CURSO DE TOPOGRAFÍA

Y

ELEMENTOS DE GEODÉSIA

por

D. EUSEBIO SANZ,

COMANDANTE DE EJÉRCITO Y CAPITAN DE ARTILLERÍA.

SEGOVIA:

IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.

1872.

CURSO DE TOPOGRAFÍA

Y

ELEMENTOS DE GEODÉSIA

por

D. EUSEBIO SANZ,

COMANDANTE DE EJÉRCITO Y CAPITAN DE ARTILLERÍA.

TOMO 1.° —PLANIMETRÍA.

Declarada de texto para la Academia del arma.

SEGOVIA:
IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.

1872.

AL EXCMO. SR. D. ANTONIO ROS DE OLANO,

MARQUÉS DE GUAD-EL JELÚ, DIRECTOR Y CORONEL GENERAL DEL CUERPO DE ARTILLERÍA.

Sirva el nombre de V. E. tan ilustre en las armas como en las ciencias y las letras de apoyo al mio oscuro, y su reconocida competencia preste á la obra el valor que á pesar de mis buenos deseos no he podido darla

Si grande es mi agradecimiento al tener la honra de dedicarle tan insignificante trabajo, no es menor mi satisfaccion al dar esta pequeña prueba de la respetuosa consideracion hácia V. E. de su subordinado

EL AUTOR.

CONTANDO *solo con los elementos que mi buena voluntad me proporciona, y procurando suplir con ellos los que de capacidad y saber me faltan, hé escrito este libro.*

Al hacerlo, mi único objeto ha sido proporcionar á la juventud cuya enseñanza nos está confiada, un texto donde pudiese adquirir los conocimientos de Topografía y Geodésia exigidos por el programa vigente.

Los distinguidos Oficiales que me han precedido en la cátedra, y la junta de Profesores en distintas épocas, han convenido en que la excelente obra de Mr. Regnault, hasta ahora seguida, era poco apropiada para la enseñanza elemental y detallada de la asignatura, no habiéndose adoptado otra que la sustituyese, por no reconocer en las que existen á pesar del gran mérito de algunas, las condiciones de extension y método requeridas por los conocimientos adquiridos por nuestros alumnos.

El inmejorable programa de preguntas, redactado por el distinguido Capitan del cuerpo D. Julio Fuentes, ha facilitado y guiado mi trabajo.

En él condensó dicho Oficial con un órden perfecto resultado de su clara inteligencia y grandes conocimientos, las preguntas de todos los necesarios para la entera comprension de tan importante ciencia; que los Profesores tan entendidos como el Sr. Fuentes, dejan en pos de sí una *brillante estela, que facilita el camino del estudio á los que de ser sus sucesores se honran.*

Faltaría al mas sagrado de los deberes, sinó hiciese público en este lugar, el auxilio que generosamente me ha prestado el ilustrado y modesto cuanto estudioso Capitan Don Joaquin de Cabanyes, mi inmediato antecesor en el desempeño de la asignatura. Reciba pues, el desinteresado compañero y querido amigo, la sincera expresion de mi agradecimiento.

Desprovisto va mi trabajo de las galas del lenguage con que suelen adornarse algunas obras científicas. Convencido de que en las didácticas lo que debe preferirse es la concision y la claridad, he sacrificado gustoso á ellas la elegancia del estilo.

Recomiendo el pobre fruto de mi estudio á la consideracion de mis ilustrados compañeros, y si logra merecer su indulgente aprobacion, llegando á ser de alguna utilidad para los alumnos de nuestra Academia, queda colmada la ambicion del que sin pretension alguna, y guiado solo por el deseo de esceder en algo al cumplimiento del deber, ha emprendido un trabajo que si no llena los deseos de todos, será tal vez estímulo para los que con mejores circunstancias, puedan emprender otros análogos y mas perfectos.

Eusebio Sanz.

1.º de Abre del 88

TOPOGRAFÍA.

PRELIMINARES Y MÉTODOS DESCRIPTIVOS.

LECCION 1.ª

DEFINICIONES.—ESCALAS.—COPIA Y REDUCCION DE PLANOS.

Llámase *Geodésia* á la ciencia que tiene por objeto la representacion sobre un plano de una extension de terreno de dimensiones considerables, y se llama *Topografía* á otra ciencia, simplificacion de aquella, cuyo objeto es la representacion de una extension menor.

Dá lugar á la diferencia que existe entre los procedimientos geodésicos y los topográficos la forma de la tierra.

