es paralelo al de elevacion, y en sentido de las x si es paralelo al de perfil.

En efecto, siendo h la planta de un punto H que debe causar sombra en cualquier plano de este dibujo, ó en otro paralelo á él, se tira desde h la proyeccion lh del rayo, y la recta hC paralela á uno ú otro de los ejes en la cual se ha de tomar la distancia he, igual al vuelo del punto H original respecto del plano de planta ó del paralelo en que esté la sombra; y tirando despues desde e la recta eB paralela al otro eje, cortará á la proyeccion del rayo en el punto s, que serà la sombra de la cuestion. Lo mismo se determina la sombra de otro punto M cuya planta es m, y de un tercero cuya planta es o, y asi sucesivamente de los que hubieren de producirla sobre el mismo plano, mediante los vuelos respectivos. Si los tres puntos h, m, o son vértices de un triàngulo opaco, se ligaràn con rectas sus tres sombras, y quedará trazado el contorno de la que produzca el triángulo sobre el plano.

Cuando el punto ó puntos del espacio deben causar
fig. 64. sombras en el plano de elevacion ó en otro que fuese paralelo á este, como por ejemplo los puntos $P\,Q\,T$ de las proyecciones p, q, t, se tiran en el cuadro de elevacion las proyecciones lp, lq, lt de los rayos, y las paralelas respectivas pC, qC, tC á uno ú otro de los ejes, en las cuales se toman desde p, q, t las cantidades pe, qe, te, respectivamente iguales á los vuelos ó distancias que en direccion de las coordenadas v haya desde P, Q, T al plano que recibe las sombras, para cortar los rayos en los puntos s, s, s con las rectas que desde los puntos e se tiren paralelamente al otro eje.

Si los puntos opacos del espacio estan situados de
fig. 64. modo que deban causar sombras en el plano coordenado de perfil, ò en otro paralelo á él, como por ejemplo los vértices del triángulo $J\,K\,N$ cuyas proyecciones sean j, k, n; se observa la misma regla para determinar los puntos s, s, s sombríos, y por último el esbatimento del triángulo ligando aquellos con rectas.

En cada uno de los tres casos hemos tratado de averiguar el lugar que la sombra del punto debe ocupar en un plano solo, porque dicho lugar no puede pertenecer mas que á un plano, á menos que en el mismo concurran varios, como sucedió cuando establecimos la teoría por medio del cubo al principio del artículo: y aun hemos dado por supuesto en dichos ejemplos que la sombra debia caer en tal ó cual plano determinado; pero en las aplicaciones hay que atender á la posibilidad de esta suposicion, y para ello suministran datos los dibujos mismos del objeto opaco à quien pertenece el punto que ocasiona la sombra, y los del objeto á quien pertenece el plano, como se verà por lo que sigue.

Necesitándose pues averiguar si caerá ó no dentro del recinto que tiene limitado el plano coordenado de la escena, ú otro paralelo à él, la sombra que arroje un punto ó una línea del espacio; supongamos en primer lugar situados en los tres dibujos las proyecciones de tres puntos *M*, *N*, *O*, estremos superiores de tres líneas rectas opacas que salen al espacio desde el plano de planta, siendo *r*, *q*, *t*, los puntos respectivos que tienen comunes con él. Tratándose de marcar en la planta las sombras producidas por los puntos de las proyecciones *m*, *n*, *o*, por la regla de antes veremos que solo la sombra *s* de *m* es la que cae dentro del àmbito que tiene asignado el cuadro de planta, que la sombra de *n* irá á párar al punto *s* mas allá del cuadro de elevacion, y la sombra de *o* al punto *s* mas allá del cuadro de perfil. Ademas, las sombras que producen los estremos inferiores de dichas rectas opacas, coinciden con los mismos estremos; de suerte, que las sombras *r s* y *q s* de las dos rectas *n r* y *o q* estan interrumpidas en los puntos *b* y *c*, la una por el cuadro de elevacion, y la otra por el de perfil; y por tanto, en aquel hay à lo menos un punto *b* de la sombra que arroja la recta *n r*, y en el de perfil un punto *c* de la sombra que arroja la recta *o q*.

fig. 65.

Veamos ahora si en estos dos planos hay algun otro punto de dichas líneas sombrías. En cuanto al de alzado, lo averiguaremos tirando desde la proyeccion n' del punto opaco la del rayo, y determinando por la construccion que sabemos la sombra de n', la cual serà s': luego, este punto y el b hallado antes determinan la parte $s'b$ de sombra, que con la parte br de planta compone la total que en la escena causa la recta nr. De un modo análogo se determina en el cuadro de perfil la sombra s'' de o''; y la parte $s''c$ de sombra que con la cq de la planta compone la total producida por la recta oq en la escena.

CASO II.º *Esbatimento sobre una superficie perpendicular á uno de los planos coordenados.*

32. Se propone la superficie plana ó curva vertical fig. 66. 67. EF que se eleva sobre el plano de planta; en disposicion de que reciba la sombra de la recta opaca HM del espacio; y para ello supongamos delineados los tres dibujos de la escena. Si ahora tiramos en la planta la proyeccion del rayo que pasa por la proyeccion h de H, concurrirá en el punto s con la línea ef proyeccion de la superficie perpendicular, que recibirá la sombra si es que llega á ella, y no puede pasar de ella por encima del muro en virtud del vuelo de H. Siendo esto asi, el punto s de hs es la proyeccion de la sombra de h, porque es el único punto comun á la proyeccion de la superficie ef y à la del rayo; luego, elevando la vertical de s, un punto de ella será la sombra de H en el cuadro de elevacion: y como dicha sombra debe hallarse tambien en la proyeccion $h's'$ del rayo en dicho cuadro, se sigue que será el punto s' en que se corta la proyeccion $h's'$ con la vertical ss'. Lo mismo hallaríamos otra planta s y el alzado s' de la sombra que otro punto M cuya planta es m, deba causar en la superficie ef: y si esta es plana como en

la figura 66, la recta $s's'$ determinada por los dos puntos es la sombra causada por la recta *HM* del espacio, por ser interseccion del plano *ef* con el plano sombrío que forman todos los rayos interceptados por la recta *HM*.

Si la superficie que recibe la sombra es curva vertical, como en la figura 67, la planta misma *ss* de la línea sombría dice que es curva la elevacion de ella, y por consiguiente será necesario elevar muchas verticales desde puntos intermedios de la planta *ss*, dividiéndola en partes iguales; y en conformidad tirar tambien otras tantas proyecciones de rayos en el cuadro de elevacion, desde puntos intermedios de $h'm'$ dividida en igual número de partes iguales.

Aplicaremos estas reglas elementales y las del caso I.º à varios problemas.

Problema I.º *Delinear el esbatimento que un triángulo opaco HMO del espacio produce en la escena, habiendo en ella un muro E F vertical entre el plano de elevacion y el triángulo.* fig. 68.

Suponiendo construidos los tres dibujos de la escena, procederemos á determinar los esbatimentos de los vértices del triángulo en la planta, segun la regla del caso I.º; y se hallarà que solamente la sombra de *h* es la que puede ser recibida por el plano de planta, dentro del àmbito que le està designado; pues las de *m* y *o* llegarian mas allà del plano de elevacion, el cual seria quien por esta razon la recibiria en caso de no interrumpir el curso de ellas el muro. Si es que las interrumpe en efecto este por su altura, como se debe inferir por el dibujo del alzado, se procederá segun el método del caso II.º Primeramente se elevan verticales desde los puntos 3 y 4 en que los rayos encuentran al muro en la planta; y tirando en el alzado y perfil los rayos, estos cortarán á las verticales en los puntos s' y s' en el alzado, y en s'' y s'' en el perfil. Resta solamente ligar estos puntos con los 1 y 2 en que las líneas sombrías que resultaron en la planta encuentran al plano de elevacion, y verificado esto, quedará trazado el contorno de la sombra total en los dibujos.

Problema II.° *En la escena compuesta de un muro cóncavo vertical y otro de caras planas tambien verticales con una abertura de figura rectangular por don-*
fig. 69. *de pasa la luz, determinar el esbatimento que causa el muro de la abertura en el cóncavo pospuesto á él.*

Este problema se resuelve facilmente por las reglas de los casos I.° y II.°, aplicándolas á todas las líneas rectas opacas ò aristas de la abertura y del muro en que està.

Problema III.° *Siendo convexo el muro vertical que recibe sombra, y curva la abertura del muro ante-*
fig. 70. *puesto por donde pasa la luz, determinar el contorno del esbatimento.*

Lo mismo se resuelve este problema que el anterior, con la diferencia de tenerse que dividir la proyeccion del arco en la planta por verticales bajadas desde el arco de la elevacion divida en partes iguales.

Problema IV.° *En los dibujos de la escena compuesta*
fig. 71. *de una superficie plana triangular y un muro con escalones terminados por planos horizontales y verticales, trazar el esbatimento que estos reciben del triángulo.*

Delineando desde luego en la planta, segun la regla del caso I.°, los contornos de las sombras que recibirian los planos de dibujo, y los horizontales de los escalones si estuviesen prolongados indefinidamente, vemos que solo el segundo escalon puede recibir una parte de sombra, y por ello, sola esta parte aparece oscura en el dibujo. Asimismo, segun la regla del caso II.°, elevando verticales desde los puntos 1, '1, ''1; 2, '2, ''2; 3, '3, ''3 en que las proyecciones de los rayos encuentran en la planta à las aristas de los escalones, vemos que solo estan esbatimentadas las caras verticales de los escalones segundo y tercero, como aparece en los dibujos de elevacion y perfil.

PROBLEMA V.° *Teniendo delineados los dibujos de la escena compuesta de un prisma recto elevado desde el plano de la planta y de un muro escalonado, hallar la sombra que este recibe de aquel.* fig. 72.

Despues de haber marcado como en el caso anterior los puntos de cada escalon esbatimentados, y teniendo presente ademas que el esbatimento de la base empieza desde ella misma, solo hay de nuevo el trazar las partes de contorno que ligan los puntos 1, 2, 3 á aquellos, con la precaucion de oscurecer la parte posible de cada escalon, y no mas.

CASO III.° *Esbatimento sobre un plano que esté oblicuamente situado respecto de todos los coordenados.*

33. Si la superficie MO que recibe sombra de un punto H del espacio es plana oblicua, la sombra s de planta se halla en el dibujo hs del rayo, pero no resulta determinado gràficamente como en el caso anterior: sin embargo, las consideraciones que siguen darán á conocer el lugar de la sombra en los tres cuadros. Sean h, h', h'' los dibujos del punto opaco H; y dirigiendo las proyecciones del rayo, hallaremos que i es el punto del plano xv que resultaria sombreado sino hubiese cuerpo intermedio; luego, la sombra que este pueda recibir se halla con precision entre h y el punto b, en que la proyeccion del rayo sale fuera del ámbito que tiene limitado el plano oblicuo en el diseño. Siendo pues a y b las plantas de los puntos en que el plano fig. 73.

proyectante del rayo corta los lados *PM* y *ON* de dicho plano, trácense los dibujos a' y a'', b' y b'' de dichos puntos en los otros dos cuadros; y ligándolos con rectas, serán ab, $a'b'$, $a''b''$ los tres dibujos de la interseccion del plano del rayo con el inclinado que recibe sombra. Como esta debe hallarse en el rayo, y al mismo tiempo en la interseccion dibujada, serà dicha sombra el punto comun s' de estas dos rectas en la elevacion, y s'' en el perfil: luego, si se baja la vertical $s's$, el punto s en que esta corta á la proyeccion hi del rayo en la planta es el esbatimento en ella. Aplicaremos esta regla al problema siguiente.

Problema. *Dados los dibujos de un prisma recto*
fig. 74. *elevado sobre el plano de planta, y un muro cuya cara oblicua ó rampa recibe sombra de aquel, hallar el lugar de dicha sombra.*

Despues de elevar verticales desde los puntos 1, 2, 3, y '1, '2, '3 en que aparecen cortados por los rayos en la planta dos lados del plano oblicuo: hàllense en los dibujos verticales los puntos s', s', s' y s'', s'', s'', como consta por lo establecido en el caso III.°: y ligàndolos con rectas, quedará trazada en dichos dos cuadros la sombra que arroja la base superior del prisma. Como la inferior está en el plano de planta, hay que ligar ademas aquellos puntos con los 1, 2, 3. Finalmente, las verticales bajadas desde los puntos s', s', s' del cuadro de elevacion, dan en la planta las intersecciones s, s, s, vértices del esbatimento causado por la base superior del prisma, que se liga despues con el de la base inferior.

CASO IV.° *Esbatimento sobre una superficie curva cualquiera.*

34. Si la superficie que recibe sombra es curva de

cualquiera figura y no perpendicular á plano alguno de los coordenados, considéresela de figura poliedral; y despues que se hayan hallado todos los puntos en que los planos proyectantes de los rayos cortan á los lados de las caras respectivas, habrá que seguir el método del caso III.° hasta concluir los dibujos del esbatimento de cada una; y ligar al fin en cada cuadro los esbatimentos parciales, de que resultará el total con tanta mas aproximacion cuanto mayor número de caras se supongan al poliedro.

PROBLEMA. *Delinear el esbatimento que la superficie cóncava de un vaso, cuya figura y disposicion es cual se ve por el dibujo, recibe de las paredes mismas suyas.* fig. 62.

El vaso recibe luz en su pared interior, como se vió al fin del artículo (25), y siguiendo las reglas de aquella teoría se determinaron las tintas; pero es facil conocer que tambien debe recibir sombra por el borde y la pared de ácia el orígen luminoso, y aparecer este efecto en la planta. Para determinar el contorno del esbatimento, se supone primeramente que el vaso está compuesto de muchas caras piramidales truncadas; y luego que se hayan fijado los puntos sombríos asi, por el método del caso III.°, se ligaràn con rectas para demarcar el contorno del esbatimento: pero despues hay que hacer la correccion que el supuesto exige, convirtiendo en curva el polígono; en inteligencia de que todo el intérvalo que resulte desde dicho contorno al borde que le causa es una capa sombría, ò el esbatimento de la superficie, con la aproximacion que permiten las circunstancias complicadas del problema.

35. En los cuatro casos generales de que se ha tratado estan comprendidos todos los que pueden ofrecerse al dibujante; y por lo espuesto se ve que los tres primeros son los fundamentales. Generalmente serà

75. preciso emplear los tres cuando la composicion de la fig. 76. escena sea muy variada, y aun á veces en un objeto 77. mismo. Asi sucede en los diseños que se citan al márgen, representantes de un edificio y dos cortes de él con las tintas y esbatimentos que les pertenece.

ASUNTO III.

Claro-oscuro y esbatimentos en el sistema de rayos divergentes.

36. Aunque generalmente no se usa en el dibujo geométrico el sistema de alumbrar la escena con un punto luminoso, cuyos rayos por lo dicho en òptica vienen à los objetos, como los hilos de un fajo que tuviese forma cónica: sin embargo nos ocuparemos algun tanto en las dos cuestiones análogas á las que se han resuelto en el caso de los rayos paralelos, que son; 1.ª valuar el grado de claridad de cada punto de la superficie que recibe luz directa: 2.ª hallar el contorno del esbatimento que este causa en las otras superficies de la escena.

El principio general que nos ha de guiar en la primera cuestion, es el demostrado en el artículo (7) de óptica, que el grado de claridad de un punto iluminado está en razon del seno del àngulo que forma el rayo dirigido á él, con el plano tangente à la superficie en el mismo punto. Segun este principio, y por ser máximo seno el del ángulo recto, y mínimo el de cero ángulo, se siguen los resultados que manifestamos en óptica y que aqui volvemos à repetir. 1.° El punto mas claro de un plano será aquel en donde el rayo sea perpendicular à él: toda circunferencia descrita en el plafig. 78. no desde el pie de la perpendicular tendrá igual tinta; y la fuerza de claridad de cada punto, esto es la de tintas, irá decreciendo segun vaya siendo mayor el radio ó distancia del punto al pie de la perpendicular. 2.° Por ser distinta la claridad en el àmbito de cada plano segun la distancia al pie del rayo perpendicular en este sistema, se necesita formar una escala de tintas para cada plano, y combinar las escalas de todos los de una escena, de modo que sus términos formen una sola escala, esto es, graduar las diversas tintas de todas las partes superficiales iluminadas; lo que exige aun mas atencion y práctica que en el sistema de rayos paralelos, en que cada plano tiene una tinta sola. 3.° Todo plano que coincida con un rayo del fajo luminoso es oscuro absoluto; y por la divergencia de rayos en este sistema serán absolutamente oscuros los planos que prolongados vengan á pasar por el punto luminoso: mas ninguno puede haber absolutamente claro en toda su estension, aunque sí pueden tener varios un punto absolutamente claro; tales serán los de un sistema en que cada uno sea perpendicular á un rayo distinto: y como se supone la base del cono luminoso cuan grande es imaginable, todo plano prolongado cuanto sea necesario tendrá un punto absolutamente claro, esceptuando los absolutamente oscuros, y tambien aquellos à quienes no llega luz por estar interrumpida. fig. 78.

Si el plano que recibe luz es perpendicular á uno de los coordenados, podemos determinar por los mismos dibujos el punto absolutamente claro que tendrá; y al efecto, sea *MN* dicho plano, *mn* su proyeccion, *LC* el rayo perpendicular, *lc* su proyeccion, y por consiguiente la de todos los rayos que vienen á la recta *Cc* perpendicular al plano de dibujo, siendo *c* la proyeccion de *C*. El plano *LCc* que pasa por *LC* y *Cc*, es perpendicular al que recibe luz y al de dibujo á un mismo tiempo (Geom. 154); y por ello siempre será fig. 79.

recto el ángulo mcl que forman las proyecciones del rayo y plano iluminado, sobre el de dibujo á quien este sea perpendicular (Geom. 153). Esta verdad nos enseña el medio de fijar en los tres dibujos la proyeccion del punto C claro absolutamente: pues *prolongando la proyeccion mn de cada plano perpendicular, hasta con-*
fig. 80. *currir con la perpendicular lc venida á ella desde la proyeccion l del punto luminoso, será el concurso c proyeccion del punto claro absoluto en el cuadro á quien es perpendicular el plano iluminado.* Ademas, por ser LC paralelo al plano del primer dibujo, sus proyecciones $l'c'$ y $l''c''$ en los otros dos serán respectivamente paralelas á los ejes de aquel (Geom. 143); y de consiguiente, *dirigiendo desde l' y l'' las rectas $l'c'$ y $l''c''$, como tambien perpendiculares á estas desde c, ó bien las coordenadas Bc' y Dc'', los concursos c' y c'' serán las otras dos proyecciones del punto C claro absoluto.* Tambien es visible que los puntos de la perpendicular Cc al plano de dibujo y de sus proyecciones $c'B$ y $c''D$ son tanto menos claros cuanto mas lejos estén de C, ó bien de su proyeccion c' ó c''. Por esta consideracion sabremos graduar la tinta de cada plano á lo largo de las ordenadas $c'B$ y $c''D$; y por lo dicho antes acerca de la igualdad de tintas en cada circunferencia del centro C, deduciremos las que correspondan á las demas partes del plano MN perpendicular á uno de los cuadros.

La imensa variedad de circunstancias que concurren en los planos oblicuos à los de dibujo, hace que omitamos aqui la teoría de la formacion de escalas para sus tintas; recomendando el uso del instrumento descrito en el artículo (7) cuando se tiene la escena formada, ò el hacer mentalmente en otro caso el cómputo de la parte de cada plano en donde hiere con menos inclinacion la luz, para degradar la fuerza de las tintas al rededor de dicha parte, y entonar estas con las de todos los demas planos: y cuando la superficie es curva, se la considera inscrita en un poliedro para formar de uno ú otro modo la escala de tintas.

Pero sea cualquiera la figura de la superficie, se puede por los tres dibujos de su contorno y del punto luminoso determinar la parte que recibe luz directa, por medios análogos á los que se practicaron en el artículo (27). Pues, encaminando desde la proyeccion del punto luminoso las proyecciones de los rayos á los vértices de la figura, ó tangentes à ella cuando es curva, la parte de superficie compuesta de las que se hallen comprendidas entre los límites del claro y oscuro ácia el orígen luminoso, será la que reciba luz directa. Por último, se supone que el objeto está iluminado débilmente por el reflejo en la parte superficial oscura, y se suaviza de este modo la gran masa de tinta oscura por el lado contrario de la clara.