Entre otros muchos indicios, los viajes de circunnavegacion y los eclipses de luna, dan á conocer que dicha forma es próximamente la esférica. En efecto, si un buque sale de un puerto y procura mantener fijo su primer rumbo, ó vuelve á él despues de vencer los obstáculos que se oponen á su marcha en la direccion primitiva, llega al cabo de cierto tiempo al puerto de donde salió.

En las épocas en que la luna está en su plenitud, si por efecto de su natural movimiento entra en la sombra proyectada por la tierra, se vé disminuir paulatinamente la parte iluminada hasta reducirse á un filete curvo y de extrema pequeñez que á su vez desaparece, para asomar al poco tiempo en direccion opuesta, é ir agrandándose en seguida hasta aparecer en el completo de su primitiva forma. Tanto en la aparicion como en la desaparicion de la parte iluminada, se observa que la línea límite es sensiblemente circular, y como esta es la interseccion de la superficie del cono de sombra proyectada por la tierra, sobre el círculo aparente de la luna, se deduce que la seccion principal de este cono es circular, así como tambien lo será la línea de contacto de la tierra con el interior de la misma superficie cónica. Como el fenómeno tiene lugar en las mismas condiciones, cualquiera que sea la posicion de nuestro planeta, considerada en el movimiento de rotacion alrededor de su eje, el conjunto de estas secciones circulares no puede tener lugar sinó en un cuerpo esférico.

Pero esta esfericidad no es perfecta. A consecuencia de la antigua fluidez de la tierra, las moléculas de materia tendieron á alejarse algo del eje en virtud de la fuerza centrífuga producida por la rotacion, de lo que resultó un achatamiento hácia los polos, que se conservó en el paso al estado sólido. En la ciencia que nos va á ocupar, este achatamiento no produce errores sensibles, por lo cúal se considera el globo en que habitamos completa y perfectamente esférico.

Esta forma hace que al tratar de representar en un plano una figura semejante á la de una porcion de terreno cualquiera, se tropieze con el inconveniente de no poder desarrollar la superficie esférica sobre la que este terreno está situado, lo cual implica un error en la representacion.

Si la extension es pequeña, entonces sin que aquel sea notable, se puede considerar el terreno situado sobre el plano tangente á la esfera terrestre en el punto céntrico; pero si la extension fuese aumentando, se cometería con dicha consideracion un error creciente tambien, y que deformaria la representacion; sobre todo en las partes mas lejanas del punto por donde el plano tangente se hubiese trazado.

Basta para comprender esto, considerar la fig. 1.ª (lámina 1.ª) en donde se vé que si bien la distancia AB contada sobre el globo terrestre cuyo centro es O, está casi representada en su verdadera magnitud AB′ sobre el plano tangente en A, existe diferencia notable entre la longitud CD y su representacion C′D′.

De aquí la necesidad de una distincion entre la de una extension grande que no se pueda considerar contenida en el elemento de plano tangente, y la de un terreno que se pueda suponer confundido con dicho

::

elemento. La primera entra en el dominio de la Geodésia; la segunda en el de la Topografía.

Toma el nombre de *levantamiento* en uno y otro caso, el conjunto de operaciones que hay que efectuar sobre el terreno para conocer detalladamente sus circunstancias y poder trasladarlas al papel.

A la Geodésia, cuya generalidad de procedimientos es muy grande, le sirven de auxiliares todos los conocimientos matemáticos, en especial los de Trigonometría esférica, mientras que los de mas aplicacion en la Topografía son los de Geometría elemental y Trigonometría rectilínea.

La representacion ya efectuada en el papel de una corta extension de terreno, toma el nombre de *plano topográfico*, y la de una mas considerable el de *mapa ó carta*.

En cualquiera de los casos, para determinar la verdadera posicion de un punto del terreno, y trasladarlo al papel, es necesario referirlo á un sistema coordenado convenientemente dispuesto, en que dos de los ejes estén en el plano en donde se considere el terreno situado, y el otro en direccion perpendicular á él.

Dá esto orígen en los levantamientos topográficos á una division de las operaciones en dos partes principales.

Llámase *planimetría* á la que tiene por objeto la determinacion de las dos coordenadas en el plano, de cada uno de los puntos, ó lo que es lo mismo la posicion en dicho plano de ellos en proyeccion horizontal; y se llama *nivelacion ó altimetría* á la parte que tiene por objeto la determinacion de la tercera coordenada, ó de la altura á que los puntos se encuentran sobre el plano del levantamiento.

Desde el momento en que se ha establecido distincion entre los procedimientos Geodésicos y los Topográficos, es necesario conocer los límites que separan unos de otros, ó lo que es lo mismo, la magnitud que debe tener el terreno para que se le pueda considerar, sin error importante, confundido con el plano tangente en su punto céntrico.

Consideremos para ello la fig. 2 (lam. 1.ª). Sea O el centro del globo y C el punto de tangencia. La diferencia entre AC y BD, ó lo que es lo mismo, la que existe entre el seno y la tangente del arco BC, es mayor que la que existe entre este y aquella; de modo que si la primera diferencia es despreciable, la segunda lo será con mayor razon.

Supóngase que el arco BCB′ es de 1°, siendo por consiguiente de 30′ el BC. Se tendrá,

Log. tang. $0° 30' =$ Log. tang. $BC = 7{,}8950988$
Log. sen. $0° 30' =$ Log. sen. $BC = 7{,}8950854$
Log. $0{,}00785414 =$ Log. tang. $BC = 7{,}8950988$
Log. $0{,}00785390 =$ Log. sen. $BC = 7{,}8950854$

tang. $BC = 0{,}00785414$
sen. $BC = 0{,}00785390$

Diferencia......... $0{,}000000{,}24$ del rádio de las tablas tomado como unidad.

Para reducirla al rádio del globo que es de seis millones de metros próximamente, multiplicaremos por

6000000^m y se obtendrá $1^m,44$, de manera que la diferencia que exista entre A C y B C será menor que esta cantidad, y la que exista entre A A′ y B C B′ menor que $2^m,88$. Siendo la circunferencia de la tierra de 40000000^m, la longitud de 1° será $\frac{40000000^m}{360} = 111111^m,11$ es decir mas de 100000^m, ó lo que es lo mismo, mas de 25 leguas de 4000^m. Deducimos de aquí que en un levantamiento de una extension de 25 leguas el error que se cometerá será menor que $2^m,88$, mucho mas insignificante que el en que con los instrumentos se tendria que incurrir en la medicion de una extension tan considerable, y que se repartiria en toda ella.

Los levantamientos de un terreno de 12 leguas y media = 50 kilóm.s de longitud, darán lugar á un error mucho menor, y en consecuencia una superficie de menos de 12 leguas y media de lado podrá ser considerada como plana y obtenerse por los medios topográficos.

Se ha indicado ya que un plano topográfico es la representacion en el papel de una figura semejante á la del terreno, de modo, que fijándonos en un polígono de este, tenemos que trasladarlo con sus ángulos iguales y sus líneas homólogas proporcionales. Llámase *escala*, la relacion que existe entre una línea del papel y su correspondiente del terreno. Dedúcese de esta definicion, que un plano topográfico en la escala $\frac{1}{1000}$ será una representacion en que cada metro del papel equivale á 1000 del terreno.

Con el objeto de establecer una relacion analítica que ligue las dimensiones de este con las de aquel y la escala, fijémonos en la proporcionalidad de las líneas homólogas, y representemos por L una longitud en el terreno, y por l su correspondiente en el papel, y represéntese por M la longitud del primero equivalente á 1 metro en el segundo, y se tendrá que

(1) $\frac{l}{L} = \frac{1}{M}$; siendo $\frac{1}{M}$ la escala analítica.

Existen en esta igualdad tres cantidades de las cuales una se puede determinar conociendo las otras dos, lo que origina las cuestiones siguientes: 1.ª Dada una longitud en el terreno y su equivalente en el papel, determinar la escala perdida de un plano. 2.ª Dada una longitud en el terreno, y la escala, hallar la longitud en el papel, y 3.ª Dada la de este y la escala, determinar la del terreno.

Por medio de la misma igualdad (1) se pueden resolver otras cuestiones de primera importancia, como son:

I. Supuesto que la menor dimension que se puede trazar con limpieza en el papel es de $0^m,0005$, ver el menor detalle del terreno que se tiene que representar, $0^m,05$ por ejemplo, y deducir en consecuencia la escala menor que podrá emplearse

$$\frac{0,0005}{0,05} = \frac{1}{M} = \frac{1}{100}.$$

II. Siendo conocida la escala $\left(\frac{1}{100}\right)$ y sabiendo que en el papel no es sensible una equivocacion de $0^{m},0001$, ver el error que se puede tolerar en la medicion del terreno:

$$\frac{0^{m},0001}{L} = \frac{1}{100};\ L = 0{,}01.$$

III. Conociendo la mayor longitud del terreno que se tiene que representar, y la del papel que la tiene que contener encontrar la escala: — Papel...... $1^{m},5$ — Terreno 10000^{m}.

$$\frac{1{,}5}{10000} = \frac{1}{M} = \frac{15}{100000} = \frac{1}{\frac{100000}{15}};$$

y las demás que por su facilidad es ocioso consignar.