37. Nos hallamos en el caso de la segunda cuestion indicada al principio del asunto, que es la de hallar en el sistema de rayos procedentes de un punto luminoso, el contorno del esbatimento que un cuerpo causa en los imediatos. Todos los casos que pueden ocurrir en esta cuestion son mas fáciles de resolver que los de la anterior, y tan exactamente como en el sistema de rayos paralelos. En efecto, cuando el plano que recibe la sombra S de un punto H es paralelo á un coordenado ó fig. 81.
este mismo, viniendo la luz del punto L, las proyecciones s, s', s'' de la sombra son puntos de las proyecciones lh, $l'h'$, $l''h''$ del rayo que pasa por L y H. Ademas, el punto s, ó s', ò s'' es el concurso de las rectas LH y su proyeccion lh, ó $l'h'$, ó $l''h''$: y como sabemos por la tabla de medidas (19), ó por el mismo

dibujo construido, el lugar de los puntos l y h, ó l' y h', ó l'' y h'', y los valores de Ll y Hh; constrúyanse aparte en real dichos cuatro puntos L, H y l, h por ejemplo refiriéndonos á la planta, y el concurso de las rectas LH, lh prolongadas darà el punto s, y la longitud hs que se debe dar con el compas á la proyeccion del rayo sombrío.

Si sale fuera del àmbito del cuadro el esbatimento de un punto ó de una línea, por las distancias desde las proyecciones de los puntos opacos hasta los oscurecidos por ellos cuando el plano en que se busca es paralelo á uno de los coordenados, se halla su lugar en los otros dos dibujos por un medio análogo al que adaptamos en el sistema de rayos paralelos; pero dirigiendo las proyecciones del rayo conforme requiere su divergencia.

Finalmente, los métodos espuestos en los tres casos últimos del asunto precedente, son aplicables à los mismos en el sistema de un solo punto luminoso, para situar los dibujos del esbatimento que causa un punto del espacio sobre cualquiera superficie, con la diferencia de que para el dibujo del rayo hay que dibujar los dos puntos luminoso y opaco.

fig. 82. Proponemos dos problemas simples de este asunto,
fig. 83. que se hallan resueltos en las figuras que se citan al márgen; y estamos persuadidos de que bastan los principios espuestos, para vencer las dificultades de cualquier caso en el sistema de alumbrar escenas con un solo punto luminoso; entendiéndose tal, cuando la luz
fig. 84. viene de una lámpara, ò de algun orificio cónico ó piramidal abierto en pared con la base mayor ácia la escena, pues entonces la prolongacion de rayos dirigidos por las paredes del orificio conduce á un punto L de donde se pueden considerar emanados.

PARTE III.

Perspectiva ó dibujo natural.

ASUNTO PRIMERO.

Teoría de la perspectiva.

38. Por la teoría de la vision cuyos elementos hemos definido en los artículos (4 y 5), nos consta que fig. 1. los rayos visuales procedentes de un objeto forman un conjunto de figura piramidal, que empezando en la superficie que los despide viene à terminar en el ojo del espectador. Si cortàsemos todos estos rayos ò fibras de la pirámide con una superficie, y en esta quedasen impresas las secciones de aquellos con sus respectivos colores y caractéres, la seccion sería una imágen del objeto; é indudablemente reproduciría en la vista la figura del mismo cuantas veces fuere mirada por el espectador, situado en la misma posicion que antes respecto de la estampa: de suerte que, aprendiendo á construir tales imàgenes de los objetos, tendremos un medio de escitar en la vista la misma sensacion que ellos. Esta es la causa de llamarse *dibujo natural*, ò *perspectiva* del objeto, la imágen asi pintada en la seccion, y puede figurarse sobre cualquiera superficie considerándola como secante de la pirámide visual; mas, comunmente es plana, y se llama *plano perspectivo* entonces el de dibujo.

1\. Sea el objeto *MN* quien produce la pirámide *MNO*,
fig. 2. 3. y haciendo secciones á diferentes distancias del ojo por planos paralelos dirigidos arbitrariamente, ó por un solo plano fijo variando de lugar el objeto ó el espectador, se verifican las propiedades geométricas siguientes en estas secciones ò semejanzas de *MN*, segun lo que se demuestra en la Geometría cuando se trata de la pirámide y del cono cortados por planos.

fig. 1. 1.ª Suponiendo fijo el objeto y el espectador, aunque el plano de dibujo varíe de lugar acercándose ó alejàndose paralelamente siempre; son semejantes las perspectivas que resultan (Geom. 182); y las magnitudes de ellas estan en razon de los cuadrados de las distancias desde el ojo á los planos respectivos, cuando aquellas encierran dentro de su contorno algun espacio, y en razon de las distancias simplemente cuando son líneas las perspectivas (Geom. 183).

2.ª Si el espectador y el plano perspectivo estan fijos, y el objeto *MN* se mueve paralelamente à sí mismo en prolongacion del eje óptico, la perspectiva varía
fig. 2. con el ángulo óptico *MON*, y en razon directa de la imàgen *mn* pintada en la retina (5). Luego, las magnitudes superficiales de las perspectivas que sean semejantes en dos de estas posiciones, estan en razon inversa de los cuadrados de las distancias á que se halle el objeto respectivamente al ojo, y en razon de las distancias simplemente cuando son lineales las imágenes. La misma consecuencia se deduce para dos perspectivas semejantes que resultaren variando de lugar el espectador, y permaneciendo fijos el objeto y el plano perspectivo.

3.ª Si el objeto se mueve no paralelamente á sí mismo, permaneciendo fijos el espectador y el plano, la perspectiva decrece tambien entonces con el ángulo óptico. Suponiendo que la línea recta *MN* se mueve girando sobre su estremo *M*, la mayor perspectiva resulta cuando es perpendicular á esta línea el rayo visual *ON'* del otro estremo, y la menor cuando coinciden dicha línea y las dos visuales de sus estremos, á cuyo término llega padeciendo sucesivamente una diminucion valuable (Trigon. 24, IV.), que es el escorzo de la perspectiva. Este se conforma con el escorzo geométrico (22) en el caso ideal de admitir la posicion del ojo á una distancia indefinita del objeto; es decir, en el caso de rayos visuales paralelos, cuales pueden considerarse en el dibujo geométrico todas las perpendiculares al plano del cuadro, que viniendo desde cada punto del objeto marcan sobre dicho plano la imágen segun aquel sistema de dibujo, que es el de proyecciones. fig. 3.

4.ª En todos los casos que llevamos referidos en este artículo, puede suceder que la imágen de una línea recta sea mayor que la original, cuando el plano perspectivo tenga mucha inclinacion respecto de esta; accidente que jamas puede suceder en las imágenes del dibujo geométrico (22).

Sentados estos principios que sirven de ilustracion para el dibujo de que se trata, pasemos à convenir en algunas disposiciones preliminares necesarias del mismo asunto.

Puesto que el arte de la perspectiva plana consiste en construir una imágen semejante á la que produce el objeto en nuestra vista, ó bien la que resultaría pintada en el plano que cortan los rayos visuales, si la seccion de cada uno de estos quedase impresa en él; nuestro asunto será el deducir las reglas para situar dichos puntos ò secciones de los rayos en el cuadro destinado para representar en perspectiva el objeto ò escena, considerando que dicho cuadro es el plano secante de los rayos visuales. Para ello se necesitan ciertos datos, cuales son las coordenadas x, v, z de cada punto radiante ó natural segun el sistema del dibujo geométrico (17), y tambien saber la posicion que ocupa en la escena el cuadro ó plano perspectivo. En cuanto á lo primero, ya sabemos medir las coordenadas x, v, z de cualquiera punto correspondiente al cuerpo ó composicion de cuerpos que haya en una escena, suponiendo los tres planos del sistema coordenado perpendiculares entre sí, dispuestos como fuere conveniente (17). En cuanto al dato de la posicion que ocupa en la escena el plano perspectivo, se simplifica mucho la cuestion si se adopta por tal el mismo plano coordenado xz que fue de elevacion en el dibujo geométrico, estando la escena toda á un lado de este plano sobre el de planta, y el espectador en el otro lado mirando desde cualquiera punto O á dicha escena, como si fuere á verla por un plano trasparente; de suerte, que entre el ojo O del espectador y el punto M de la escena se halla el cuadro vertical ó plano coordenado de las xz. Ademas nos consta que, si despues de marcar en el cuadro las perspectivas de puntos de la escena, se ligan con rectas aquellas debidamente, se tendrán trazadas en perspectiva las líneas rectas, los planos y los poliedros, como tambien las líneas y superficies curvas aproximadamente. Este será pues el sistema de construccion que adoptaremos, y el asunto de las investigaciones que se harán en los tres artículos siguientes; investigaciones de que deduciremos tres modos distintos de trazar la perspectiva de una escena, para que el dibujante pueda elegir el mas adecuado á su gusto ó à las circunstancias, pues el resultado será el mismo siempre.

fig. 6.

39. Siendo M un punto de la escena á quien dirige el espectador desde O la visual OM, y cuya pers-

pectiva m se ha dicho que es el punto en donde la visual atraviesa el cuadro xAz, se trata de establecer las reglas para situar m por construccion. Con este fin supongamos proyectados O en $'O$ y M en $'M$ sobre el plano de planta, á que se sigue que el plano $O\,'O\,'M\,M$ determinado por $O\,'O$ y $M\,'M$ (Geom. 138, V.º) en posicion vertical (Geom. 154), cortarà al cuadro segun la vertical $m\,m'$ (Geom. 157): y como la perspectiva m se halla á un mismo tiempo en estos dos planos, ha de ser uno de los puntos de su interseccion $m\,m'$; y por hallarse tambien en la visual OM, será precisamente el punto de concurso de estas rectas. fig. 4.

Mas lo que nos interesa es, dadas las tres distancias de M à los planos coordenados, bien sea en líneas por los dibujos geométricos, bien en números por la tabla que se forma (19); saber el lugar de la perspectiva de M: y con este objeto supónganse tambien proyectados M en $''M$ y O en $''O$ sobre el plano de elevacion, que es el perspectivo mismo. La visual OM, y de consiguiente m, se halla en el plano $O\,''M\,M\,''O$: este plano ademas tiene los puntos $''M$ y $''O$ en el cuadro, y por ello $''M\,''O$ es la interseccion de ambos; y debiendo estar m á un mismo tiempo en los dos, precisamente se halla en la recta $''M\,''O$. Como antes hicimos ver que tambien se hallaba en la vertical mm', se sigue *que la perspectiva* m *es el punto en que la recta* $''M\,''O$ *que liga las proyecciones de* M *y* O *sobre el cuadro, corta á la vertical* $m\,m'$ *elevada desde el punto* m', *interseccion del eje* Ax *con la recta* $'O\,'M$ *que liga las proyecciones de* O *y* M *sobre la planta.*

Para construir por este método la perspectiva m del punto M del espacio, obsérvese la siguiente regla. *Se traza el cuadro* xAz, *y bajo de él, á manera que en el dibujo geométrico, el plano de planta por ambos lados* fig. 5.

16

del eje Ax; *se marcan las proyecciones* $'O$ *del ojo y* $'M$ *del punto* M *sobre este plano, como tambien las proyecciones* $''O$ *y* $''M$ *sobre el cuadro; es decir, los dibujos geométricos de* O *y* M *en planta y elevacion. Dirigiendo pues* $'O$ $'M$ *en la planta, se tiene el punto* m' *en que corta á* Ax; *y trasladando* m' *al pie del cuadro, elévese la vertical* $m\,m'$ *indefinida; y la recta* $''O$ $''M$ *cortará á dicha vertical en el punto* m *perspectiva de* M. Por medio de operaciones análogas se sitúan en el cuadro las perspectivas de todos los puntos principales de la escena, inclusos los esbatimentos; y *ligando con rectas los puntos del cuadro, se tendrá el contorno de la perspectiva.* Se deja conocer que para delinear asi el dibujo perspectivo, hay que construir primero los geométricos de planta y elevacion, incluyendo el punto en que se halla el espectador: y por ello será ventajoso este método, que llamaremos de *doble construccion*, para formar perspectivas de objetos cuando se nos dén dichos dibujos de planta y elevacion construidos, marcando entonces al trasluz en el plano perspectivo las proyecciones de los puntos, á fin de economizar trabajo y no cansar el papel que ha de servir de cuadro.

40. Cuando solo tenemos la tabla de distancias coordenadas en números (19), se puede construir la perspectiva sin hacer dibujo de elevacion, por el método que vamos á esponer, y para el cual necesitamos hallar en números las relaciones que las coordenadas de la perspectiva m tienen con las coordenadas de los puntos M y O. A fin de averiguar en general estas relaciones, distingamos con $'x$ $'v$ $'z$ las coordenadas de O, con $''x$, $''v$, $''z$ las de M, con x, v, z las de m; y resultan las ecuaciones

fig. 5.

$$x=m'C+'x, \quad z=mi+''z; \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

pero necesitamos las espresiones de $m'C$ y mi para sustituirlas. Los triàngulos de la planta $m'C'O$ y $'MBm'$ son semejantes por construccion, y comparando lados homólogos tendremos la igualdad

$$\frac{m'C}{Bm'}=\frac{C'O}{B'M}:\ \text{ó bien}\ \frac{m'C}{''x-x}=\frac{'v}{''v},$$

de la cual viene despejando ,... $m'C=\dfrac{'v\times''x-'v\times x}{''v}$

Los triángulos del cuadro $''Mmi$ y $m''Ol$ dan, comparando lados homòlogos,

$$\frac{mi}{''Ol}=\frac{''Mi}{ml},\ \text{ò}\ \frac{mi}{''Ol}=\frac{Bm'}{m'C}:$$

y como en los triàngulos de planta es $\dfrac{Bm'}{m'C}=\dfrac{B'M}{C'O}$, sustituyendo en la anterior hallaremos

$$\frac{mi}{''Ol}=\frac{B'M}{C'O},\ \text{ó bien}\ \frac{mi}{'z-z}=\frac{''v}{'v};$$

de donde viene despejando

$$mi=\frac{''v\times'z-''v\times z}{'v}.$$

Teniendo ya las espresiones de $m'C$ y mi que buscabamos, introdúzcanse en las ecuaciones ((*)), y las coordenadas de la perspectiva seràn

$$x=\frac{'v\times''x-'v\times x}{''v}+'x;\ z=\frac{''v\times'z-''v\times z}{'v}+''z$$

espresiones que, reduciendo á comun denominador y llevando à un miembro la coordenada sin tilde, reciben la forma

$$x\times('v+''v)='v\times''x+''v\times'x;$$
$$z\times('v+''v)='v\times''z+''v\times'z;$$

de las cuales vienen despejando,

$$x=\frac{'v\times''x+''v\times'x}{'v+''v};\ z=\frac{'v\times''z+''v\times'z}{'v+''v}\ \ ..... \ \ ((**)).$$

Para construir por este *método de coordenadas* la perspectiva de la escena, dadas las tablas de los dibujos geométricos con los valores $''x$, $''v$, $''z$ de las tres coordenadas de cada punto, y ademas las $'x$, $'v$, $'z$ del ojo, se sustituyen dichos valores en las fórmulas ((**)); y haciendo las operaciones de Aritmética que estan indicadas en ellos, tendremos los valores x y z de cada punto del cuadro. Ultimamente, formando la escala de partes iguales como para el dibujo geométrico y trazados los ejes del cuadro, se construyen dichos valores de x y z, y su punto de concurso es la perspectiva del que en la escena tiene las coordenadas $''x$, $''v$, $''z$.

Tambien esplicaremos mas adelante el modo de formar una escala perspectiva, en la cual se hallarán en líneas los valores de x y z para trasladarlos con el compas al cuadro.

41. Ahora se trata de la posicion que en el cuadro tienen las perspectivas de las rectas de la escena, con los fines que luego se verán, y principalmente para deducir otro método muy simple de construir los dibujos
fig. 6. perspectivos. Sea pues MN la recta de la escena, mn su perspectiva, OV la perpendicular desde el ojo al cuadro, y OT una paralela á MN en el plano de las visuales OM y ON; circunstancias por las cuales, siempre que MN y su perspectiva mn no sean paralelas, deben concurrir OT y mn. Por otra parte, mn se halla tambien en el plano de dibujo; y como OT solo tiene en dicho plano un punto, este puede ser solamente el punto T en que la perspectiva mn de la recta MN del espacio corta á la recta OT paralela á MN.

Se pueden hacer construcciones análogas y discurrir
fig. 7. lo mismo acerca de la perspectiva pq de otra recta PQ del espacio paralela á MN: y como desde el punto O no se puede encaminar mas que una sola recta OT que

sea paralela á otra dada, y de consiguiente á muchas del espacio (Geom. 138, IV.°), se sigue que *las perspectivas* mn, pq, rs, ... *de todas las paralelas* MN, PQ, RS, ... *de un mismo sistema, van á concurrir á un punto* T *del cuadro á donde viene á parar la recta* OT *dirigida desde el ojo paralelamente á las paralelas del espacio.*

Si las rectas paralelas del espacio son paralelas al plano del cuadro, la paralela que pase por O tambien lo será á dicho cuadro, y entonces T estará á una distancia infinita; es decir, *que las paralelas entre sí y al plano perspectivo producen perspectivas que concurren á una distancia infinita, esto es, paralelas entre sí y á las líneas del espacio.* Por esto, *las perspectivas de todas las verticales de la escena son paralelas al eje* Az *del cuadro, y las perspectivas de las paralelas al eje* Ax *tambien son paralelas á este eje.*

Si las rectas paralelas del espacio son perpendiculares al plano del cuadro, el punto en que la paralela tirada por O concurra con este plano es la proyeccion V de la vista del espectador, proyeccion á que antes hemos llamado $''O$: luego, *las perpendiculares al plano perspectivo darán perspectivas que concurrirán en la proyeccion* V *del ojo sobre el plano del dibujo, punto llamado de vista en esta ciencia.* Y por tanto, *la perspectiva del eje* Av *del cuadro estará en la recta* AV, *dirigida desde el origen al punto de vista.* fig. 6.

Si las rectas paralelas del espacio forman ángulo semirecto con el plano del cuadro, el ángulo OTV que forma OT con él es un semirecto, y de resultas tambien TOV por ser recto el tercero OVT del triángulo OVT; á lo que se sigue el ser iguales los catetos OT y TV. Luego, *las perspectivas de las rectas que forman un ángulo semirecto con el plano perspectivo, se diri-* fig. 7

gen á un punto accidental separado del de vista V, tanto como del plano el ojo. Se llama *punto de distancia* el accidental en que concurren las perspectivas de las líneas que forman ángulo semirecto con el plano de dibujo: y la situacion del punto de distancia está en la fig. 8. circunferencia $TT'T$, determinada por el plano OVT girando al rededor de OV; y solamente por OT cuando es dada la posicion absoluta de la MN que tenga tal inclinacion. Si por ejemplo la recta MN que forma ángulo semirecto con el cuadro es paralela al plano de planta, igualmente será paralelo á este plano el OVT; y su interseccion con el de dibujo serà VD paralela al eje Ax (Geom. 143); luego, *el punto de distancia de las rectas que siendo paralelas al plano de planta forman ángulo semirecto con el del cuadro, será D ó D' en la horizontal VD* que pasa por el de vista V, siendo $VD=VD'=OV$. Por otra parte, segun manifiestan las rectas OD y OD', *será D' el punto accidental de la recta en cuestion MN, cuando ella ó lo que es igual su planta se acerca á un mismo tiempo á los ejes Ax y Av.* Mas, *cuando la recta en cuestion se aleja de Av al paso que se acerca á Ax, será D el punto de distancia.*

Veamos donde se halla el punto accidental T de los fig. 9. rayos luminosos paralelos, del sistema que en el artículo (24) se adoptò. Entonces dijimos que el rayo LA que pasa por el orígen de coordenadas coincide con la diagonal AL' del cubo, cuyos lados son paralelos respectivamente à los ejes: de modo que AB es un lado del cubo; y BL' diagonal de una cara paralela al cuadro, é interseccion de dicha cara con el plano ABL' perpendicular á ella. Antes hemos visto tambien que el punto accidental se halla en la interseccion VT del plano del cuadro, con el plano OVT perpendicular à él, y determinado por las rectas OV y OT. En el caso presente concurre la circunstancia de ser OV paralela á AB, y OT paralela al rayo AL': por ello será el plano OVT paralelo à ABL', y de resultas paralelas entre sí las intersecciones OT y BL' de planos paralelos con otros dos paralelos entre sí: de consiguiente, el ángulo TVD que forma VT con la horizontal VD será semirecto, por igual á $L'BC$. Ademas, los triángulos OVT, ABL' de lados paralelos son semejantes, y por ello proporcionales sus lados

$$OV : VT :: AB : BL';$$

lo que dice que OV està con VT en la misma razon que el lado del cuadrado con la diagonal; de suerte que por ser $OV = VD$, si se baja desde D la recta DT perpendicular á Ax, concurrirá con VT en el punto T, que será el accidental de los rayos luminosos paralelos y vértice del cuadrado. Luego, *para situar en el cuadro el punto accidental del sistema de rayos luminosos paralelos, se formará con el lado VD por bajo de esta recta un cuadrado, y el vértice T opuesto á V es el punto accidental que se busca.*

El fin principal à que se dirigen las investigaciones que acabamos de hacer en este artículo, es el de saber siempre los lugares que en perspectiva tienen ciertas líneas y puntos principales de la escena, para despues deducir las reglas de trazar perspectivas por este método: y de dichas investigaciones resultan las verdades siguientes en resúmen. 1.ª Las paralelas al eje Ax y las paralelas al eje Az, dan perspectivas paralelas respectivamente á estos ejes. 2.ª Las paralelas al eje Av, es decir, las perpendiculares al plano perspectivo, dan perspectivas que desde su punto de concurso con el plano se dirigen al punto de vista V, que es la proyeccion del ojo sobre el cuadro. 3.ª Las rectas que siendo paralelas al plano de planta forman àngulo semirecto con el plano del cuadro, dan perspectivas que desde su punto de concurso con él, se dirigen al punto de distancia, que se halla en la horizontal del cuadro que pasa por el punto *V* de vista á uno ú otro lado de este punto, y á tanta distancia de él, como él mismo està del espectador. 4.ª Los rayos luminosos paralelos del sistema adoptado para el dibujo (24), dan perspectivas que se dirigen á un punto accidental, que es el vértice opuesto á *V* en el cuadrado que se forma con el lado *VD* por bajo de esta recta.

Con estos conocimientos, y considerando ser cada punto de la escena interseccion de tres rectas que dan perspectivas conocidas, como se dirà mas adelante, estableceremos entonces las reglas del método que llamaremos de *puntos accidentales*, cuyos principios fundamentales hemos hallado.

42. Debemos concluir este ensayo de las teorías recordando algunas ideas esplicadas anteriormente. 1.ª Las escenas que reciben la luz del sol ó de la luna libremente, como sucede en general cuando estan figuradas en el campo, se deben suponer iluminadas por rayos paralelos; y las escenas que reciben solamente la luz de una lámpara, deben suponerse iluminadas por rayos que despide un punto luminoso. La luz introducida por ventana, puerta ó cualquiera paso abierto en pared, cuya figura sea cònica ó piramidal con la base mayor ácia la escena, equivale à producida por un punto *L* luminoso, cuya situacion se determina prolongando las aristas de la piràmide; y la que viene de un orìficio cilíndrico ò prismático equivale á la de rayos paralelos. En ambos sistemas solo pueden aparecer iluminados con luz completa los cuerpos de la escena que

estén en prolongacion del cilindro ó cono luminoso; y aun de la superficie de aquellos, no mas que la faz á quien hieran los rayos, pues lo demas resulta esbatimentado, ya por la pared en que esté abierto el orificio, ya por el mismo cuerpo ú otro de la escena. Los objetos asi esbatimentados por la pared participan de otra luz mas débil, cual será la penumbra cuando el fluido emana de un cuerpo luciente mayor que el orificio (6): y las partes de superficie privadas de toda luz directa, solo reciben la debilísima del reflejo que precisa ó arbitrariamente venga de otros cuerpos iluminados, segun lo manifestado en el artículo (7). Tambien se demostró en dicho artículo, que el grado de claridad de cada punto iluminado es mayor, segun el àngulo que forma el rayo con el plano en que està dicho punto se acerque mas á recto; sobre cuya materia y la de marcar los esbatimentos en todos los casos, remitimos al lector á lo que se dijo en los artículos correspondientes del dibujo geométrico.

2.ª Los objetos lejanos del cuerpo luminoso reciben menos luz que los cercanos; y tambien la impresion que causan en nuestra vista es tanto mas débil cuanto mas se apartan de ella, consistiendo esta debilidad en disminuirse el grado aparente de los colores, y la magnitud aparente de la estension, hasta ser las imágenes confusas á veces, y aun ofuscarse totalmente (9). A todas estas circunstancias habrà de atender el dibujante que quiera manifestar en un cuadro las propiedades de la naturaleza; y en la exacta imitacion de tales fenómenos consiste lo que llaman los pintores *perspectiva aerea.*

3.ª En el artículo (10) dimos idea de los colores simples y compuestos, indicando tambien el orígen de su armonía: el que quiera instruirse en el arte del colorido, lea la obra de Mengs publicada por Azara, la cual es tan recomendable por la doctrina del Autor, como por la sabiduría que en ella minifiesta el célebre Español que la redactó comentándola.

4.ª En la topografía se deben emplear únicamente dibujos geométricos, pues en ellos con el compas y la escala se adquiere conocimiento de las tres dimensiones de la figura. Cuando se quieran sustituir dibujos perspectivos, ha de espresarse por escrito esta cualidad para no inducir à errores; porque en este caso las líneas y superficies paralelas al cuadro carecen de la proporcionalidad que tienen por sí en el natural, y que resultaria exacta en el dibujo geométrico que se construyese en aquel mismo cuadro. Para convencerse de ello no hay mas que atender á la figura 26: en que *F*,
fig. 26. *G*, *H*, ... son partes iguales cuadradas de la superficie plana *BE*, el ojo está en *O*, el plano perspectivo es *CA*, las superficies de las perspectivas parciales varian segun las inclinaciones de los rayos visuales respecto de los objetos *F*, *G*, *H*, ... (38); y por ello la proporcionalidad de aquellas es diferente de la que hay entre estos. Tampoco deberàn mezclarse puntos en perspectiva con otros situados geométricamente, como se suele ver en algunos dibujos topográficos, ejecutados asi tal vez para hacerlos mas agradables al espectador.

5.ª En este ensayo de dibujo nos hemos limitado á las perspectivas planas, por ser las usadas comunmente, à causa de las estravagantes imágenes que resultan en una superficie còncava ó convexa que corte al cono visual, como puede inferirse de imaginar que fuese de esta clase la superficie *CA* de la figura 26; y cuales por objeto de diversion se ven pintados en algunos juguetes de óptica. Mas, como por otra parte es tan comun la pintura en la superficie cóncava de las cúpulas y pechinas de los edificios suntuosos, se pueden conseguir bellos efectos eligiendo escenas propias. Tales nos parecen las imaginadas fuera de la cúpula al rededor de ella, suponiendo que el espectador dibujante se halla en un punto de la vertical que se eleva desde el centro de su circunferencia, y que la superficie cóncava de dicha cúpula consta de varios cuadros, como si estuviese compuesta de planos que formasen un poliedro inscrito en ella. De este modo cada parte de la escena podrá estar representada con mucha aproximacion á la exactitud, en cada parte de la cúpula que se imagina plana, y que intercepta los rayos visuales que vienen al espectador desde dicha escena; y procediendo asi en cada parte de la cúpula respecto de cada parte de la escena, resultará toda ésta representada en aquella con tanta verdad como vemos en algunas pintadas al fresco por célebres profesores.

6.ª Ultimamente, el dibujo llamado natural es el mismo perspectivo, como se dijo en el artículo (38), aunque vulgarmente se usa el segundo nombre cuando se dibujan vistas de edificios, y el primero cuando se trata de ejecutar el cuadro al tanteo, esto es, de adquirir á la simple vista tal destreza en el arte de representar las imágenes perspectivas de los objetos, que resulten en el cuadro tan exactas como si se hubieran trazado por las reglas de la ciencia. Con este motivo no podemos menos de repetir lo que dijimos en el prólogo; añadiendo que si bien el dibujante perspectivo, ademas de las reglas geométricas dadas, necesita para llegar á la perfeccion ejercicio continuado en imitar la naturaleza al tanteo, guiado por las reglas; asi tambien el que se dedique solo á imitar al tanteo no se podrá perfeccionar en el arte, por falta del auxilio de las reglas de perspectiva.

Muchos hay que para representar escenas estables, como por ejemplo vistas de pueblos, de paisages, etc. usan el aparato llamado *cámara oscura;* que es un artificio en que se verifica poco mas ó menos el fenómeno de la vision humana, haciendo que un lente reciba los rayos visuales como si fuera el ojo, para que introduciéndose por él vengan á pintar en un espejo la imàgen, que por fin se trasmite ingeniosamente al papel situado en debida forma dentro de la cámara oscura: y al dibujante solo pertenece entonces copiar la imágen. Mas, aun para los que se dedican á esta clase de trabajo, serán muy útiles los principios de la ciencia de perspectiva, y el arte de trazar segun ella los dibujos con la regla y el compas.

ASUNTO II.

Artes de construir las perspectivas.

43. Sabemos que el arte de la perspectiva se reduce á situar en el cuadro debidamente las impresiones de los rayos visuales, ó bien la imágen que debe causar en el ojo del espectador la misma sensacion que el objeto; y quedan esplicados varios métodos para su ejecucion. Si se medita sobre cualquiera de ellos, y aun sin esto, por la naturaleza de la cuestion se vendrá en conocimiento, de que los datos necesarios penden de la posicion que cada punto radiante y el ojo del que le mira tienen. Y como la posicion de un punto en la escena està determinada por sus distancias à tres planos *coordenados* (19), cuyas intersecciones, ó *ejes* del sistema Ax, Av, Az
fig. 6. perpendiculares entre sí de dos en dos, se cortan en el punto comun ú orígen A, se deja conocer la dependencia que el dibujo perspectivo tiene del geométrico. Por lo cual, se necesitan para trazar la perspectiva de

un objeto los mismos datos que para situar las tres proyecciones de aquel objeto, y ademas las del ojo; es decir, bien sea en números la tabla de distancias desde cada punto natural y el ojo á los tres planos coordenados, bien sea la presencia de los dibujos geométricos construidos por dicha tabla, pues en ellos estan las mismas distancias espresadas en líneas.

Tambien quedan establecidos en el artículo (38) los convenios, de que la escena ó composicion de objetos propuesta para dibujar, y el ojo del espectador, se han de colocar en la parte superior del *plano horizontal ó de tierra*, llamado de *planta* en el dibujo geométrico; y que el *plano perspectivo* ó cuadro sea el vertical llamado de *elevacion* entonces, el cual está situado entre la escena y el espectador, como si este mirase los objetos de ella por un cristal que sirviese de cuadro. Asi se facilita la inteligencia de las relaciones que tienen los dos artes de dibujar. fig. 6.

Para que el dibujante pueda elegir cualquiera de los tres métodos de ejecutar la delineacion y el sombreado de una perspectiva, que la teoría nos ha enseñado, esplicaremos uno á uno cada método, incluyendo en él todas las reglas que le son peculiares, y aplicándolas á casos fáciles, pero que ofrezcan suficientes dificultades para que se aprenda el modo de vencer cuantos puedan ocurrir.

Arte de la perspectiva por el método de coordenadas.

44. En el articulo (40) se establecieron las fórmulas (**) de las coordenadas x, z pertenecientes à la perspectiva de un punto M de la escena, cuyas coordenadas fueren $''x$, $''v$, $''z$, mirado por el dibujante desde el punto O del espacio, siendo $'x$, $'v$, $'z$ las coordena- fig. 5.

das de este punto, y prescindiendo de que $'v$ y $''v$ tienen signos contrarios por estar los puntos M y O en lados diferentes del plano perspectivo; pues entonces dimos á las fòrmulas citadas la disposicion conveniente para sustituir siempre los números con sus propios signos. Las fórmulas de que se trata son

$$x = \frac{'v \times ''x + ''v \times 'x}{'v + ''v}, \quad z = \frac{'v \times ''z + ''v \times 'z}{'v + ''v}:$$

y para calcular por ellas los valores numéricos de x y z, se sigue el órden de operaciones que dijimos al fin del artículo (40), y que repetimos aquí. *Situando en el plano horizontal inferior á todos los objetos de la escena el orígen A; se supone que por él pasan los tres planos coordenados de planta, elevacion y perfil; se miden por medio de compas ó cuerdas, ó fijan arbitrariamente si la escena es de capricho, las distancias $''x$, $''v$, $''z$ de cada punto principal del objeto á los tres planos coordenados, y se sustituyen los valores numéricos de dichas distancias en las fórmulas que anteceden, asi como las $'x$, $'v$, $'z$ del ojo; debiendo siempre la coordenada $'v$ satisfacer al principio del artículo* (5), *esto es, á que la distancia $'v$ desde el ojo al plano perspectivo sumada con la distancia $''v$ desde dicho plano al punto medio de la escena, forme una distancia $'v + ''v$ mayor que vez y media la mayor estension de dicha escena.*

Despues que se hayan deducido asi los valores numéricos de x y z, coordenadas de la perspectiva, se procede á delinearla. Para esto *se elige en el cuadro un punto que sirva de orígen, y desde él se trazan los ejes de las coordenadas: se forma separadamente escala geométrica de partes iguales con arreglo á la magnitud que se quiera dar á la perspectiva total; se toman en ella con el compas los valores que para x y z hayan* *resultado de las fórmulas; y trasladándolos al cuadro, quedará en él construida la perspectiva del punto de la escena. Nos ejercitaremos despues en algunas prácticas.*

Pero antes queremos ofrecer al dibujante un recurso para dispensarle del cálculo que exigen las fòrmulas (**). Con este fin vamos á construir dichas espresiones numéricas, de lo cual nos resultarà una escala, en que dadas las coordenadas de los puntos de la escena se hallen las de sus perspectivas: y para ello podemos dar á las espresiones las siguientes formas,

$$x = \frac{''v \times 'x}{'v + ''v} + \frac{'v \times ''x}{'v + ''v};$$

$$z = \frac{''v \times 'z}{'v + ''v} + \frac{'v \times ''z}{'v + ''v}.$$

Trataremos de construir la primera, simplificándola con las suposiciones

$$\frac{''v \times 'x}{'v + ''v} = w, \quad \frac{'v \times ''x}{'v + ''v} = W,$$

de que resultan

$$x = w + W; \quad \frac{'v + ''v}{'x} = \frac{''v}{w}; \quad \frac{'v + ''v}{'v} = \frac{''x}{W}.$$

En un cuadro son constantes $'x$, $'v$, $'z$; y sobre estas líneas conocidas ha de formarse la escala. Para ello, tirando *la recta QK y una perpendicular PR á esta,* fig. 10. *tómense* $PQ = 'x$ *y* $QR = 'v$; *elevando despues en los puntos P y R las PH y RL paralelas á QK, dividanse estas tres rectas en partes iguales Q ... 1, 1 ... 2, 2 ... 3, ... etc., que son las unidades de la escala arbitraria* (13), *por medio de paralelas á PR: dirijanse desde Q á los puntos* $i, i', \ldots\ldots, l, l', \ldots\ldots$, *de division las rectas* $Qi, Qi', \ldots, Ql, Ql', \ldots$; *y la figura asi dispuesta será propia para conocer los valores de x.*

En efecto, tomando en QK desde Q el valor de $'v + ''v$, como tambien el de $''v$ sola, siempre serán estos unos catetos de dos triángulos rectángulos semejantes: y como ademas $'x$ es el otro cateto del primero; el del segundo triángulo será ω ácia la línea PH, por la propiedad de tales figuras (Geom. 78), quedando asi cumplida la espresion $\frac{'v+''v}{'x}=\frac{''v}{\omega}$. Lo mismo diremos de W respecto de la escala que está ácia LR. *Se tomará despues con el compas* $\omega+W=x$, *y se trasladará al plano perspectivo.*

Por ejemplo, sean $'x=14$, $'v=10$, $'z=15$; y tratando de hallar la perspectiva del punto M, cuyas coordenadas sean $''x=8$, $''v=2$, $''z=9$, tómese con el compas ó mentalmente $'v+''v=12$, como tambien $''v=2$: á la simple vista de la escala se reconoce ser la recta $e...2$ el valor de ω: se verá del mismo modo que $f...8$ es el valor de W; y de consiguiente $e...2+f...8$ el de x. Cuando $''x$ es mayor que $'v+''v$, será W mayor que $'v$; y por ello, el punto f caerá fuera de RL: para $''x=14$ por ejemplo, el valor de W será $f'...14$.

El método de construir la escala de las z está deducido tambien de la forma que se puede dar à la segunda fórmula (**), que viene á ser

$$z=\frac{''v\times'z}{'v+''v}+\frac{'v\times''z}{'v+''v}:$$

y llamando $\cap$ y $\bigcap$ á las partes del segundo miembro, resultan las espresiones

$$z=\cap+\bigcap,\quad \frac{'v+''v}{'z}=\frac{''v}{\cap},\quad \frac{'v+''v}{'v}=\frac{''z}{\bigcap}.$$

fig. 11. *Dividiendo como antes la recta* QK, *diríjase* PH *paralela á ella á la distancia* $PQ='z$, *é igualmente* RL *á la distancia* $QR='v$; *y las* Qi, Qi',..... Ql, Ql'.... *completarán la escala.*

Para usar de ella se tomará sobre QK *la* $'v+''v$

como tambien las $''z$ *y* $''v$: por ejemplo, para el punto M propuesto antes será g...2 el valor de $\cap$, y h...9 el de $\bigcap$, de consiguiente la suma de estos el de z.

Las escalas de las $\bigcap$ y W son idénticas, y bastaría añadir la de $\cap$ á la de x; sin embargo hemos dibujado la escala completa de z separadamente.

Es tan fácil el uso de ambas, como apreciable la prontitud con que se construyen así las perspectivas de puntos dados en el espacio; pues en la práctica solo hay que atender á los valores de $'v+''v$, $''x$ y $''v$, para tener inmediatamente los de $w+W=x$ en la primera; asi como á los de $'v+''v$, $''z$ y $''v$ en la segunda para tener los de $\cap+\bigcap=z$.

45. Con el objeto de aplicar los dos métodos que nos conducen à los valores de las coordenadas x y z de la perspectiva de un punto dado por $''x$, $''v$, $''z$, ya numéricamente por medio de la fórmula (**) para despues construirlas con escala ordinaria geométrica, ya gráficamente por medio de la escala perspectiva construida de antemano, se proponen las prácticas siguientes.

1.ª *Hallar la perspectiva del cuadrilátero MNPQ situado en el plano xv, ó de planta, teniendo sus vértices las coordenadas de la tabla que sigue*

	M.	*N.*	*P.*	*Q.*
$''x$	6.	3.	6.	9.
$''v$	2.	5.	8.	5.
$''z$	0.	0.	0.	0.

y estando el ojo del espectador en el punto O de las coordenadas. . . . . . .

	O
$'x$	14.
$'v$	10.
$'z$	15.

Despues de sustituir en las fórmulas (**) los valores de $''x, ''v, ''z$ correspondientes à cada vértice del cuadrilátero propuesto, y los de $'x$, $'v$, $'z$ del ojo, salen pa-
fig. 12. ra las coordenadas de las perspectivas m, n, p, q de dichos vértices los números que aparecen por la tabla

	m.	n.	p.	q.
x.	$7\frac{1}{3}$.	$6\frac{2}{3}$.	$9\frac{5}{9}$.	$10\frac{2}{3}$.
z.	$2\frac{1}{2}$.	5.	$6\frac{2}{3}$.	5.

Con estos datos procederà el dibujante à delinear la perspectiva: para lo cual se forma desde luego escala geométrica de partes iguales; y trazando el cuadro con los ejes perpendiculares Ax y Az, se toman con el compas en la escala primeramente las coordenadas $x=14$ y $z=15$ del ojo, para situar el punto V de vista en dicho plano perspectivo, y se dirige si se quiere la recta VD paralela á Ax, à fin de marcar en ella las partes VD y VD' iguales à $'v$ para los puntos D y D' de distancia segun el artículo (41), aunque en el método actual no son necesarios. Tomando despues con el compas en dicha escala geométrica sucesivamente los valores de x y z, que diere para cada punto la tabla perspectiva, se sitúan en el plano perspectivo dichos puntos con toda la exactitud que permiten las partes fraccionarias. Como la perspectiva de una línea recta es otra tal (38), las que se dirijan desde unos puntos á otros debidamente colocados en el plano perspectivo, serán perspectivas de las MN, NP, ... etc. que en la escena propuesta determinan la figura, y la $mnpq$ será perspectiva completa de ella.

Desde luego pudimos notar que todos los lados del cuadrilátero propuesto forman àngulo semirecto con el plano xz, y que por ello sus perspectivas habian de resultar con direccion á los puntos de distancia D' y D, que se hallarán en la horizontal $D'D$, por estar las rectas en el plano horizontal xv (41). Con esta observacion hubieran bastado las perspectivas de solos dos puntos para completar la figura.