Pero el paso al papel de todas las dimensiones del terreno por medio de la escala analítica sería un trabajo largo y enojoso, por lo cual se ha sustituido con la adopcion de *escalas gráficas.* Son estas, líneas rectas divididas en partes iguales, representando las unidades de medida del terreno, sus múltiplas y sub-múltiplas, y que se hallan con la verdadera magnitud de aquellas en la relacion numérica adoptada, la que toma el nombre de *razon numérica* de la escala.

Existen dos de estas, la *gráfica ordinaria* y la de *transversales.*

Escala gráfica ordinaria.—Para su construccion, se toma siempre sobre el papel el valor de 100 metros en el terreno. Supóngase que se trata de construir la escala $\frac{1}{1000}$; se tiene la relacion

$$\frac{l}{100^m} = \frac{1}{1000} \;;\; l = \frac{100^m}{1000} = 0^m,1.$$

Tómese, pues, sobre una recta indefinida AM fig. 3.ª (lámina 1.ª) una longitud $AB = 0^m,1$, escríbase 0 en B y 100 en A; tómense desde B hácia la derecha distancias iguales á $0^m,1$ y márquense en los puntos C, D,... que resultan 100, 200, 300... Divídase el espacio AB en 10 partes iguales (*) y escríbanse en los puntos que resulten y á contar de derecha á izquierda los números 10, 20, 30..... 90, los cuales expresarán metros. Partamos tambien el espacio 90... 100 de la izquierda en 10 partes, y escribamos en ellas, de derecha á izquierda, 9, 8, 7... 1, y tenemos ya construida la escala, en donde se pueden apreciar hasta metros, y se podrian obtener fracciones de ellos desde el momento en que fuera posible marcar en la última division de la izquierda otras mas pequeñas.

En la práctica tiene mucho uso la escala $\frac{1}{1000}$, y existen en el comercio reglas de boj y de marfil, de longitud de dos decímetros, cuyo canto perfectamente graduado con arreglo á lo que hemos dicho, evita la construccion en el papel de la escala y permite formar otras distintas.

(*) Se notará que preferimos dividir el espacio en 10 partes iguales que llevar cada una de estas partes sobre la primitiva direccion, lo cual tiene por objeto evitar la acumulacion de errores.

Supóngase que se trata de formar la escala $\frac{1}{2000}$.

Se obtienen los 100 metros del terreno por la proporcion

$$\frac{l}{100}=\frac{1}{2000}:l=\frac{1}{20}=0^{m},05.$$

Tomemos con el compas en el doble decímetro la longitud $0^{m},05$ y llevándola cierto número de veces sobre una recta indefinida, tendremos ya las divisiones grandes de la escala nueva. Midiendo con el compas una longitud de 0,005 y llevándola 10 veces sobre la division de la izquierda se tienen las de 10 en 10 metros, y así sucesivamente.

Existen tambien en el comercio reglas de boj ó de marfil con diferentes escalas.

Dos son las cuestiones que pueden tener lugar en su uso. 1.ª Conocida la longitud en el terreno trasladarla al papel; y 2.ª la inversa, las cuales por su misma sencillez no necesitan explicacion.

Escala gráfica de transversales.—Figura 4.ª (lámina 1.ª) Se empieza para construirla, por formar sobre una recta indefinida *a b* la escala *gráfica ordinaria;* se elevan de los puntos *a* y *m* perpendiculares *ap* y *mq*; se toman sobre estas, diez dimensiones iguales entre sí, pero de longitud cualquiera, y uniendo los puntos *a'* y *m'* ...... *r* y *s* se tienen rectas paralelas á la primitiva. Se divide el intérvalo *rs* en las mismas é iguales partes de la *a m;* se une por una recta el punto 10 superior con el *s*, y trazando paralelas á esta por los puntos 20, 30. 40 ...... 100, queda formada la escala.

Las cuestiones que pueden ocurrir son las mismas que en la ordinaria. Supongamos que para resolver la primera, se quiere trasladar al papel una longitud de 352^m. Apoyaremos una punta del compas en la vertical 300 y en su punto *d* y llevaremos la otra punta á apoyarse en *c* sobre la transversal *tt'*.

Para la cuestion inversa, supóngase que se haya medido una longitud en el dibujo y se trate de saber la dimension á que sobre el terreno corresponde; lo que se consigue trasladando la abertura de compas á la escala, de modo que una de sus puntas apoye en alguna de las líneas verticales 0, 100, 200.... y la otra en la parte cuadriculada, y recorriendo así las diversas paralelas horizontales se llega á encontrar la dimension por tanteos que hace breves la práctica. Las escalas están sujetas alguna vez á especiales órdenes á las cuales hay que atenerse en la formacion de planos oficiales (*).