Si en vez de este método se quiere hacer uso de la escala perspectiva, se construye esta; y por los datos de las tablas geométricas no mas, se encuentran en ella los valores lineales de x y z correspondientes à la perspectiva de cada punto.

II.ª *Construir la perspectiva de un prisma recto elevado sobre el cuadrilátero anterior, y terminado por otra base paralela cuyos puntos constituyentes son*

	$G.$	$H.$	$J.$	$K.$
$''x$	6.	3.	6.	9.
$''v$	2.	5.	8.	5.
$''z$	20.	20.	20.	20.

Suponiendo que las aristas verticales son MG, NH, PJ, QK, y que está situado como antes el ojo O en el punto de las coordenadas

$'x$	$'v$	$'z$
14.	10.	15.

Sustituyendo en las fórmulas (**) por $''x$, $''v$, $''z$ los valores correspondientes de las coordenadas que particularizan á los puntos G, H, J, K, y de las $'x$, $'v$, $'z$ del ojo, resultan para las perspectivas g, h, j, k de dichos puntos las coordenadas x y z siguientes:

	$g.$	$h.$	$j.$	$k.$
x	$7\frac{1}{3}$.	$6\frac{2}{3}$.	$9\frac{5}{9}$.	$10\frac{2}{3}$.
z	$19\frac{1}{6}$.	$18\frac{1}{3}$.	$17\frac{7}{9}$.	$18\frac{1}{2}$.

Y los mismos valores daria en líneas la escala perspectiva, para las coordenadas x y z de la perspectiva de cada punto.

Con el compas y escala correspondiente se construyen estos puntos en el plano perspectivo, como hicimos en el problema antecedente; y las rectas dirigidas desde unos à otros segun es necesario, completarán el contorno de la perspectiva total del prisma. Tambien aqui pudimos notar que las aristas de la base superior, por la naturaleza del sólido y su situacion en la escena, forman ángulos semirectos con el plano perspectivo; por lo cual segun el artículo (41), deben dichas aristas en la perspectiva dirigirse á los puntos D ò D': hubieran pues bastado las perspectivas de los puntos G y J, para construir las dos restantes por medio de las rectas gD, gD', jD, jD'. Ademas por el artículo citado, las aristas paralelas al plano perspectivo deben dar perspectivas paralelas entre sí y á sus originales; de modo que aun de las coordenadas de las perspectivas g y j hubieran bastado las z.

fig. 12.

III.ª *Construir la perspectiva del grupo que se propuso en el artículo* (21), *visto por la parte que aparece en el dibujo geométrico de elevacion, y cuyos puntos constituyentes tienen las coordenadas* $''x$, $''v$, $''z$ *espresadas en la tabla que sigue:*

	E.	*F.*	*G.*	*H.*	*J.*	*K.*	*M.*	*N.*	*O.*	*P.*	*Q.*	*R.*	*T.*	*V.*
$''x$	26.	5.	55	55.	26	5.	30.	25.	36.	41.	53.	42.	45.	57.
$''v$	12	33.	40	40.	12.	33.	21.	29.	37.	32.	19.	8.	4.	14.
$''z$	9.	9.	9.	0.	0.	0.	26.	20.	20.	28.	0.	0.	9.	9.

		O.
	$'x$	14.
y estando el ojo en el punto de las coordenadas	$'v$	80.
	$'z$	15.

Sustituyendo en la fórmula (**) los valores de $''x$, $''v$, $''z$ y de $'x$, $'v$, $'z$, resultan para las perspectivas *e*, *f*, *g*, *h*, *j*, *k*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *t*, *v* de dichos puntos las coordenadas *x* y *z* siguientes, por aproximacion,

	e.	f.	g.	h.	j.	k.	m.	n.	o.	p.	q.	r.	t.	v.
x.	24.	7.	41.	41.	24.	7.	26.	22.	29.	33.	45.	39.	46.	51.
z.	9.	10.	11.	5.	1.	4.	23.	18.	18.	24.	3.	1.	9.	9.

En la escala perspectiva resultarian en líneas exactamente los valores de *x* y *z* que estan espresados en esta tabla por números aproximativos: y la misma ventaja tiene dicha escala sobre el càlculo numérico siempre que ocurra este accidente, que es muy comun.

Constrúyanse pues en el plano perspectivo por uno ú otro medio los puntos *e*, *f*, *g*, *h*, *j*, *k*, *m*, *n*, *o*, *p*, fig. 13. *q*, *r*, *t*, *v*, y dirigiendo rectas de unos á otros segun el natural indica, quedará dibujado en perspectiva el grupo. Apenas es necesario prevenir que aquellas líneas cuya vision es imposible à causa de ocultarla el cuerpo mismo, no han de aparecer en el cuadro sino señaladas por puntos, ó de ningun modo sino hiciesen falta para dar idea del objeto.

IV.ª *Dados, en vez de tablas numéricas de coordenadas, dos de los tres dibujos geométricos de una escena, representarla en perspectiva.*

Para esto, prescindiendo si se quiere de los ejes coordenados á que se refieren los dibujos geométricos, y trazando otros perpendiculares entre sí, como sea conducente para la perspectiva, se toman con el compas en dichos dibujos las coordenadas $''x$, $''v$, $''z$ de cada punto notable, inclusos los esbatimentos: con las cuales y las $'x$, $'v$, $'z$ del punto de vista se delinea la perspectiva de la escena, bien por la fórmula (**) traduciendo las líneas á números, y despues estos á lineas por la escala geométrica, ó bien por la escala perspectiva des deluego.

46. La espresion de los efectos òpticos que la luz debe causar en los cuerpos de la escena, cuya perspectiva sabemos delinear, daràn á la figura delineada un aparente relieve, hasta el grado de causar la misma sensacion que el vulto; y sabemos (7) y (8) que para conseguirlo se necesita representar cada parte de la figura con el grado de claridad ó tinta que la corresponde, y ademas los esbatimentos de la escena.

En las prácticas del dibujo geométrico se encuentran recursos para determinar la demarcacion de cada tinta, y la de los esbatimentos; y en atencion á que suponemos al perspectivo instruido en aquellas doctrinas, aqui nada tendremos que hacer sino incluir en la fòrmula (**) las coordenadas de dichos lugares como si fuesen puntos del objeto, ó bien reputarlos como tales en el caso de usar la escala perspectiva, para tener las de estos mismos lugares en perspectiva.

Trazada, por ejemplo, la planta geométrica del prisma recto QH que se eleva desde el plano de ella, inclusos los esbatimentos S, $'S$, $''S$, $'''S$, que hacen en dicho plano los vértices Q, H, J, K de la base superior; por el compas y la escala geométrica resultan para los esbatimentos las coordenadas de la tabla que sigue;

fig. 12.

	S.	'S.	''S.	'''S.
''x.	-14	-17	-14	-11
''v.	22.	25.	28.	25.
''z.	0.	0.	0.	0.

Los signos negativos de $''x$ indican que los esbatimentos caen á la derecha del orígen A, puesto que las $''x$ positivas estan adoptadas para la izquierda, en donde reside la escena por suposicion. Sustituyendo en la fòrmula (**) por $''x, ''v, ''z$ sus valores, y por $'x$, $'v$, $'z$ las coordenadas 14, 10, 15 del punto O del ojo, ó bien usando de la escala perspectiva, resultan para las perspectivas s, $'s$, $''s$, $'''s$ las coordenadas de la tabla

	s.	's.	''s.	'''s.
x.	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{7}$	$6\frac{12}{19}$	$6\frac{6}{7}$
z.	$10\frac{5}{16}$	$10\frac{5}{7}$	$11\frac{1}{19}$	$10\frac{5}{7}$

Ya sabemos poner estos puntos en el cuadro, y que ligàndolos con rectas, como tambien los m, n, p, q con aquellos, quedará trazado en perspectiva el contorno del esbatimento que el prisma causa en el plano coordenado de la planta.

De igual modo se pueden hallar las perspectivas de los esbatimentos causados por cualquiera cuerpo de la escena sobre la superficie de otro; pero suspendemos aqui este asunto que será tratado de otra manera despues.

Arte de la perspectiva por el mètodo de puntos accidentales.

47. El método que se ha seguido en los artículos precedentes para trazar el dibujo natural, ó sea la pers-

pectiva de cualquiera composicion de objetos, goza de toda la generalidad y exactitud apetecibles; pero acaso parecerá demasiadamente complicado por el uso del cálculo aritmético, y por la traduccion que exige de valores numéricos á líneas, sin embargo de ser tan simples ambas operaciones para el que se halle impuesto en los elementos necesarios. Por esta razon, y atendiendo á la utilidad de poner las aplicaciones de las ciencias al alcance del mayor número de individuos, vamos á construir los dibujos perspectivos empleando el arte de puntos accidentales, que se esplicó en las teorías de esta ciencia (41).

48. Pero antes de emprender cuestion alguna de prácticas, recordaremos las prevenciones necesarias y los principios en que se funda el arte de la perspectiva segun este método, como se prometió al fin del artículo citado.

Prevencion 1.ª Sea ò no arbitraria la posicion del
fig. 8. espectador, hay que marcar en el cuadro perspectivo el punto V llamado de *vista*, el cual es en donde concurre con el cuadro la perpendicular OV dirigida desde el ojo O al cuadro; y es de notar, que segun el ojo se halle mas ò menos elevado sobre el plano de planta xv, caerá tambien el punto de vista V mas ò menos lejano de dicho plano, y de consiguiente la perspectiva mas ó menos parecida á las que se suelen llamar hechas á *vista de pájaro*.

Prevencion 2.ª Despues de trazar en el cuadro la recta VD, llamada *horizontal*, que pasando por V sea paralela à Ax, llamada aqui *línea de la tierra*, y eje coordenado de las x en el dibujo geométrico; se marcan en la línea VD dos puntos D y D' llamados de *distancia* por uno y otro lado de V, y que distan de este punto lo mismo que el ojo O dista de V, y como la distancia OV desde el ojo al cuadro es generalmente arbitraria, tambien lo serán las VD y VD'. Mas, por los principios ópticos *debe ser la distancia desde el ojo á la escena, á lo menos tanta como vez y media la mayor estension lineal de dicha escena:* y puesto que en igual caso se hallará el espectador del cuadro respecto de éste, es necesario convenir *en que la distancia VD, y lo mismo VD', sea al menos vez y media tan grande como la estension mas larga que resulte en el ámbito de la imágen.* Ademas, está demostrado (38, I.°), que cuanto mas distante se halle del cuadro el ojo, tanto menor será la imágen de un objeto colocado en cierta posicion fija respecto del que le mira; y por esta consideracion debe valuar el dibujante la demasía de las distancias VD y VD' iguales.

Por otra parte vimos en el artículo citado y antes en el (5), que segun se aleja del ojo una línea MN, se va disminuyendo su perspectiva en el cuadro á causa de la reduccion del ángulo óptico. Por esta convergencia de los rayos visuales en razon de la distancia que hay entre el espectador y el objeto, resulta el fenómeno óptico de aparecer en el dibujo mucho mayor á veces un hombre, que una montaña imensa situada à gran distancia. Los pintores llaman *términos* del cuadro á las representaciones de objetos situados en la escena á diferentes distancias del plano del cuadro; diciendo *primer término* al conjunto de imágenes que representan los objetos mas cercanos; *segundo término* al conjunto de los que siguen; y asi sucesivamente, tercero, cuarto, etc. términos. De este modo, y formando los grupos de cada término compuestos de individuos desemejantes por su figura, color, edad, genio, etc., resulta lo que se llama *contraposicion* ó *contraste*, que tan bellos efectos causa en la espresion del dibujo.

Los principios en que se funda el arte de perspectiva que nos ocupa son los siguientes, demostrados en el artículo (41).

PRINCIPIO 1.° *Todas las líneas de la escena paralelas al plano perspectivo resultan en perspectiva paralelas entre sí y á sus originales;* de modo que todas las verticales del natural dan sus perspectivas paralelas à la línea *Az* marginal del cuadro; y todas las horizontales que sean paralelas à la línea *Ax* de tierra, ò marginal inferior del cuadro, dan perspectivas paralelas á esta línea. Solamente las paralelas al cuadro tienen la propiedad de dar perspectivas paralelas, *pues todas las otras originales paralelas entre sí, pero que no lo sean al plano del cuadro, dan perspectivas que se reunen en un punto llamado accidental.*

2.° *Las rectas de la escena horizontales que se hallan en direccion perpendicular al plano del cuadro, como MQ y NG, vienen en perspectiva como mq y* fig. 14. *ng, de modo que se dirigen todas al punto de vista V.*

3.° *Las rectas de la escena horizontales, como MP, MR, NF, NH que prolongadas hasta concurrir con el plano del cuadro formarian ángulo semirecto con él, es decir, de 45 grados, dan perspectivas como mp, mr, nf, nh que se dirigen á uno de los puntos D ó D′ de distancia. Se dirigen al de la derecha D cuando las rectas originales encuentran al cuadro á la izquierda de la perpendicular MQ; y al de la izquierda D′ cuando las rectas originales encuentran al cuadro á la derecha de la perpendicular MQ.*

49. Bastan las prevenciones esplicadas y estos principios, para marcar en el cuadro la perspectiva de cualquiera punto de la escena, y por consiguiente el contorno del cuerpo que se quiere representar ligando los puntos unos á otros como se dirá despues. En efecto,

el concurso de dos rectas es un punto siempre; y si consideramos que por cada punto de la escena pasan dos rectas horizontales, aunque sean ideales en caso necesario, dispuestas de modo que una sea perpendicular al cuadro, y otra forme ángulo de 45 grados con él, sabremos trazar sus perspectivas, y de consiguiente la perspectiva del punto de la escena. A esto se reduce todo el artificio del método de puntos accidentales: y como la planta geométrica de cualquiera línea horizontal es otra línea paralela á ella; en vez de imaginar las dos rectas horizontales mencionadas que pasan por cada fig. 14.
punto N de la escena, imaginarémos dos horizontales que pasen por la planta $'N$ de dicho punto, en tal disposicion que una sea perpendicular á la línea de la tierra Ax, y otra tenga respecto de Ax la inclinacion de 45 grados, para situar de este modo en perspectiva la planta $M\,'N$, y despues deducir la perspectiva de la altura $'NN$ como se dirá bien pronto. Las reglas para la ejecucion son las siguientes:

Regla I.ª de trazar perspectivas. *Se dibuja primero en el papel la planta geométrica de toda la composicion con el fin que se acaba de indicar, y mas arriba se traza el cuadro con la línea misma de tierra Ax* fig. 16.
y su perpendicular Az, que es la vertical tumbada sobre el papel. Esta disposicion equivale á separar el plano xAv de la tierra sobre el cual se halla la escena, y presentarla á la vista para dirigir en real las perpendiculares y las rectas con la inclinacion de 45 grados á la línea de tierra Ax, que se halla trazada en la planta y ademas como línea marginal del cuadro, completado con la horizontal VD, el punto V de vista y el de distancia D segun las prevenciones. En seguida se baja desde el punto $'N$ marcado en la planta á la línea Ax de ella la perpendicular $'N$...1; y desde el punto 1

en que se encuentran se traza con el radio 'N...1, haciendo centro en 1, el arco circular 'N...2 que será cuadrante, y su cuerda 'N...2 tendrá la inclinacion de 45 grados. Se marcarán despues en la línea marginal inferior Ax del cuadro los puntos 1 y 2 como se ve en la figura, y dirigiendo por el principio 2.º la recta V...1, y por el principio 3.º la recta D...2, el punto 'n en que se cortan es la perspectiva del punto 'N que en la escena se halla en el plano mismo de planta.

Si la planta es una figura 'M 'N 'P 'Q rectilínea,
fig. 17. *se procede con cada uno de sus vértices lo mismo que con el punto solo del caso anterior, y se hallan las perspectivas 'q, 'm, 'n, 'p, de 'Q, 'M, 'N, 'P; y ligando aquellas con rectas como estan en la planta las otras, quedará trazada la perspectiva*

'q 'm 'n 'p de 'Q 'M 'N 'P.

Si la planta es figura curvilínea, se toman en conside-
fig. 19. *racion los puntos mas notables de ella, y tratándolos como en los casos anteriores, se marcan sus perspectivas. Finalmente, ligando estas al tanteo con la mayor exactitud posible, la cual se logra tanto mas cuanto mayor número de puntos y mas cercanos entre sí se hayan dibujado, quedará descrita la perspectiva de la planta.*

Resta el hallar las perspectivas de las alturas à que estén del plano de tierra los puntos de la escena correspondientes à la planta. Sea pues *N* el punto cuya plan-
fig. 15. ta *'N* dió la perspectiva *'n*; diríjanse las rectas *'NE* y *NJ* paralelas á la línea *Ax* de la tierra, y elevando en el punto *E*, concurso de *'NE* y *A'u*, la vertical *EJ*, esta será igual y paralela à *'NN*. Por último, se dirigirà desde *J* la recta *BJ* paralela á *A'u*, y serán iguales y paralelas entre sí y al cuadro las verticales *'NN*, *EJ*, *AB*.

Tratàndose de las líneas que en el cuadro corresponden á las construidas en la escena, serán por el principio 2.° AV perspectiva de AE, y BV perspectiva de BJ: asimismo por el principio 1.°, $'ne$ paralela à Ax será perspectiva de $'NE$; y como por el mismo principio la perspectiva de la vertical es vertical tambien, resulta que ej asi elevada será perspectiva de EJ. Volviendo à razonar lo mismo, la recta jn paralela á Ax será la perspectiva de JN, y la vertical $'nn$ elevada desde $'n$ la perspectiva de $'NN$, por consiguiente el punto n perspectiva de N. Estas reflexiones enseñan el modo de marcar en el cuadro la perspectiva de cualquiera punto de la escena que esté mas alto que el plano de la tierra. fig. 15.

Regla II.ª *Tomada en la recta Az lateral del cuadro la distancia AB igual á la altura $'NN$, diríjanse AV y BV al punto de vista; en seguida desde la perspectiva $'n$ de la planta $'N$ la recta $'ne$ paralela á la línea Ax de la tierra, para marcar el punto e en donde se ha de elevar la vertical ej; y por último desde j la recta jn paralela á $'ne$, y desde $'n$ la vertical $'nn$, que la cortará en el punto n, perspectiva de N.* fig. 16.

Haciendo uso de esta regla que se llama de la *escala fugitiva* AVB, la perspectiva de un prisma recto que se eleva desde el plano de la tierra sobre la planta $'q\,'m\,'n\,'p$, y que tiene de altura real el valor AB, serà cual aparece en la figura despues de ligar los puntos de la base superior con rectas debidamente. fig. 18.

Asi tambien cual se vé por la figura, la perspectiva de un cilindro inclinado que se eleva desde el plano de la tierra sobre su base circular K, y termina en otra base circular superior cuya planta es el círculo $'M\,'N\,'P\,'Q$. fig. 19.

Se deja conocer que cuando todos los puntos elevados del cuerpo que se representa tienen iguales alturas, basta tomar una sola AB para trazar sus perspectivas.

Mas, cuando dichos puntos del natural se hallan á diversas distancias del plano de la tierra, es necesario tomar en la línea marginal Az tantas alturas diversas
fig. 20. cuantos así haya en el objeto: esto sucede en el cuerpo que representa la figura, cuyo primer escalon tiene la altura AB, y el segundo la AB'.

50. La última operacion que exige la perspectiva, es dotar del claro y obscuro correspondientes à cada superficie cuyo contorno está trazado en el cuadro: y esta operacion envuelve dos problemas. 1.° Espresar la cantidad de fuerza con que hiere la luz á las diversas partes de cada superficie. 2.° Marcar el contorno de la sombra llamada esbatimento, que un cuerpo de la escena pueda causar en la superficie de otro.

Lo dicho acerca de esto en el dibujo geométrico, y la suposicion de estar enterado de ello el dibujante perspectivo, nos dispensan de reproducir aquí las noticias de la luz, y los modos de conocer las variedades de las tintas que corresponden à las partes de cada superficie, pues en ambos artes de dibujar gobierna una misma doctrina sobre estos dos asuntos: lo mismo decimos en cuanto á la demarcacion de esbatimentos en el dibujo de planta geométrico que necesitamos para el perspectivo: de modo que resta solo tratar de la perspectiva de los esbatimentos.