Copia y reduccion de planos.—Un plano está construido en la escala $\frac{1}{M}$, y se quiere obtenerlo en la $\frac{1}{M'}$. Represéntense por d y d' dos dimensiones en el papel, correspondientes á una misma en el terreno D. Tendremos $\frac{d}{D}=\frac{1}{M}$; $\frac{d'}{D}=\frac{1}{M'}$; $D=Md$, $D=M'd'$

(*) Circular de 27 de Diciembre de 1858, que insertamos al fin de la obra.

de donde $Md = M'd'$; $d' = d \times \frac{M}{M'}$, lo que nos dice que para pasar de la escala antigua á la nueva, hay que multiplicar cada una de las dimensiones de aquella por la relacion que guardan las dos escalas.

Se comprende que si $M' > M$ el plano que se obtenga será una reduccion del anterior. Si $M = M'$ será una copia de él, y si $M' < M$ será una amplificacion.

En el primer caso resultará la copia mas exacta que el original, pero pueden faltar algunos detalles; y en el último podrán existir errores no disimulables, y cuya supresion se debe procurar.

Ocupándonos primero de las copias, citaremos los métodos gráficos siguientes:

1.º **Copia picando.**—Despues de haber fijado una hoja de papel sobre el original, se pican con la aguja de un tiralíneas las extremidades de todas las rectas y los puntos notables del terreno, y quitando en seguida dicho original, es ya fácil viendo este y los puntos marcados, trazar la copia.

2.º **Copia calcando.**—Se tiene una mesa A, fig. 5.ª (lámina 1.ª) sin tablero, estando sustituido este por un vidrio. Se colocan en la parte inferior espejos que reflejen la luz hácia la superficie horizontal, quedando perfectamente visibles los trazos del original cubierto por el papel que tiene que recibir la copia, pudiendo con facilidad trasladarlos á este.

3.º **Copia por intersecciones.**—Se pueden copiar planos, marcando cada uno de los puntos por dos rectas que terminando en ellos, partan de los extremos de las grandes líneas que ordinariamente rodean los dibujos. Este método, exactísimo en teoría, no tiene en la práctica la misma bondad por la dificultad de reconocer el verdadero punto de interseccion de dos rectas que estén muy inclinadas una sobre otra. Además, ensucia mucho los originales.

4.° **Por cuadrícula ó por triangulacion.**—Consiste en dividir el original en pequeños cuadrados ó triángulos, y trasladar al papel de la copia, tambien dividido, las partes contenidas en cada una de las divisiones de aquel. Si en los cuadrados hubiese puntos notables intermedios, tambien se podrian trazar las diagonales para facilitar la operacion.

Hay papel yá cuadriculado, de diferentes longitudes en los lados de los cuadrados.

5.° **Por coordenadas.**—Se puede tambien copiar refiriendo los puntos del original á un sistema de coordenadas y trasladar estas y por consiguiente el punto, á otro sistema de igual ángulo que se haya establecido en la copia.—Para ampliar y reducir se usan tambien distintos métodos.

1.° **Por el ángulo reductor.**—Sea *a b*, fig. 6.ª (lámina 1.ª) una de las mayores líneas que existen en el plano que se tiene que reducir. Se dirige *b d* formando con la anterior un ángulo no muy agudo, y en ella se toma una longitud *b d* que satisfaga á la relacion $\frac{bd}{ab}=\frac{M}{M'}$. Diríjanse desde los diferentes puntos de la ab paralelas á la bd bastante próximas y trácese la ad.

Para trasladar una dimension, tómese con el compas la original á contar desde a sobre ab, y la longitud de la paralela á bd correspondiente á la otra punta será la dimension ampliada ó reducida.

2.° **Por cuerdas de arcos de círculos concéntricos.**—Con un rádio ab, mayor dimension del original, fig. 7 (lám. 1.ª) tracemos un arco de círculo. Desde b como centro y con un rádio bb' en el cual se verifique $\frac{bb'}{ab}=\frac{M}{M'}$, marquemos otro arco que corte al primitivo y unamos el punto b' de interseccion con el b, y con el a.

Si queremos reducir en la razon dada la dimension ac del original, no tenemos mas que trazar desde a con el rádio ac un arco cc', y la cuerda cc' será la nueva dimension.

3.° **Compas de proporcion.**—Fig. 8.ª (lám. 1.ª) Consiste en dos reglas bien pulimentadas que giran alrededor de un eje comun A, donde tienen el cero tambien comun de su graduacion, y desde él están divididas en partes arbitrarias, pero iguales.