Si fuesen dados los dibujos geométricos de planta y elevacion, facilmente se trazaria la perspectiva del esbatimento por las dos reglas del artículo precedente, construyendo primero la perspectiva de su planta, elevando verticales despues desde sus puntos, y cortàndolas por la escala fugitiva. Mas, tenemos otro medio de cortar estas verticales del esbatimento elevadas desde la perspectiva de su planta.

En efecto, sean $'S$ y $'N$ las plantas del esbatimento

S y del punto N que le causa, como tambien $'s$ y $'n$ fig. 21.
las perspectivas de sus plantas, suponiendo iluminada la escena por rayos de luz paralelos, tales que la planta $'N\ 'S$ del que está interceptado por el punto N forme ángulo de 45 grados con la línea Ax de la tierra. Sabemos por lo demostrado en el artículo (41), *que la perspectiva nT del rayo original viene desde la perspectiva n de N, á un punto T que se halla en la vertical DT bajada desde el punto D de distancia de la derecha, siendo ademas DT igual á VD:* y como la perspectiva s del esbatimento se halla en la vertical $'ss$ elevada desde $'s$ y tambien en la recta nT, será necesariamente la concurrencia s de las dos rectas la perspectiva del esbatimento S original. Este raciocinio es aplicable á todos los casos; pues en dicho artículo (41) se demostró que todos los rayos de luz interceptados por puntos no diafanos de la escena, vendrian à concurrir al mismo punto T en el sistema de paralelos admitido: y por tanto, podemos establecer la siguiente regla.

Regla III.ª *Trazada la perspectiva de la planta, inclusa la del esbatimento, y marcado en el cuadro el punto T á la distancia DT igual á VD en la vertical DT, se halla la perspectiva del esbatimento original elevando verticales desde las plantas de los puntos esbatimentados, y cortándolas con rectas dirigidas desde las perspectivas de los puntos que los causan al T.*

Se deja conocer que si la superficie que recibe los esbatimentos es el plano mismo de planta, á quien llamamos aqui de la tierra, no hay necesidad de elevar verticales, pues las perspectivas de las plantas son las que se buscan. Asimismo lo manifiesta la figura, en donde vemos concurrir las perspectivas de los rayos con las perspectivas de las plantas de los esbatimentos. fig. 22.

Para ensayo en las aplicaciones de las tres reglas dadas, *se propone: primeramente la composicion de un prisma recto y un muro angular;* y despues *la misma composicion agregando á ella un escalon entre el prisma y el muro.*

Construida la planta inclusos los esbatimentos, segun reglas dadas en el dibujo geométrico, se tratan los puntos notables de ella como se ha dicho antes para fig. 23. 24. formar su perspectiva. Desde los puntos de esta se elevan verticales; las que pertenecen al cuerpo se cortan con el sistema de paralelas de la escala fugitiva AVB' en que AB' es la altura del prisma; las que pertenecen al muro, con la escala AVB'' en que AB'' es la altura del muro; y las pertenecientes al escalon intermedio que se ve en la figura 24, con la escala AVB. Los estremos de las verticales que pertenecen á los esbatimentos estan fijados con los rayos $qT, mT, nT, pT...$, dirigidos desde las perspectivas q, m, n, p al punto T, vértice del cuadrado cuyo lado es igual á VD, distancia del ojo al plano perspectivo.

51. Las sombras mas regulares son las del sistema de rayos paralelos que se acaba de esplicar, y que es el usado en el dibujo mas generalmente; pero si se quiere iluminar la escena con un solo punto luminoso, habrá de formarse bajo esta suposicion la planta, inclusos los esbatimentos (37): en seguida se delínea la perspectiva de ella, y se elevan verticales desde los puntos notables de la del esbatimento como queda dicho. Para cortar estas verticales no tiene lugar la regla III.ª; pero en vez de ella hay otra igualmente simple: pues, la perspectiva del esbatimento se halla en la vertical y en la perspectiva del rayo; y como esta resulta determinada por los puntos conocidos ya, se puede establecer la siguiente regla.

Regla IV. *Cuando la escena está iluminada por luz* *de rayos que vienen emanados de un punto luminoso, cuyos efectos estan esplicados en los artículos* (36) *y* (37); *se forma la planta geométrica, inclusos los esbatimentos, y la perspectiva de la composicion, incluso el punto luminoso; y las verticales de los esbatimentos se cortan con rectas, que desde la perspectiva del punto luminoso vienen á las perspectivas de los puntos que los causan.*

Se propone para ensayo la composicion de dos prismas rectos iluminados por una lámpara, y verticalmente situados en el plano de planta. fig. 25.

Arte de la perspectiva por el método de doble construccion.

52. En el artículo (39) establecimos los fundamentos para construir la perspectiva de una escena segun este método, que exige la operacion preparatoria de trazar antes los dibujos geométricos de planta y elevacion, dada la tabla correspondiente; por lo cual es preferible á los demas métodos cuando se trate de poner en perspectiva un dibujo geométrico de elevacion, dotado de su planta como se requiere.

Suponiendo pues dados estos, y señalada la línea *Ax* de la tierra como divisoria entre el plano de elevacion que es el perspectivo mismo, y el de planta que se traza debajo; sobrepòngase el papel en que se ha de formar la perspectiva, y màrquese al trasluz dicha línea de tierra y todos los puntos principales de planta y elevacion que determinan las figuras, inclusas las sombras. Despues de esta preparacion, que equivale á haber construido dichos puntos por coordenadas segun los números de la tabla (19), pero referidas à los ejes de la escena situada en el lugar debido (38), màrquense la planta *'O* y elevacion *V* del ojo segun la fig. 27.

parte de la escena que convenga sea visible en el cuadro, conforme á las observaciones que sobre esto se han hecho en las dos prevenciones del artículo (48): y solo resta construir la perspectiva. El principio demostrado en dicho artículo (39), y en quien se funda el método, es el siguiente, que repetimos para alivio de la memoria. *La perspectiva m de un punto M de la escena es aquel en que la recta ''MV, dirigida desde el dibujo geométrico de elevacion de M, al punto de vista, corta á la vertical mm' elevada desde el punto m', en que la planta del cuadro ó línea Ax de la tierra corta á la recta 'O 'M que liga las plantas del ojo O y el punto M de la escena.*

De aqui se deduce la siguiente regla, única necesaria para este método, suponiendo hechas las operaciones preparatorias que se han esplicado antes. *Diríjanse en la planta desde el dibujo 'O del ojo á cada punto principal 'M, 'N, 'S, 'S..., inclusas las sombras de ella, rectas correspondientes para hallar los puntos m', n'..., en que estas cortan á la planta Ax del cuadro, y trasladando dichos puntos de interseccion á la línea de tierra por medio de perpendiculares, prolónguense estas en el campo del cuadro que suponemos tendido en prolongacion del de planta. Ultimamente, diríjanse rectas desde el punto V de vista á cada principal ''M, ''N..., de los que hay en el dibujo de elevacion, inclusas las sombras; y los puntos m, n..., en que estas rectas corten á las perpendiculares elevadas antes, serán las perspectivas de los puntos M, N....* Teniendo marcados ya en perspectiva los puntos principales de la figura, se traza esta ligàndolos debidamente con rectas. La misma regla se observa aun cuando sea curva alguna línea del natural; pero tomando en esta varios puntos que se consideran principales, para proceder con ellos como con los demas de que se trata, es decir, considerando como polígono la curva, en lo cual se cometerá tanto menos error, cuanto mas cercanos entre sí se tomen los puntos de dicha curva que se pongan en perspectiva.

53. Para ensayo proponemos las prácticas que siguen.

I.ª *Hallar la perspectiva de una pirámide en equilibrio sobre su cúspide sentado en el plano de la tierra, siendo 'H 'M 'N 'P 'Q 'R la planta de la pirámide,* fig. 27. *y "H "M "N "P "Q "R la elevacion.*

Suponemos el punto de vista *V* mas elevado que la base de la piràmide, y la situacion del punto *O*, pie de la vertical del espectador manifiesta que las visuales tienen mucha inclinacion respecto del cuadro. Solo reciben luz directa dos caras y la base, que son tambien las únicas del cuerpo que ve el espectador de la escena: y las tintas relativas estan graduadas segun los principios del artículo (27).

II.ª *Se propone un prisma recto cuadrangular elevado desde el plano de la tierra, siendo su planta 'M 'N 'P 'Q, y la elevacion "G "B "C "F "M "N "P "Q.* fig. 28.

El espectador de la escena se halla situado á menor elevacion que la base superior del prisma, y mira con menor inclinacion que en el problema anterior al plano del cuadro; por lo cual resulta la perspectiva mas semejante al dibujo de elevacion. Solo aparecen iluminadas dos caras y la base superior, pero esta se oculta en perspectiva: el grado de claridad de aquellas, por ser verticales, se valúa por los ángulos que con sus plantas formen las del rayo luminoso (26); y así, la mas iluminada es la cara que se eleva de la planta *MN*, por acercarse mas á recto el àngulo que esta forma con la planta del rayo.

III.ª *Se pide la perspectiva de una bóveda de paso*
fig. 29. *abierta en un grueso muro, segun la planta y elevacion que manifiesta la figura.*

Por la disposicion que se ha dado al cuadro respecto de la fachada del muro, resulta mas simple la construccion de la perspectiva; en la cual se notará que las líneas paralelas al cuadro permanente asimismo en ella, y que las perpendiculares al cuadro se encaminan en perspectiva al punto de vista, como debe suceder segun lo demostrado en el artículo (41).

IV.ª *Construir la perspectiva de un sepulcro, dadas*
fig. 30. *la planta y la elevacion segun manifiesta la figura, estando iluminado por una lámpara cuya planta es* $'L$, *y la elevacion* $''L$.

Es un ejemplo del sistema de iluminar la escena con rayos divergentes.

V.ª *Dadas la planta y la elevacion de un pais, de-*
fig. 31. 33. *ducir la perspectiva.*

Despues de haber calcado al trasluz en otro papel los puntos principales cuya posicion conocemos por medio de los dibujos geométricos de planta y elevacion, se ha construido con ellos la perspectiva que es la figura 33, completàndola con todos los detalles minuciosos que à ojo se pueden hacer, observando su disposicion en dichos dibujos geométricos.

54. Seria de desear que pudiesemos resolver el problema inverso del que se propone en el método de doble construccion (53); es decir, *dada la perspectiva de una escena, construir los tres dibujos geométricos correspondientes, marcando en estos cada punto por los datos que prestase el cuadro de perspectiva.* Pero esto no es posible, como lo manifiestan bien espresamente las ecuaciones (**) del artículo (40); pues en ellas hay ocho cantidades inclusas, que son x, z, $'x$, $'v$, $'z$, $''x$,

$''v$, $''z$, y en dicho problema hipotético el cuadro no presenta mas que las coordenadas x, z de la perspectiva de cada punto de la escena, como por ejemplo la perspectiva m del punto M. Y aun suponiendo que fig. 5.
por algunas particularidades que ofreciera se pudiesen inferir ademas las coordenadas $'x$, $'v$, $'z$, del lugar que en la escena ocupaba la vista O del espectador que hizo el cuadro, aun quedan las tres coordenadas $''x$, $''v$, $''z$ del lugar que en la misma escena deberia ocupar dicho punto M cuya perspectiva m tenemos, sin haber mas que dos ecuaciones para la eliminacion: de suerte, que resulta indeterminado el problema en general. Tampoco hay que esperar de otra parte relacion alguna entre dichas coordenadas $''x$, $''v$, $''z$ del punto M que se quisiera sentar en los dibujos geométricos, porque las tres son variables independientes cuando se trata de puntos aislados, conforme las hemos considerado: y asi, falta una tercera relacion espresa entre ellas ademas de las dos cifradas en las dos fórmulas (**), para que pudiesemos conocer por las tres los valores de $''x$, $''v$, $''z$, y marcar en consecuencia el punto á que correspondieren, cual es $'M$ en la planta y $''M$ en la elèvacion, segun el método que se esplicò en el dibujo geométrico.

Puesto que un dibujo perspectivo no presta para construir los geométricos de cada punto, como por ejemplo la perspectiva m para construir la planta $'M$ y elevacion $''M$, mas datos que los valores x, z; si se nos diese uno de los $''x$, $''v$, $''z$, se podràn conocer los otros dos de estos, suponiendo ademas dados los $'x$, $'v$, $'z$, ó lo que es lo mismo la posicion del ojo O á que està arreglada dicha perspectiva. Esta deducion se haria por las fórmulas (**), ó bien geométricamente, como es fácil inferir meditando un poco sobre las relacio-

nes de dichas cantidades en presencia de la figura que
fig. 5. se cita en el màrgen, y lo mismo en cuanto à una escena completa observando las figuras que hemos construido por los cinco problemas del artículo anterior.

Aqui se nos ofrece nueva ocasion de recordar la dependencia que el dibujo natural tiene del geométrico, añadiendo que la falta de los datos que este último exige, es la causa de las interminables disputas que se suscitan entre los censores de un cuadro perspectivo ideal, ó cuando sin embargo de representar una escena real y existente, no se puede consultar á ella, ó lo que seria mejor à los dibujos de su planta y elevacion. El ojo solo dicta con arbitrariedad entonces la ley, y así no es estraño que á un individuo parezca grande ó chica, escorzada de mas ò de menos, etc. una estension de las que estan representadas en el cuadro. En verdad que no sucederia esto, si en las academias de las artes se exigiese al compositor de la obra el dibujo geométrico, á lo menos la planta, de los puntos principales de la escena que representare, incluso el punto de vista. Entonces las cuestiones quedarian limitadas á términos mas precisos, y sobre materias de gusto ò de filosofia de la composicion, pues aun las que versaren sobre claro y oscuro ò tintas del colorido, se podrian fundar en los datos que prestaria dicho cuadro geométrico de planta.

INDICE.

PARTE PRIMERA.

Noticia sucinta de algunos fenómenos ópticos.

PARTE II.ª

Dibujo Geométrico.

CAPITULO I.º Delineacion.

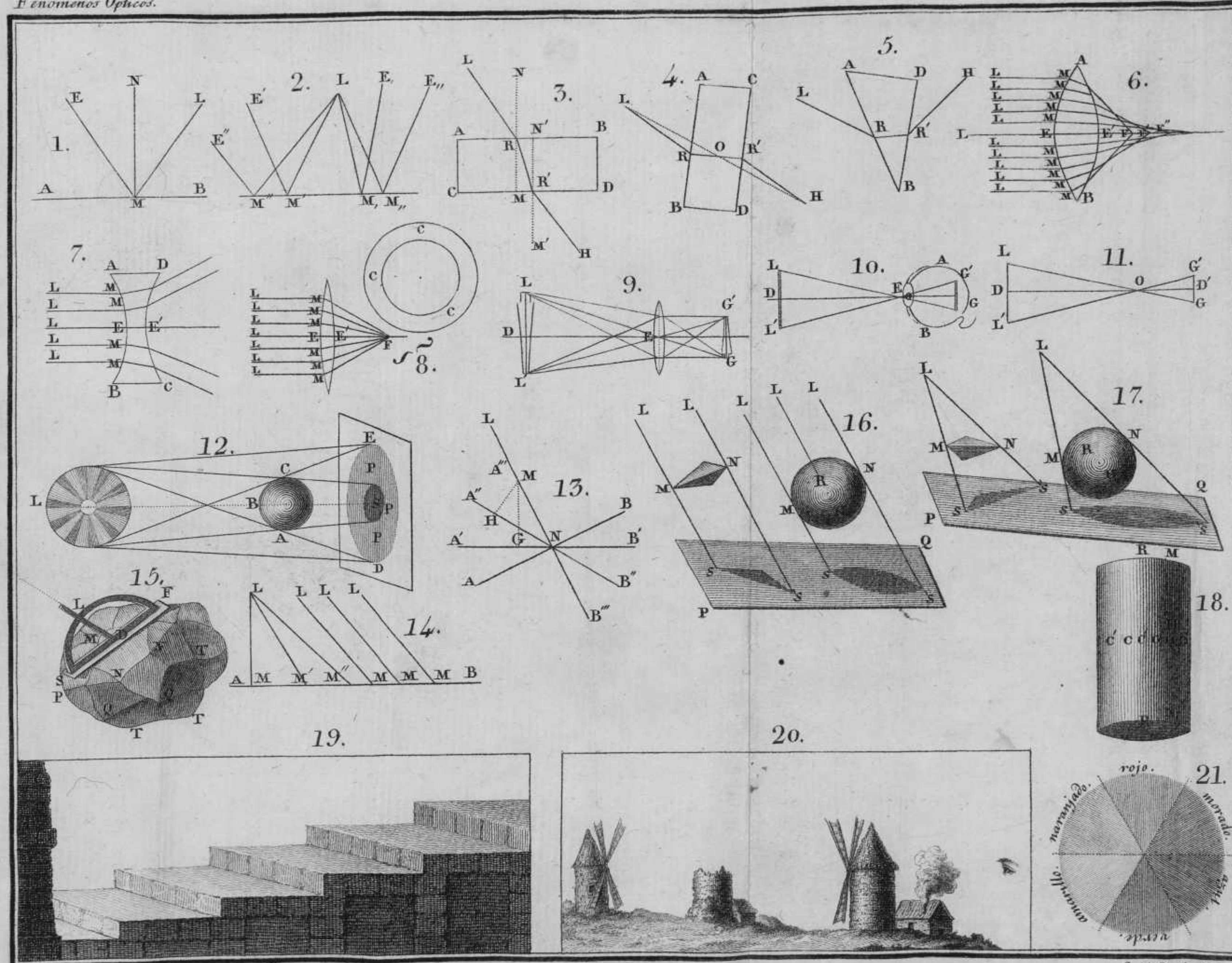
CAP. II.º El sombreado de los objetos que estan delineados en los cuadros.

PARTE III.ª

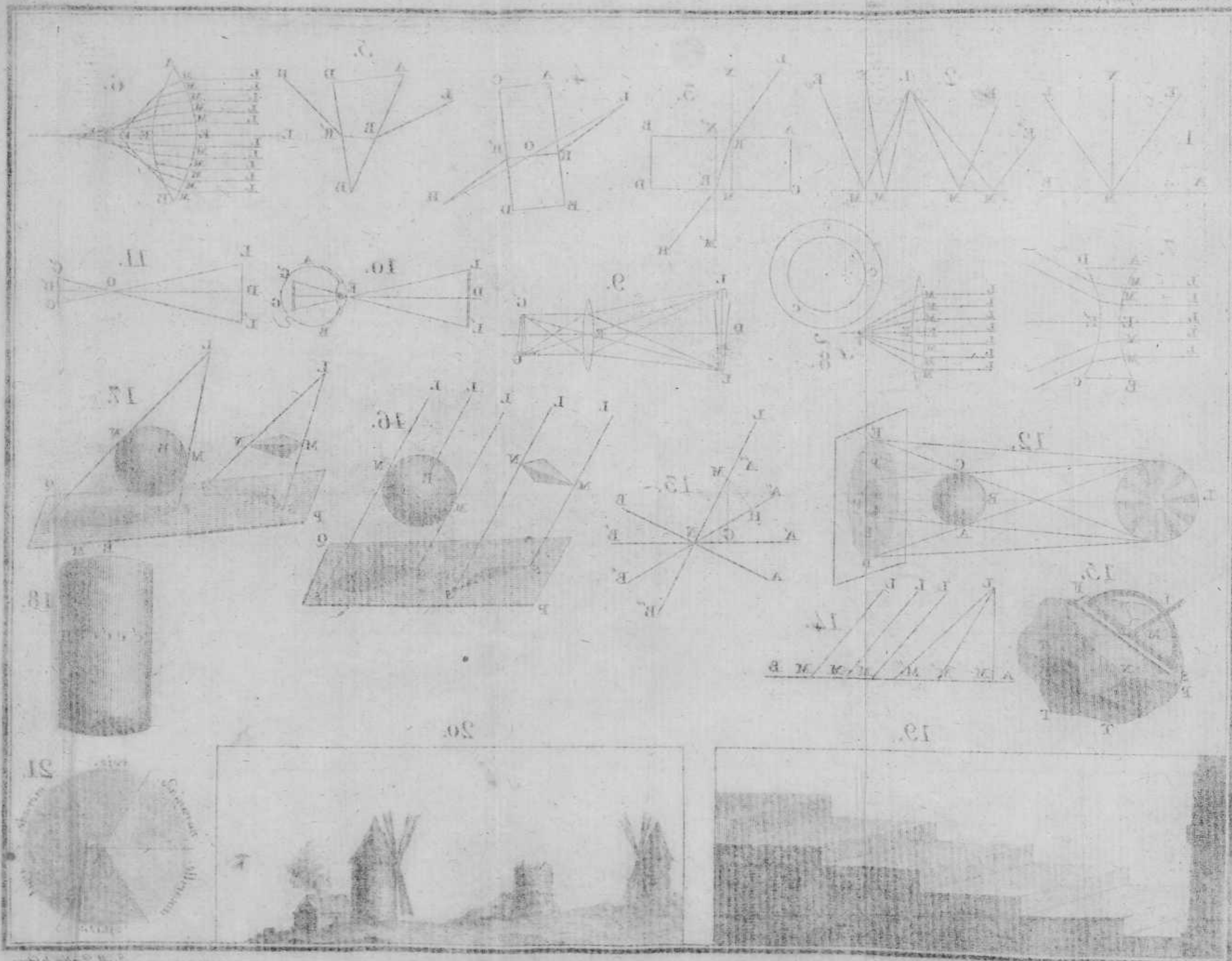
Perspectiva ó dibujo natural.

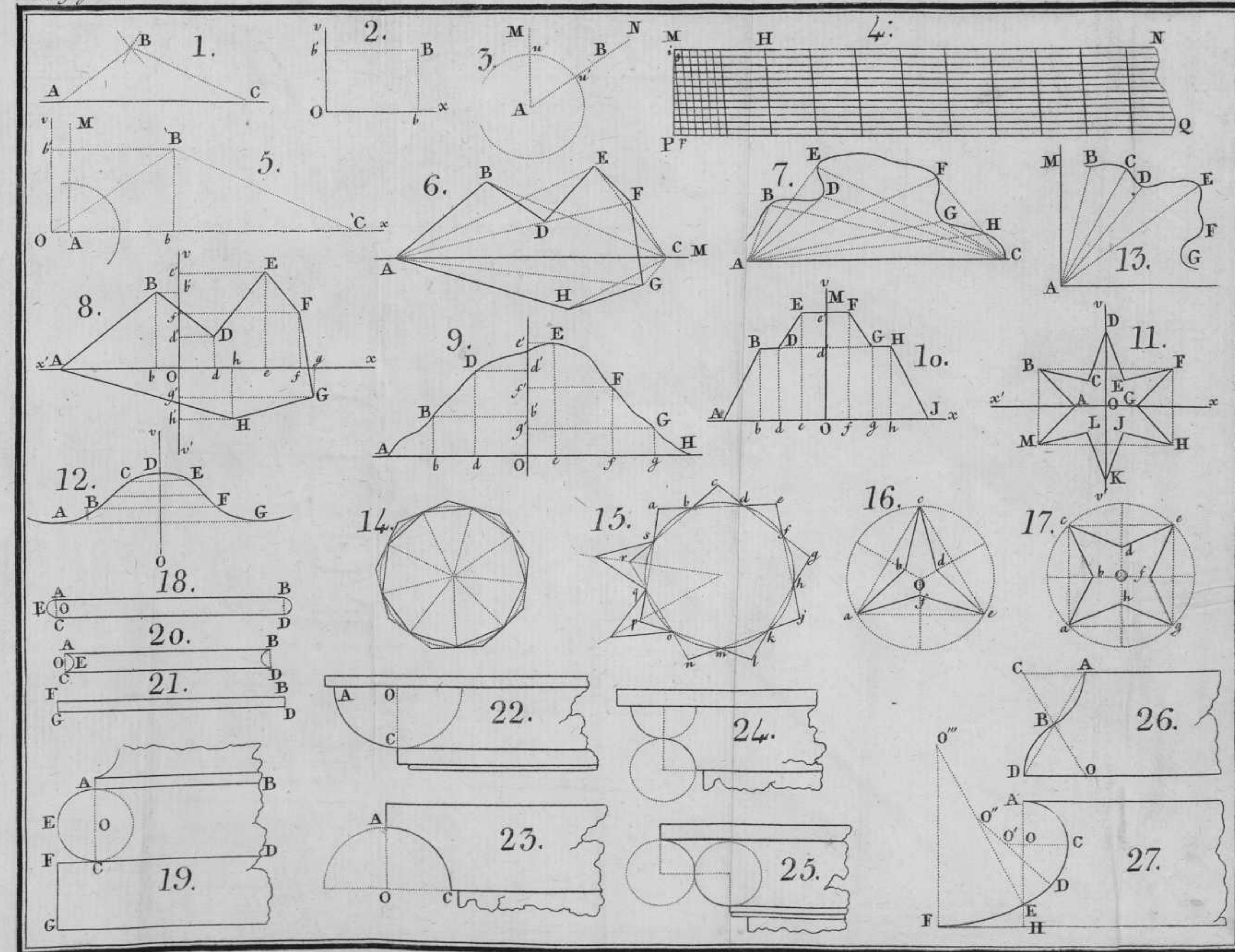
ERRATAS.

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Léase.*
2	20	precedentes	procedentes
5	32	tangente	tangentes
6	27	LEG	LOG
6	33	posesion	posicion
18	19	$\frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$
29	12	$B'b'$	$B\,b'$
30	28	Od, Oe	Od', Oe'
30	29	e, d	e', d'
40	9	con	son
56	14	en	de
61	7	$h'o'$	$h\,o'$
68	7	js	ab
71	19	MNO	NMO
75	33	en	es
77	1	dichos	dichas
77	4	los	las
85	24	AH'	AH
97	28	rayo	radio
102	6	podemes	podemos
104	1	eB	es
127	5	OT	VT
138	7	$9\frac{5}{9}$	$9\frac{8}{9}$
139	29	$9\frac{5}{9}$	$9\frac{8}{9}$
148	29	$A'u$	$A'v$

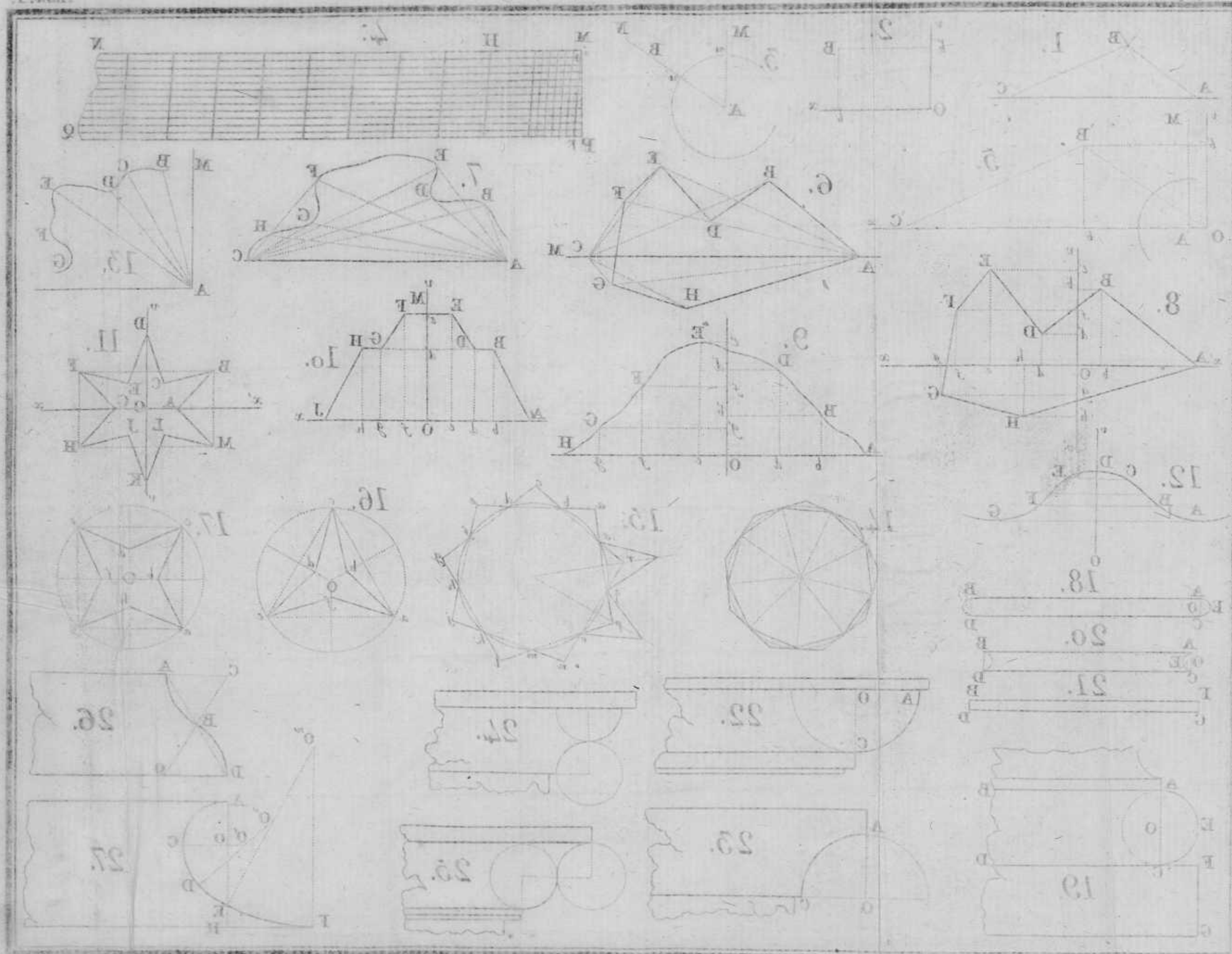


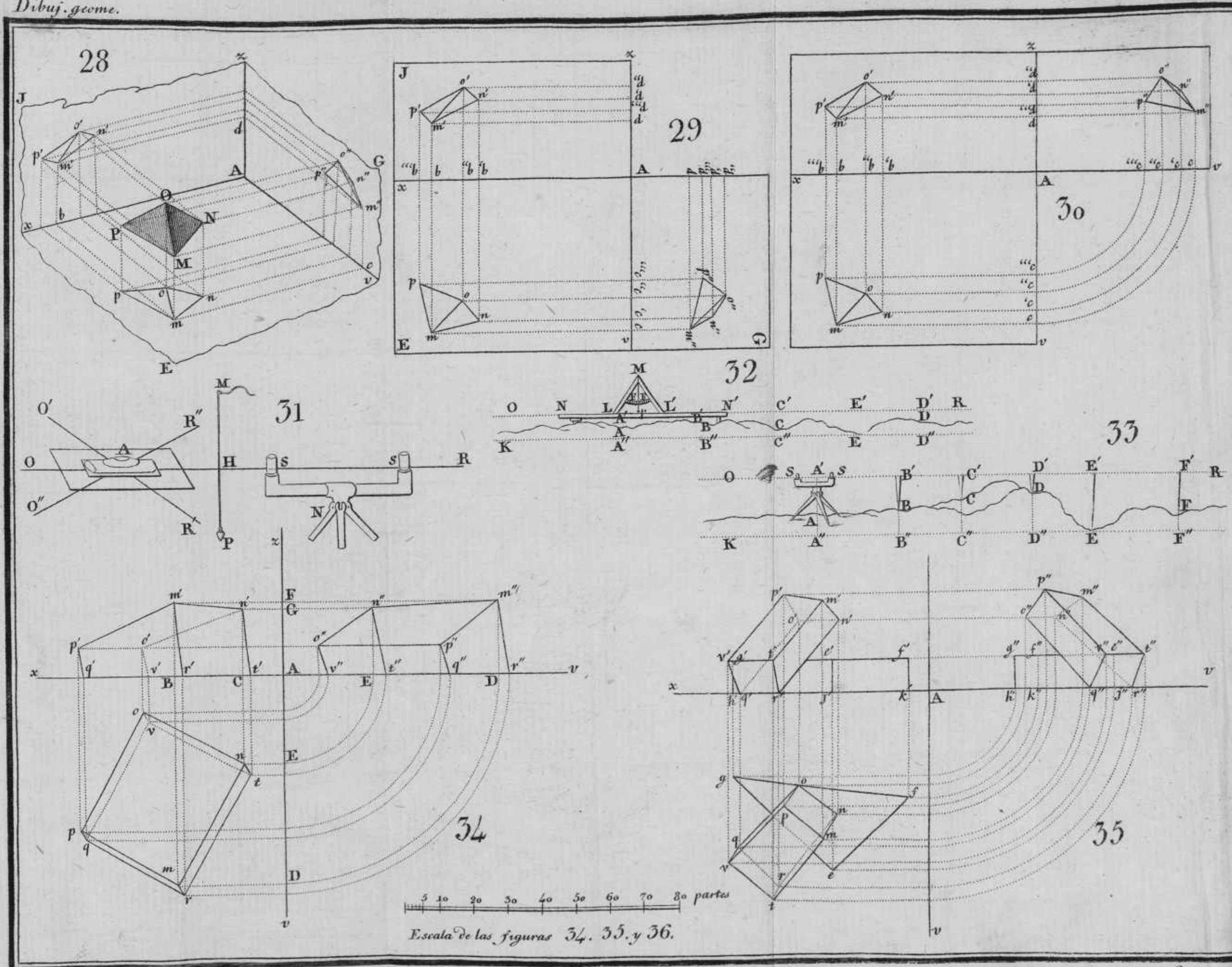
J. M. Bonifaz lo Grabó.



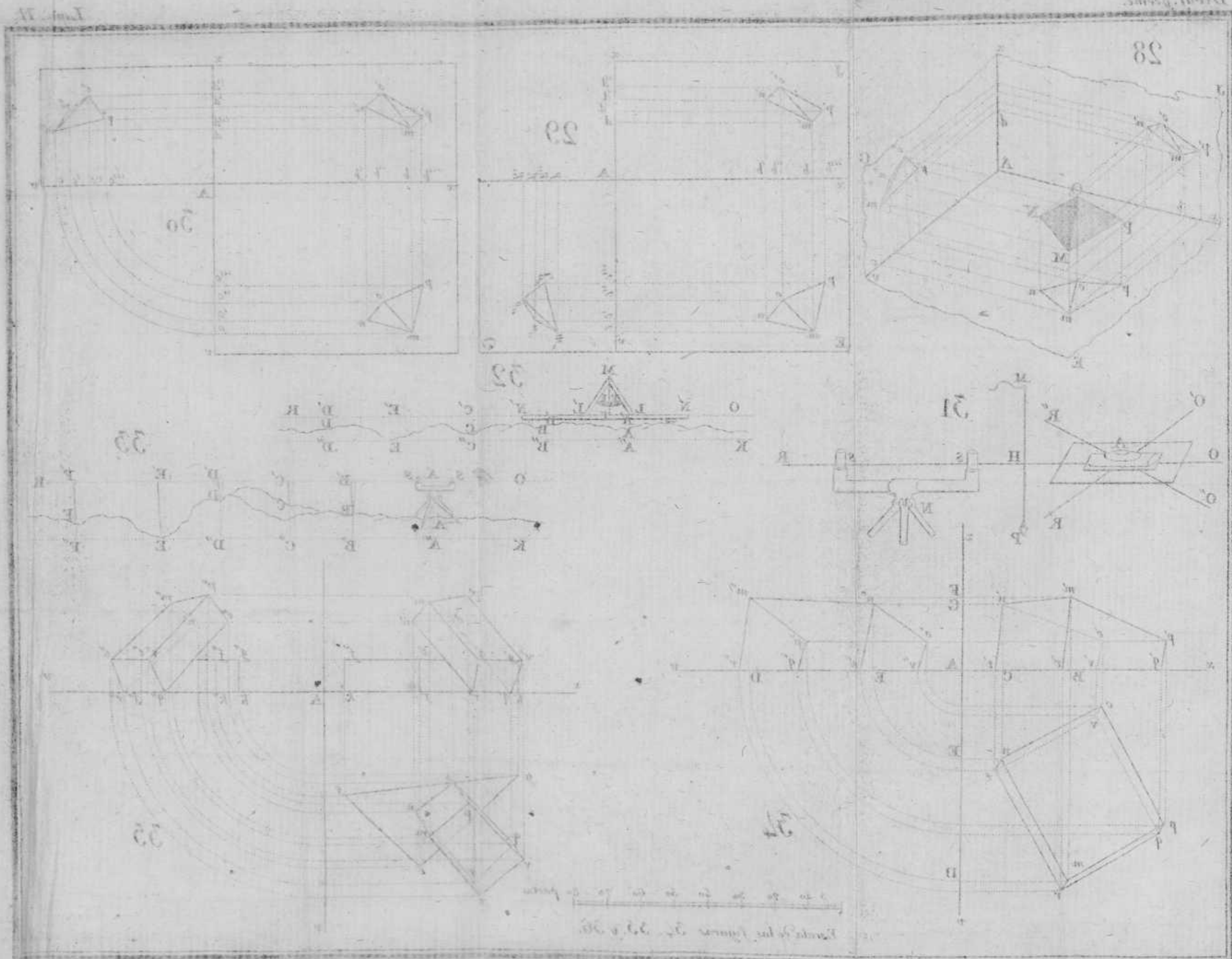


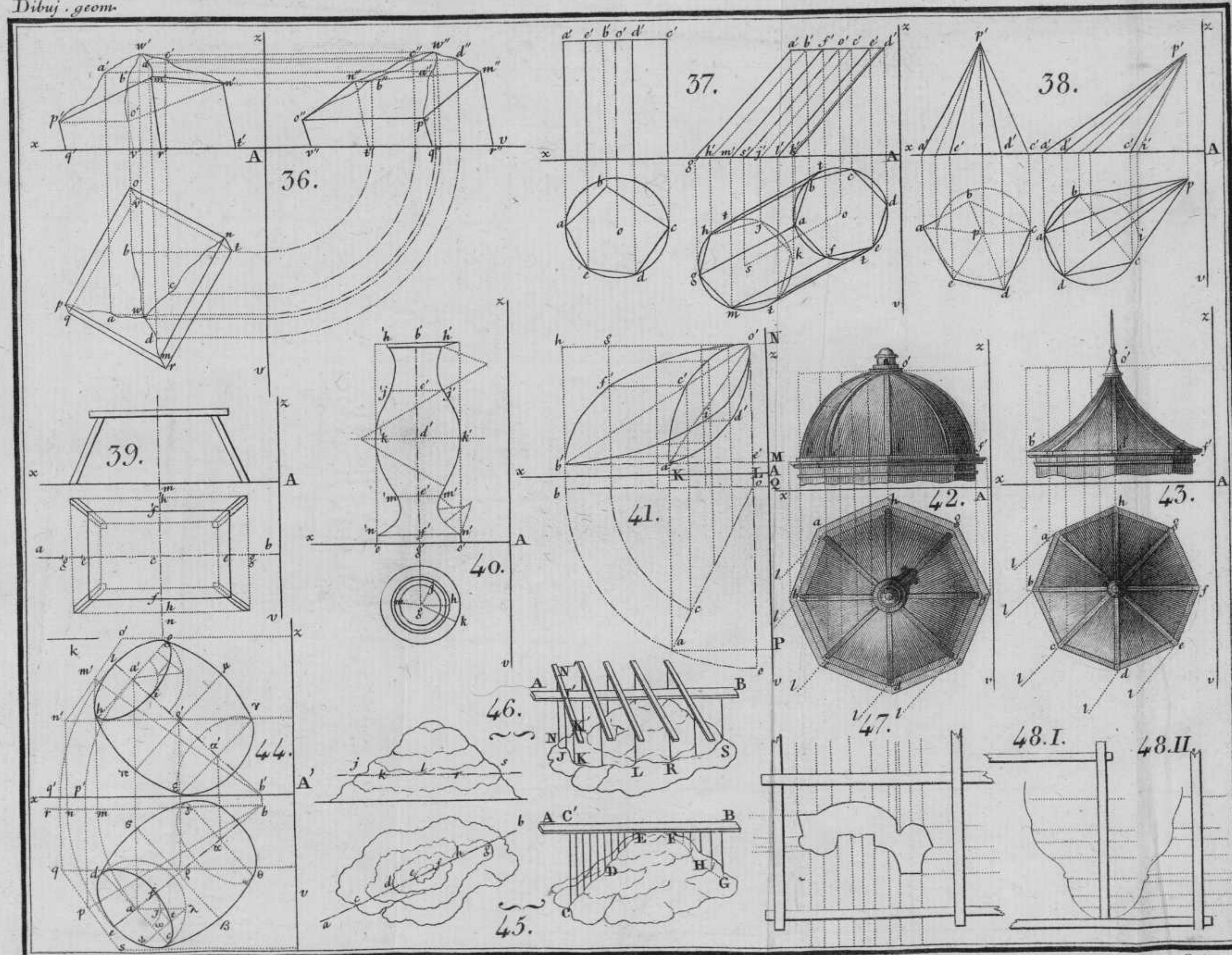
J. M. Donisan lo grave.