Supongamos que se quiere reducir un plano á un cuarto de sus dimensiones. Se abrirá el compas hasta comprender la longitud que se vaya á reducir entre los 40, por ejemplo, y con uno ordinario se toma la distancia que entonces existe entre los dos 10 y esta es la dimension reducida. Es instrumento poco preciso.

4.° **Compas de reduccion.**—Tiene cuatro puntas, figura 9.ª (lám. 1.ª) La rotacion de sus ramas tiene lugar alrededor de un punto de su longitud. La semejanza de los triángulos que resultan por la union de las puntas de sus extremos, á uno y otro lado del eje de giro, prueba que la razon entre las longitudes de las ramas es la misma que la de las líneas *a b*, *a' b'*.

En una de las ramas hay una graduacion con la numeracion $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$..... que indica el punto donde debe quedar el índice del eje movible para que la razon entre las distancias de las puntas á él, sea la indicada por el número.

Pantógrafo.—Fig. 10 (lám. 1.ª)—**Descripcion.**— Se compone de cuatro reglas AR_1, AR_2, $A'S_1$, $A'S_2$, movibles alrededor de sus uniones A, A', S_1, S_2, estando el aparato construido de tal modo, que la figura $AS_1A'S_2$ es siempre un paralelógramo.

En un punto cualquiera O, de la regla R_1, existe otro eje de rotacion, alrededor del cual todo el aparato puede moverse.

En otro punto T de la regla R_2 está fija una punta destinada á recorrer el dibujo original en el momento en que la operacion se efectúe. Tracemos la recta OT, y por el punto C en que esta corta á la $A'S_1$ dirijamos la CF paralela á R_1. La semejanza de los triángulos

S_1CO y CFT nos dá $\frac{CS_1}{FT} = \frac{OS_1}{CF} = \frac{OS_1}{AS_1}$.

Siendo constante la razon del último miembro, cualquiera que sea la abertura de los ángulos del instrumento, la del primero tendrá tambien que conservar el mismo valor, y como esta puede ponerse bajo la forma $\frac{AF}{FT}$, queda fijada la constante posicion del punto F, pues de moverse este, variarian en sentidos contrarios los dos términos de la razon constante, lo cual es absurdo. Demostrada ya la invariabilidad de posicion del punto F sobre la recta R_2, implica esta la del punto C sobre la S_1 A′, cualquiera que sea el ángulo de abertura; de modo que no alterando en las respectivas reglas las posiciones del punto O y de la punta T, el punto C es el de interseccion de todas las de la recta O T; ó lo que es lo mismo, que los puntos O, C y T estarán en una misma línea recta, cualesquiera que sean los ángulos formados por las reglas. Siendo la relacion que existe entre O T y O C igual á $\frac{OA}{OS_1}$ y por consecuencia constante, se concibe que si el punto O está fijo, y la punta T recorre una figura cualquiera, un lapiz colocado en C describirá otra semejante, cuya proporcion de líneas con las homólogas del original estará representada por $\frac{OS_1}{OA}$.

La construccion del instrumento permite variar esta relacion del modo que se quiera, sea por medio de agujeros equidistantes situados en las reglas, y en donde se hacen entrar los sostenes del eje, de la punta y del lapiz, sea, en los aparatos de precision, montando dichos sostenes en abrazaderas metálicas que se deslizan á lo largo de las reglas y pueden sujetarse en cualquier punto de ellas por medio de tornillos de presion. Generalmente se graban sobre las reglas R_1 y S_1 las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. en los puntos donde es necesario colocar el eje O y el lapiz C para que el dibujo resulte reducido á la mitad, tercio, etc.

El pantógrafo puede tambien servir para la amplificacion de un plano, cambiando respectivamente de lugar la punta T y el lapiz C.

Cuando se trate de copiar un plano, se cambian de lugar el eje O y el lapiz C, pero debe evitarse emplear el pantófrago en las copias, por la incomodidad con que tiene que operar el que las ejecuta.

Detalles de construccion.—Las reglas están mantenidas á cierta distancia del papel por unos pivotes terminados en roldanas, las cuales tienen doble movimiento de rotacion, el que les permite tomar por si mismas la direccion del que se imprime al instrumento. Estos sostenes están representados por *n*, *n*, *n* en la fig. 11 (lám. 1.ª). El estilete que fija el punto O está introducido en un orificio practicado en una planchita de plomo P que se mantiene en posicion constante por medio de tres puntas que por presion se clavan en el plano. Está tambien unido *invariablemente* el estilete por su parte mas alta á una abrazadera con tornillo de presion *p*, que puede correr á lo largo de la regla, cuando este no esté apretado, ó clavadas las puntas de la plancha P.

La punta T está solamente unida á una abrazadera con su tornillo de presion q, y el lapiz C lo está á otra, que tiene unas poleas de tal modo dispuestas que permiten levantar el lapiz cuando no se quieren trasladar al papel algunas partes del plano que se copia, en el momento en que las está recorriendo la punta T.

Verificaciones.—1.ª La punta del lapiz tiene que ser el eje del cilindro en que está situado. Para satisfacer á esta condicion tiene que marcar un punto y no un círculo, cuando se haga girar al lapiz alrededor del eje del cilindro. 2.ª La punta, el lapiz y el eje fijo tienen que estar en la misma línea recta. Nos aseguraremos de ello, viendo si toca á los tres simultáneamente el canto de una regla bien construida. 3.ª Las divisiones indicadas en las reglas pueden no ser exactas, y es necesario verificar las posiciones del lapiz, de la punta, y del eje fijo, para que la amplificacion ó reduccion tenga lugar en la proporcion indicada por dichas graduaciones. Sea esta proporcion $\frac{p}{q}$, cuya longitud q pertenece al original y la p á la copia. Se colocan los tres puntos en línea recta, y despues de haber dibujado la figura q se la hará recorrer por la punta T; el lapiz trazará una línea p'. Si $p'=p$ está bien dispuesto el aparato, sino, hay que recurrir á tanteos que la práctica simplifica, para colocarlo del modo conveniente.

LECCION 2.ª

REPRESENTACION GRÁFICA DEL TERRENO POR LOS MÉTODOS QUE ESTÁN EN USO.

Siendo la formacion de un plano topográfico la representacion de una porcion de terreno, y debiendo ser esta lo suficientemente exacta para formarnos idea perfecta de él, y permitir la resolucion de los problemas y cuestiónes que ocurran, debemos ocuparnos de los medios empleados en dicho trabajo.

El mas sencillo, usado comunmente en la formacion de pequeños modelos en relieve de algunas construcciones, consiste en la eleccion de dos planos, uno horizontal y otro vertical, sobre los cuales se proyectan las diversas partes del original por líneas perpendiculares.

La proyeccion sobre el plano horizontal nos indica los cambios de direccion tambien horizontales del terreno, y la del plano vertical nos sirve para determinar la longitud de ordenada de cada uno de los puntos sobre la superficie en que el modelo tenga que apoyar.

Levantando en cada uno de los de la primera proyeccion, líneas perpendiculares al plano en que está trazada, y tomando sobre estas las longitudes de ordenada correspondientes, podemos, estando suficientemente próximas, formarnos una idea exacta de la construccion que se quiere representar, la cual luego se perfecciona cubriendo los extremos de las ordenadas con papel ó carton del modo conveniente.

Compréndese, que este medio es impracticable en terrenos de alguna extension y además completamente ajeno á la representacion plana que nos ocupa.

Natural es fijarse en los medios empleados en *Geometría Descriptiva* para el trazado y perfecto conocimiento de las superficies. Se emplean en la citada ciencia los dos planos de proyeccion, y los rebatimientos ó giros. La consideracion de estos medios basta para demostrar la imposibilidad de su uso en la formacion de planos topográficos. En efecto, las proyecciones horizontales nos servirian perfectamente para conocer los movimientos y accidentes del terreno en direccion tambien horizontal, pero para formarnos buena idea del relieve, es necesario considerar simultáneamente la proyeccion vertical, lo que es muy embarazoso y dado á errores. Además, en la citada proyeccion vertical se superponen unos á otros los accidentes del terreno, poniendo el dibujo completamente ininteligible. Considérese, para comprobar esta idea, una zona muy accidentada en que las montañas se sucedan las unas á las otras en pequeño intérvalo. En la proyeccion vertical, todas las alturas vendrán á superponerse y aun en cada montaña, (suponiéndolas transparentes para representar mejor todas las circunstancias de la extension en que se opera), se superpondrán tambien los objetos situados en las dos vertientes. Aparecerá, pues, el plano lleno de detalles, que por su número producirán confusion, y por su posicion no nos indicarán á primera vista la que en el terreno ocupan.

Existe además el sistema de *acotaciones*, pero la necesidad de poner al lado de cada punto de la proyeccion horizontal, el número que expresa su altura sobre el plano de comparacion, hacen que un dibujo sea tanto mas exacto, cuantos mas números contenga, y la profusion de estos produce una confusion tal, que impide conocer hasta los detalles mas importantes.