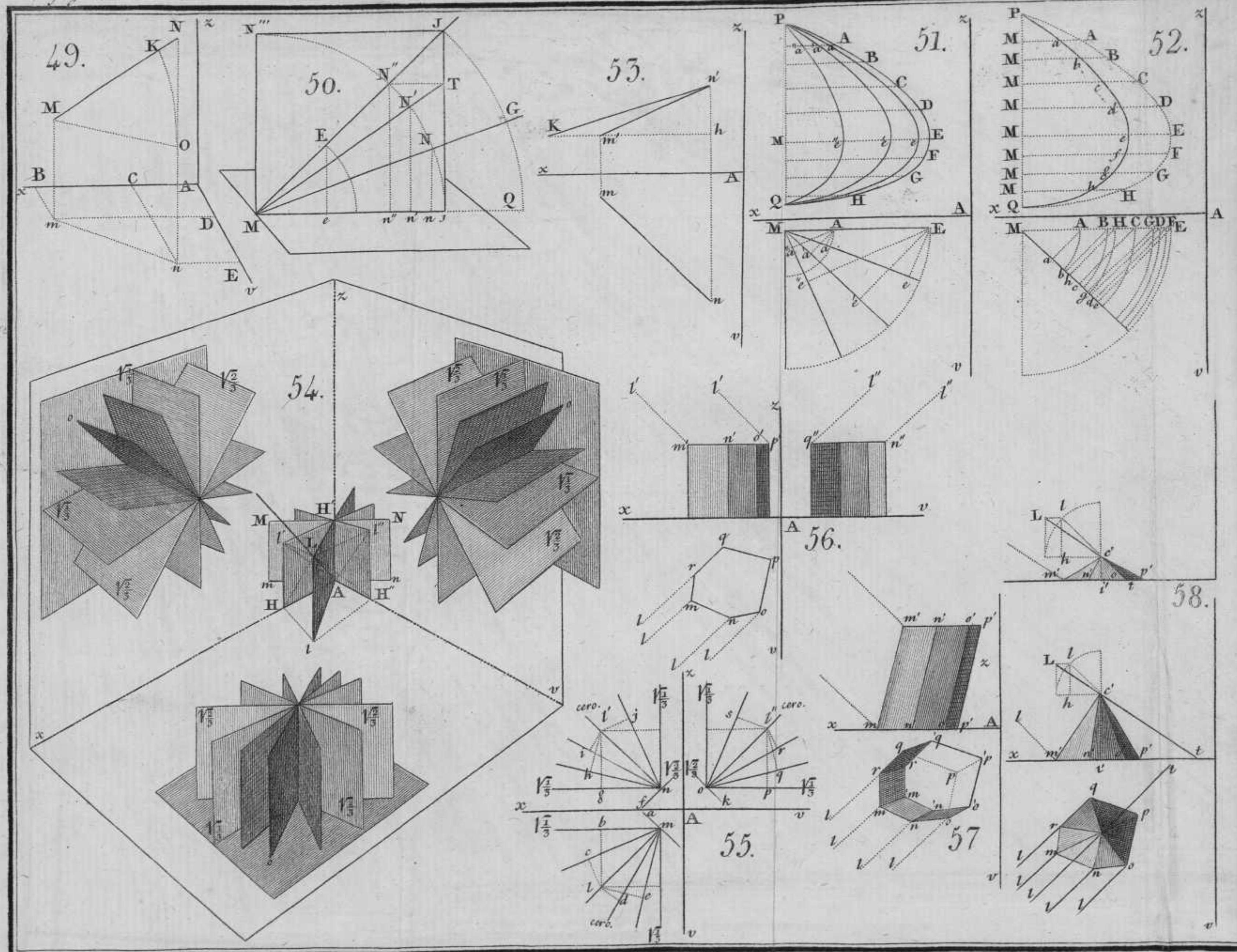

28
29
30
31
32
33
34
35
5 10 20 30 40 50 60 70 80 partes
Escala de las figuras 34. 35. y 36.

Bonifaz.

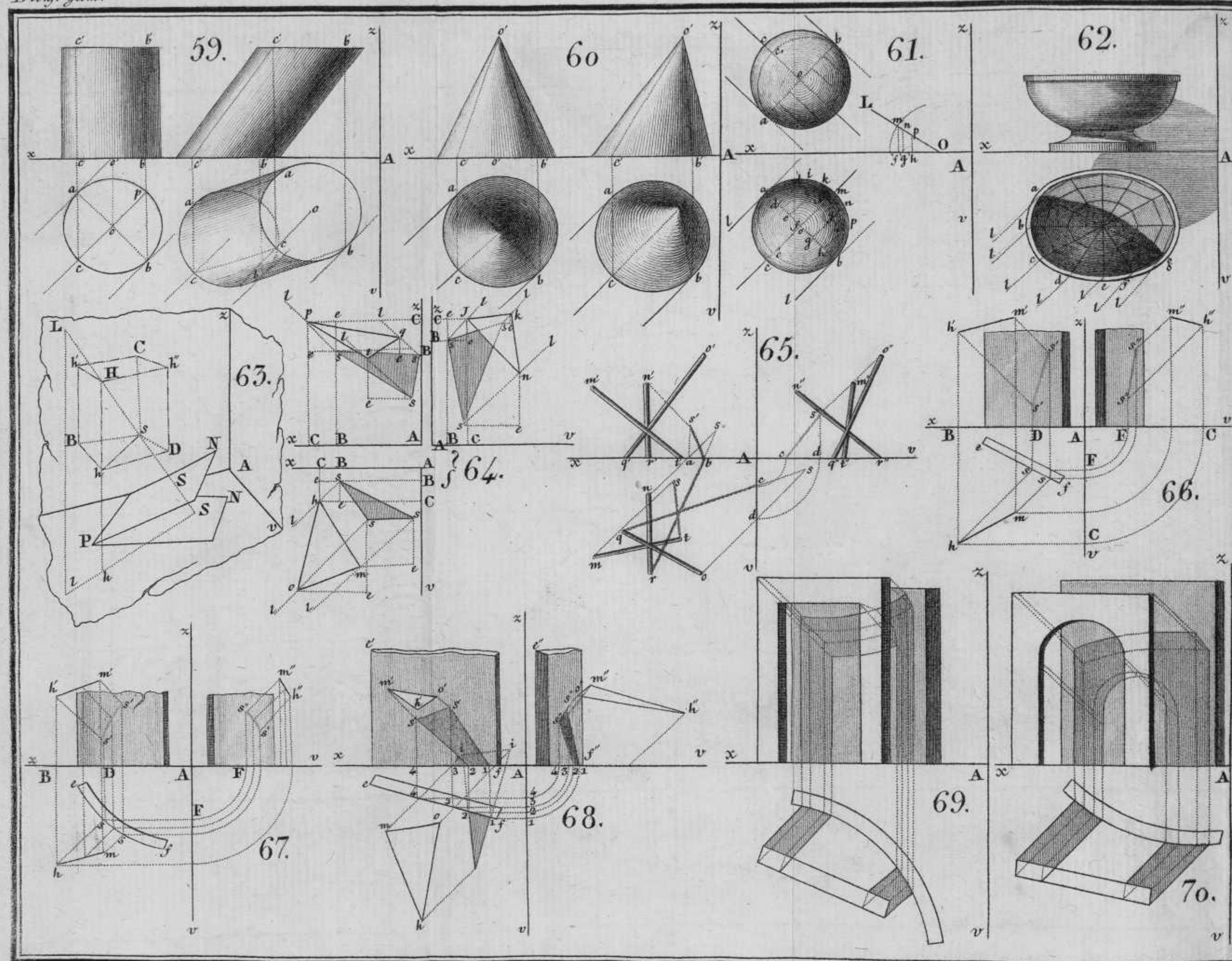




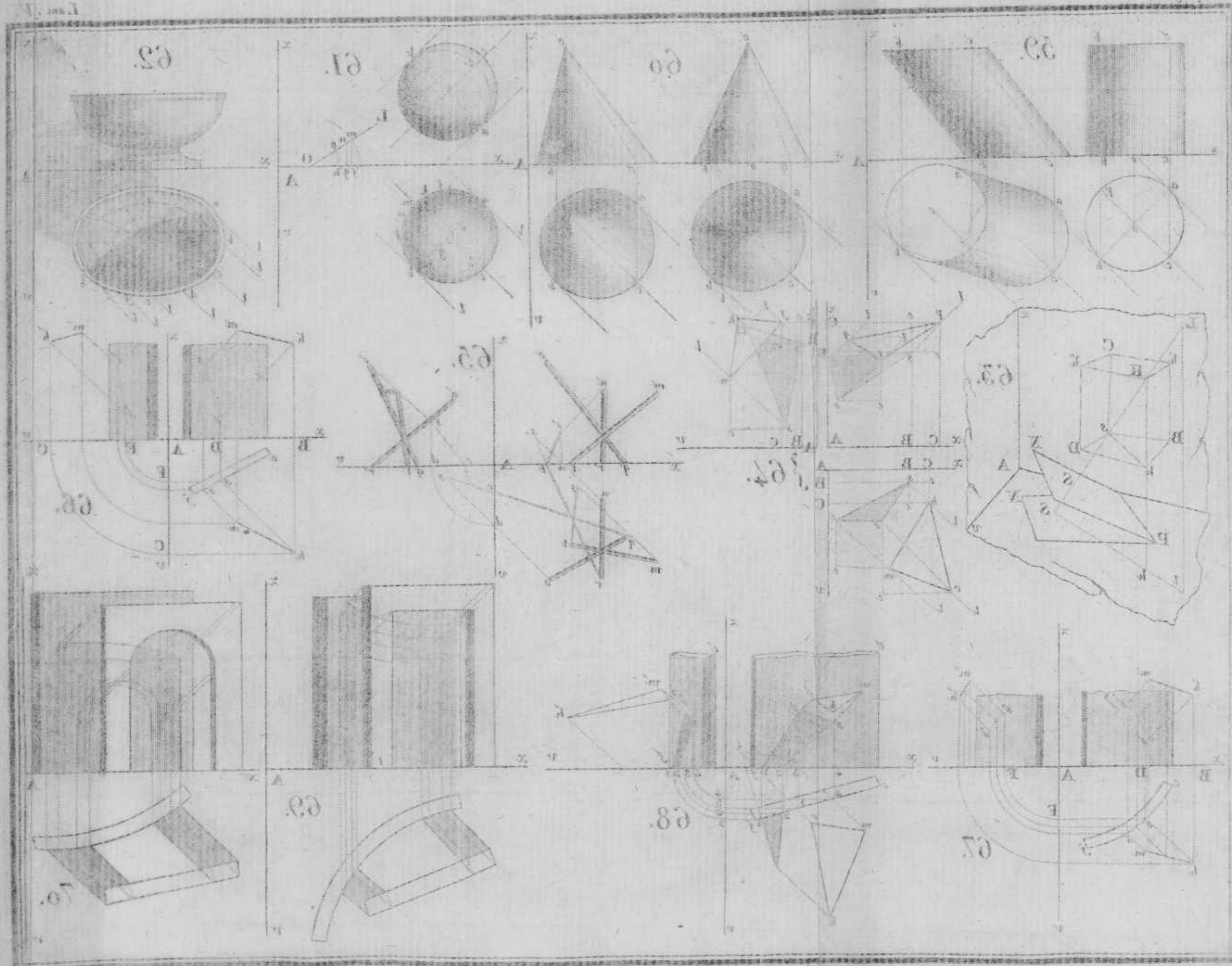
Bonifaz.

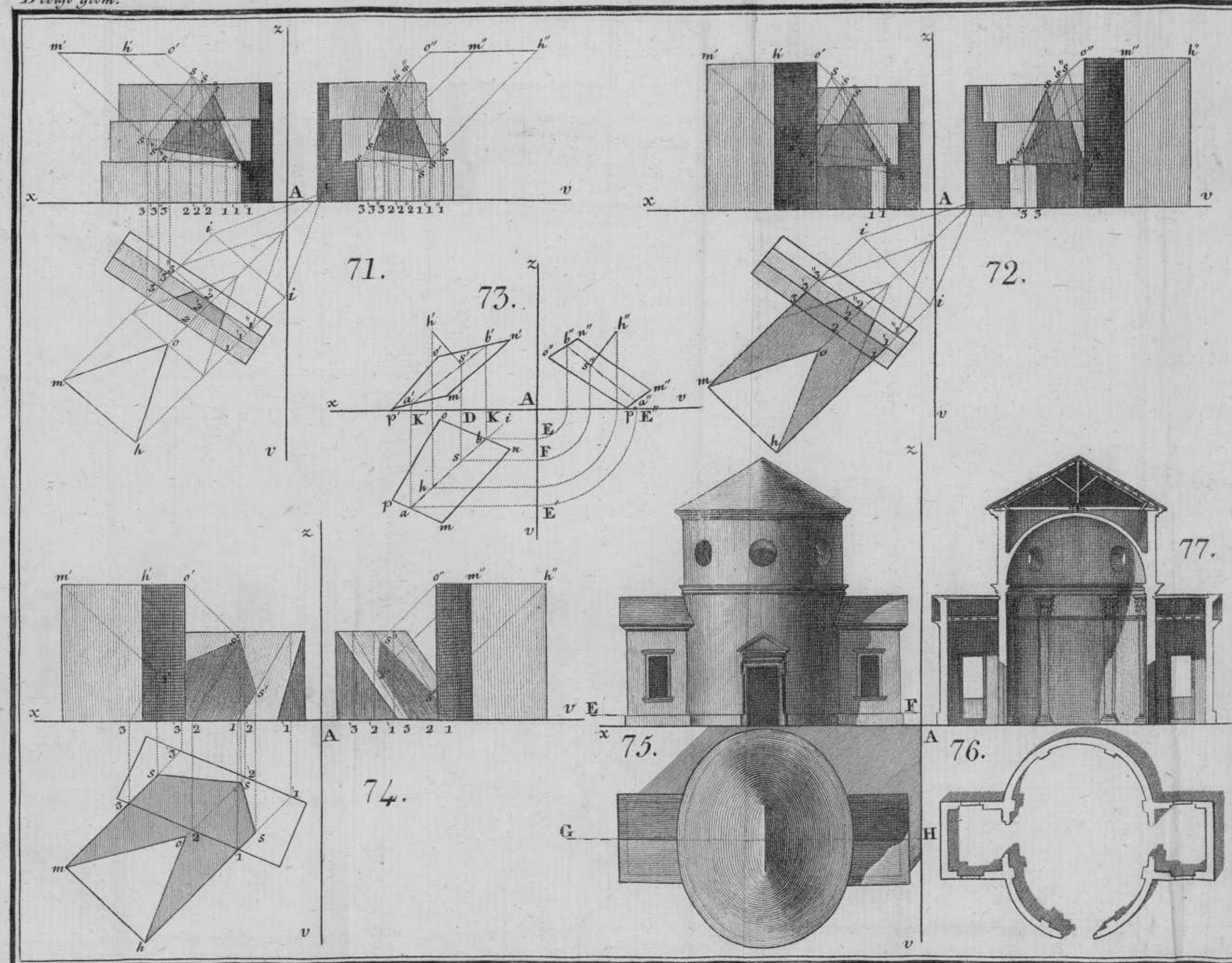


Bonifaz.

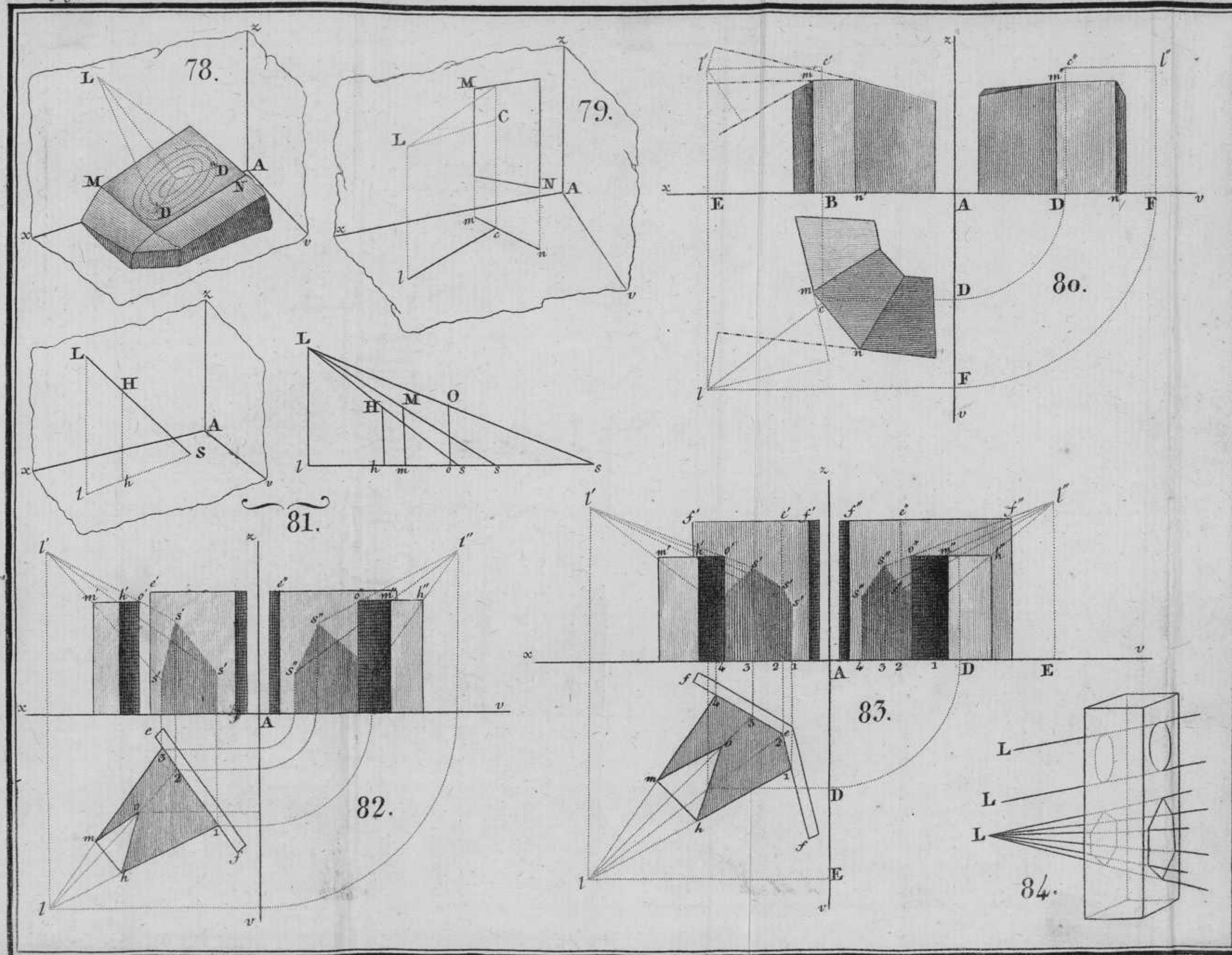


J. M. Bonfax lo Gravo.

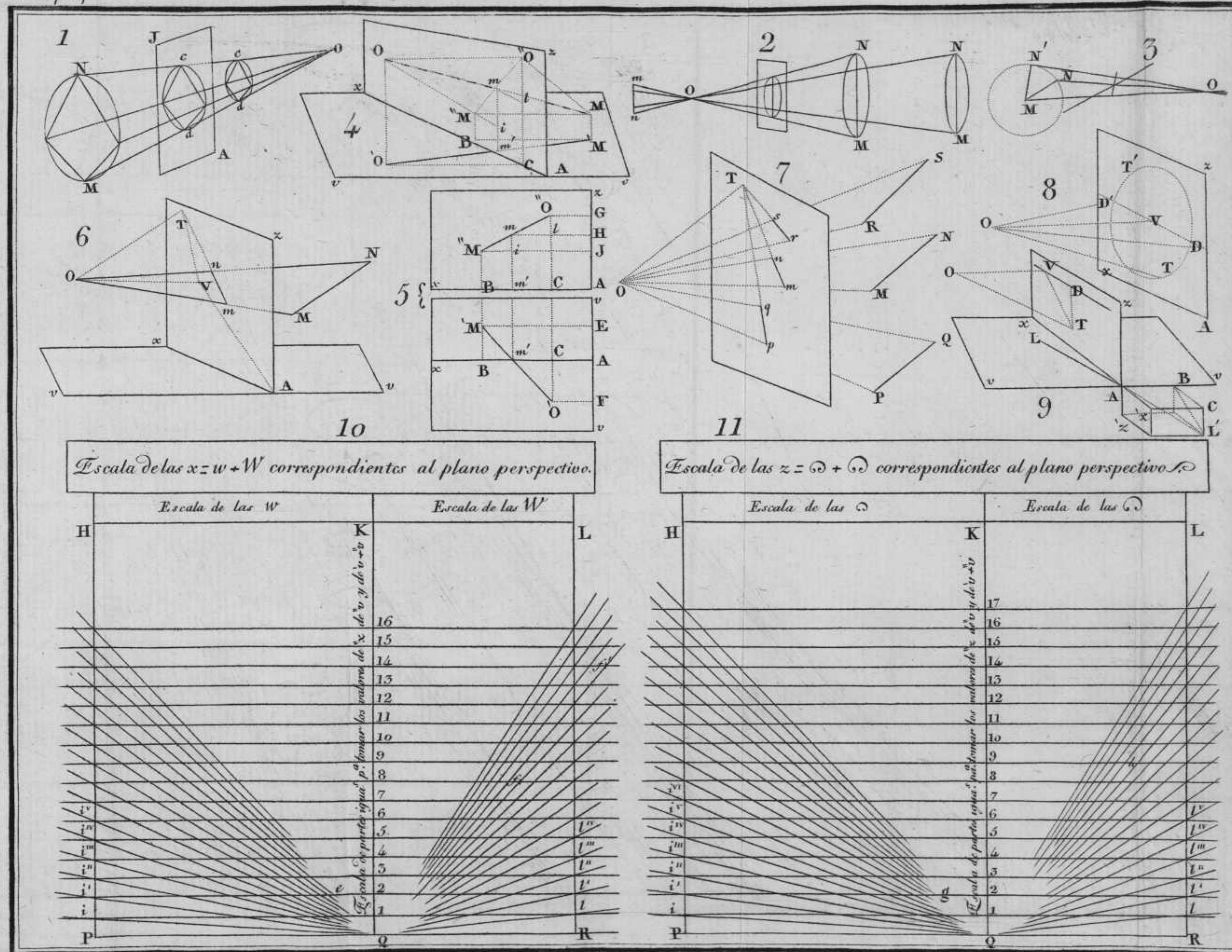




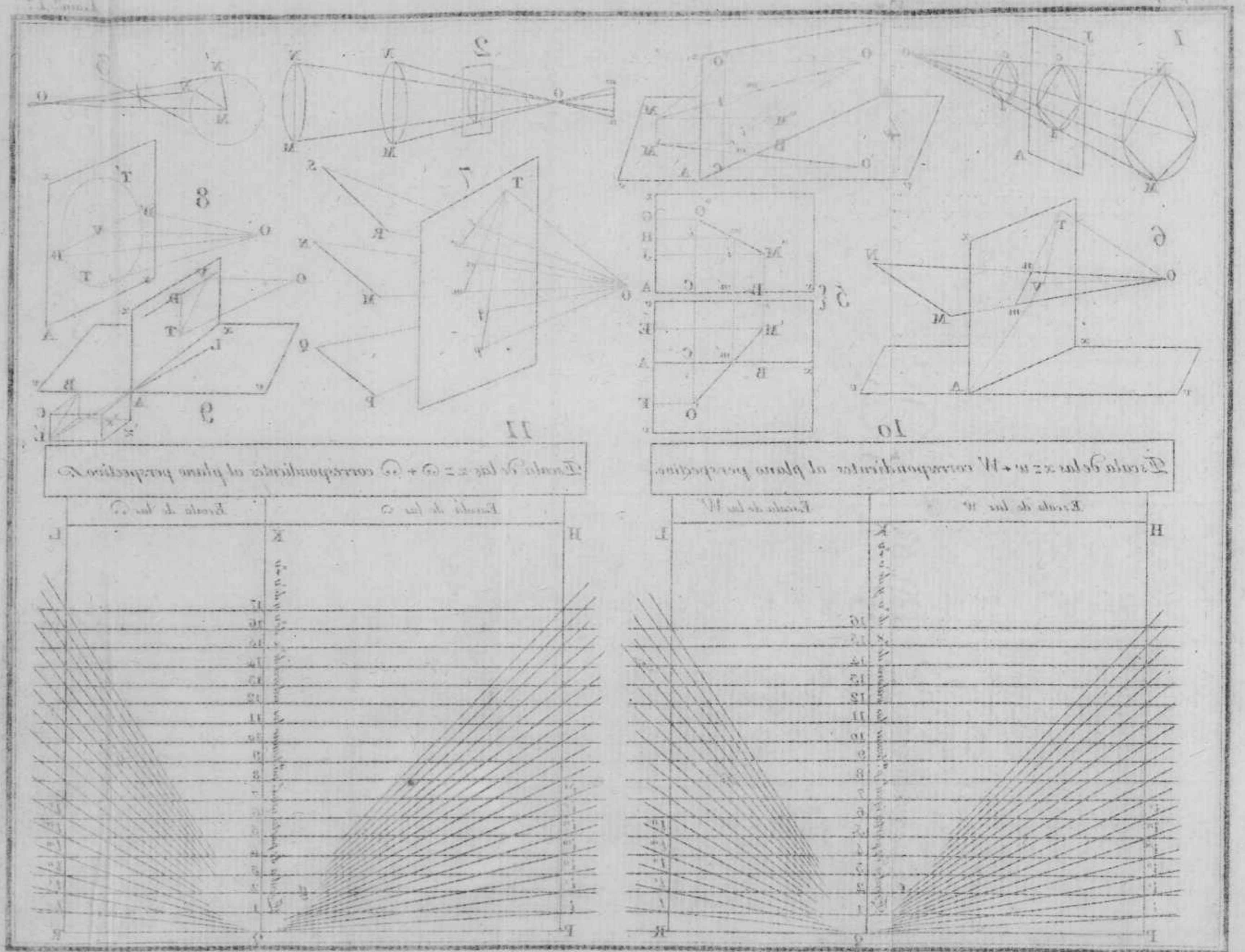
J. M. Bonifaz lo Gravo.

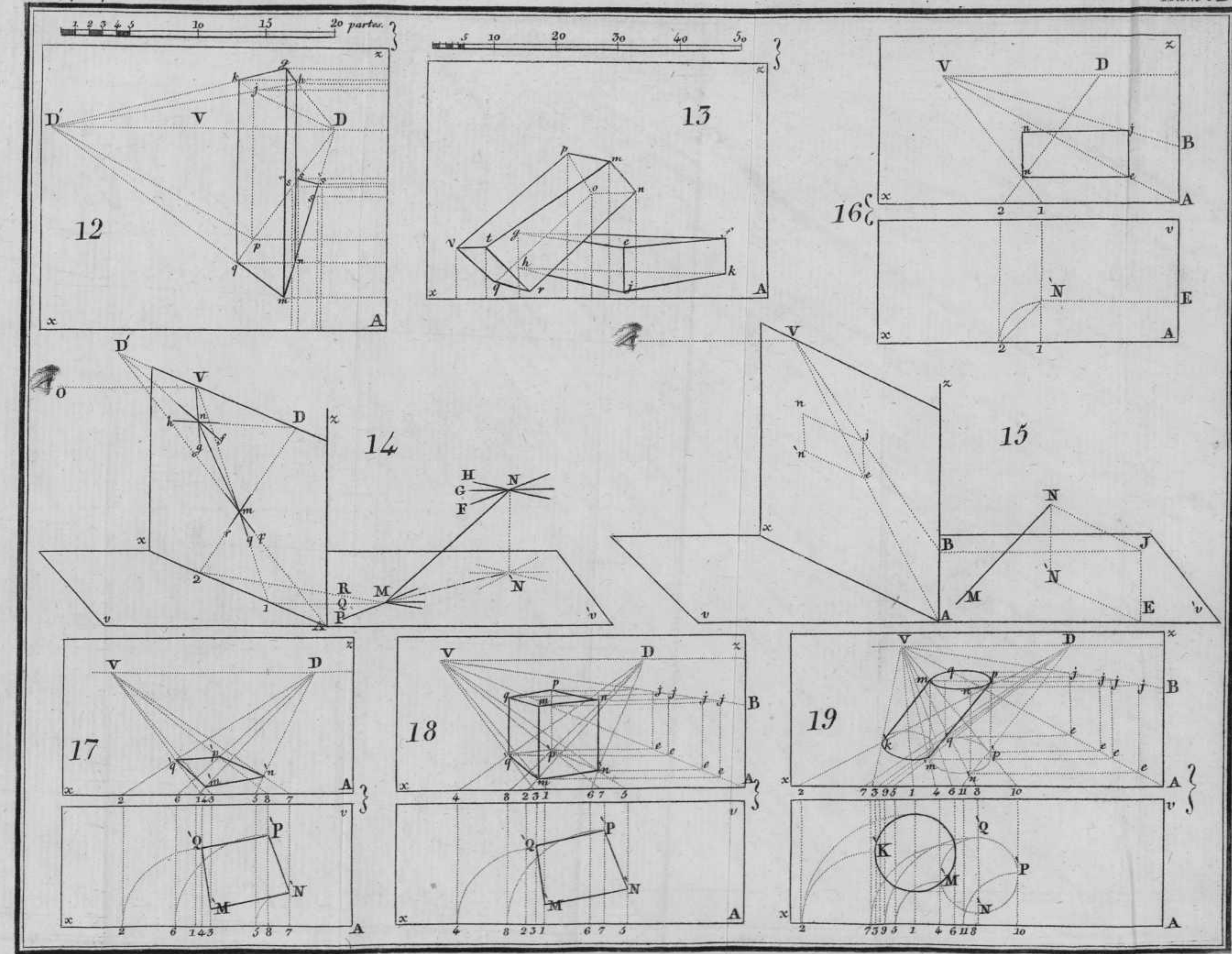


G. M. Bonifaz lo Grabó.

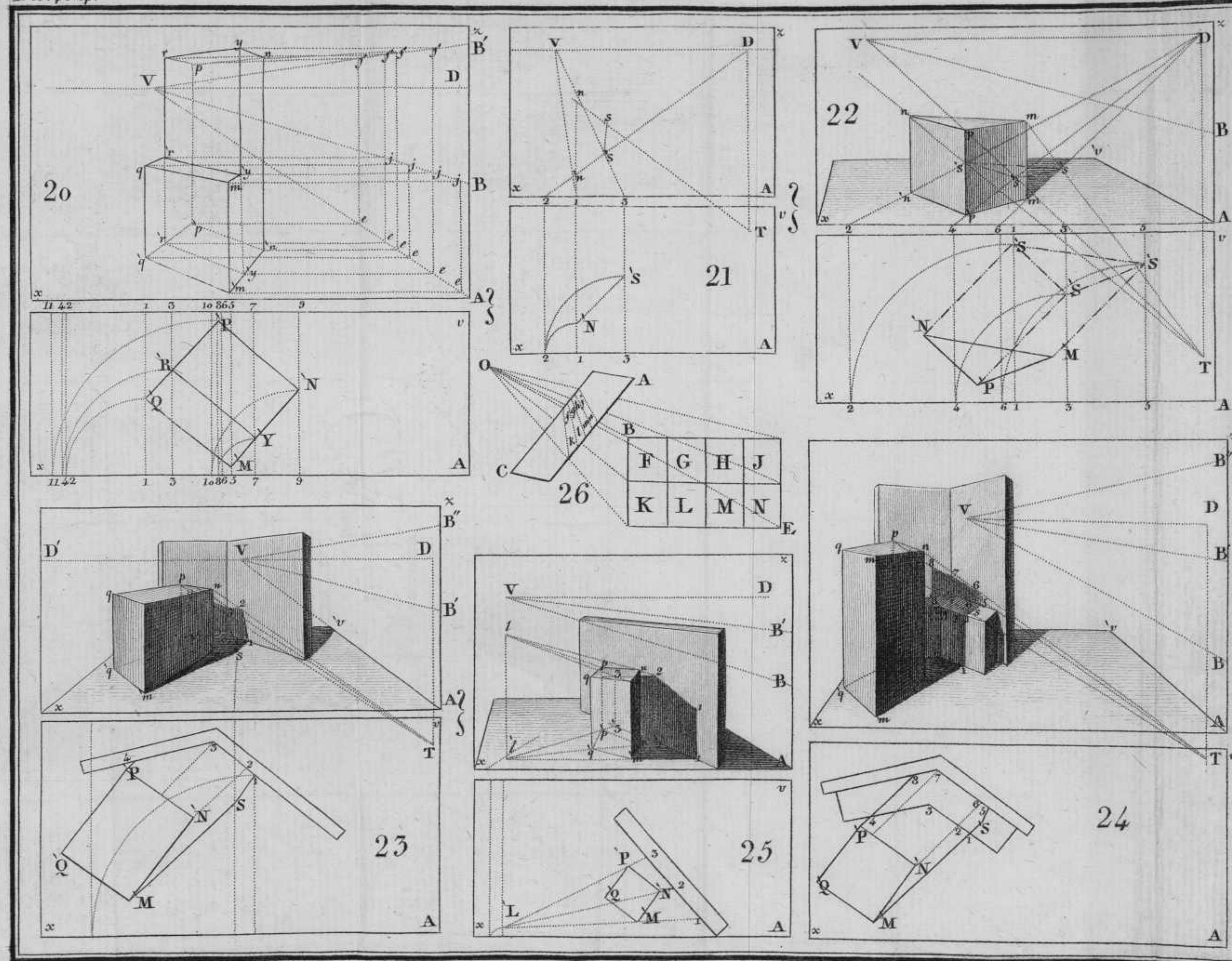


J. M. Bonifaz lo Grabó.

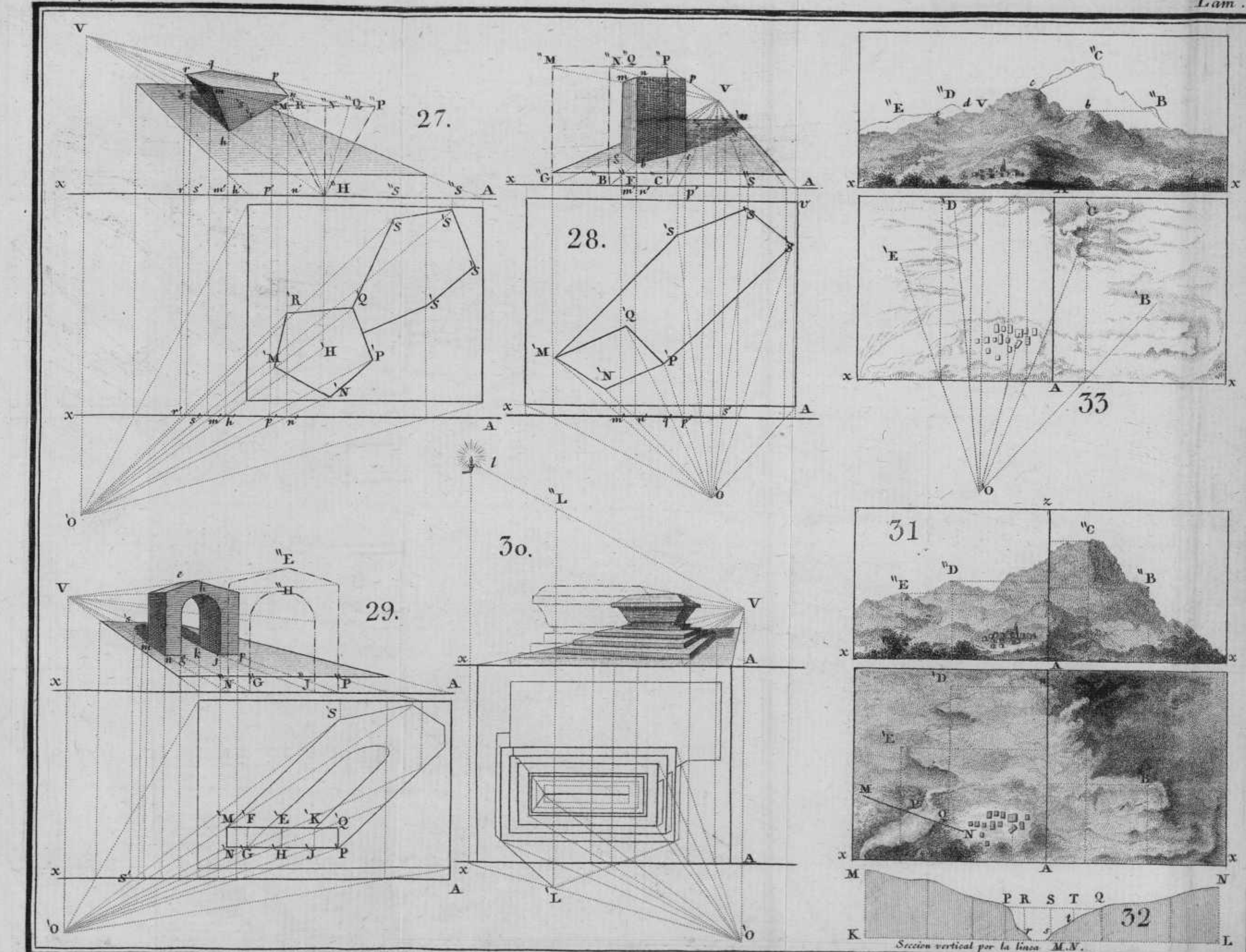




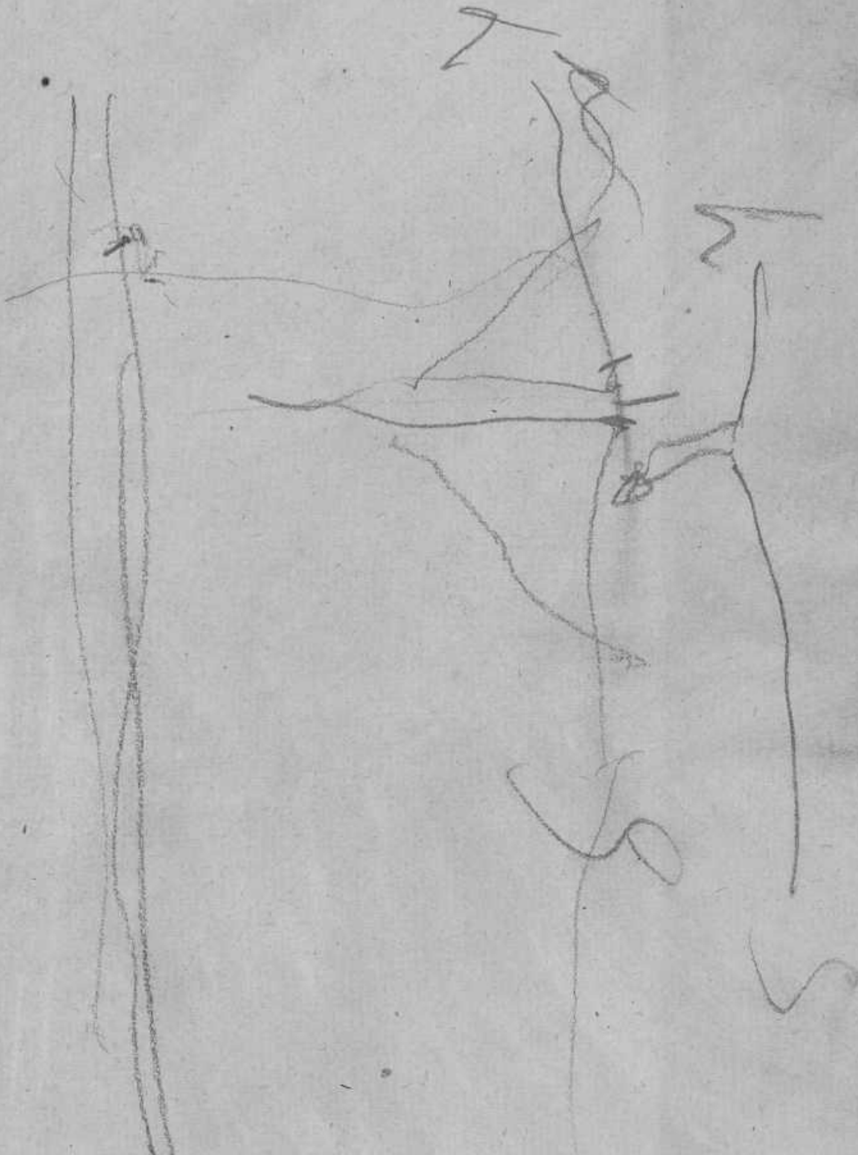
Bonifaz.



Bonifaz.



J.M. Bonifaz lo Grabó.



CIENCIA
Y ARTES
DEL DIBUJ