Desechados los métodos que podemos llamar antiguos, natural es tratar de encontrar otro diferente de aquellos, y que satisfaga á las exigencias de la cuestion. La generacion de las superficies nos conducen á la resolucion, sino perfecta, perfeccionada de ella.

Un cono cualquiera se puede considerar engendrado, ó por una recta generatriz, que fija por uno de sus puntos, se vé obligada á resbalar sobre una curva directriz, ó por una curva generatriz que obligada á resbalar sobre una recta directriz y manteniéndose paralela á su posicion primitiva, vá disminuyendo sin cesar de rádio, ó de dimensiones.

Tambien una esfera se puede suponer formada ó por un cuadrante que apoyándose por uno de sus extremos en el polo, resbala el otro sobre una circunferencia de igual rádio, situada en un plano perpendicular, ó bien por una circunferencia que se mueve paralelamente á si misma ocupando las diferentes posiciones á que dá lugar un resbalamiento sobre un cuadrante directriz, manteniendo su centro en una misma línea recta, y disminuyendo progresivamente su rádio.

Los medios de generacion citados, dan lugar á otros dos de representacion de los terrenos llamados *de curvas de nivel* ó *secciones horizontales*, y *de líneas de pendiente* ó *de máxima pendiente* de las cuales vamos á ocuparnos.

Curvas de nivel.—Fig. 12 (lám. 1.ª) Supóngase, para fijar la cuestion, que se trata de obtener la representacion de una montaña cualquiera. Si partiendo de un punto A del plano que se tiene que tomar como de proyeccion, y conservando una direccion fija, de Este á Oeste, por ejemplo, vamos encontrando, (por los medios que se explicarán) las alturas de los distintos puntos que se encuentren al paso, obtendremos en conjunto un perfil del terreno representado por el $p\,q\,f\,f'\,q'\,p'$. Supóngase tambien un sistema de planos horizontales equidistantes á contar desde el de proyeccion. Represéntanse por pp', qq', ff', las trazas de estos planos sobre el vertical del perfil. Las intersecciones de dichos planos horizontales con el terreno serán líneas curvas, cuyos puntos tendrán todos la misma cota, y que se proyectarán en su verdadera forma y magnitud sobre el plano A B que hemos elegido. No hay mas que hacer pues, para tener la copia exacta del terreno, que suponer elevada cada una de las curvas obtenidas, á la altura correspondiente y se tiene así un armazon ó esqueleto de la localidad que luego se cubre con los detalles. Escusado es decir que la representacion será tanto mas precisa, cuanto menor sea la equidistancia de los planos (*), y que la mayor ó menor aproximacion de las curvas de la proyeccion nos indicará un terreno de mayor ó menor pendiente.

Para concebir el modo de construir estas curvas, considérese á $a\,b$ como la proyeccion horizontal del perfil trazado, y bajando en este supuesto de los puntos A, p, q, f, f', q', p', B, líneas verticales se obtienen sobre ab puntos a, P, Q, F, F′, Q′, P′, b, correspondientes cada dos á una curva. Trazada ya sobre el terreno la direccion del primer perfil $a\,b$, se puede trazar otro $a'\,b'$ formando su plano un cierto ángulo con el de aquel, y haciendo con este perfil y su proyeccion $a'\ b'$, lo que se hizo con la $a\,b$ y el suyo, se tendrán otros dos puntos de cada curva; como se pueden trazar tantos perfiles como se quieran, tanto de marcha en direccion constante como de marcha ondulada, se pueden obtener muchos puntos correspondientes á la misma curva, que unidos por líneas trazadas á la vista del terreno, para copiar mejor sus inflexiones, nos dan la forma casi perfecta de la seccion horizontal. Compréndese que el trazado será tanto mas exacto, cuanto mayor número de perfiles se hayan marcado.

Con este sistema de representacion se puede conocer

(*) Esta equidistancia debe ser suficientemente pequeña, para que las distancias mas cortas entre las dos curvas, trazadas por cualquier punto de la zona intermedia, estén confundidas con el terreno.

sobre el dibujo la altura de un punto cualquiera sobre el plano de proyeccion, ya esté ó nó sobre una curva trazada. En el primer caso, como se conoce la equidistancia de los planos, y el órden de colocacion del que ha producido la curva en que el punto se encuentra, está resuelta la cuestion, existiendo además para facilitarla un número en cada una de las curvas, que indican la altura de sus planos.

Cuando el punto O cuya altura se quiere encontrar figura 13 (lámina 1.ª) se halla en la zona comprendida entre dos curvas ya trazadas, es necesario tirar sobre el plano, por este punto, la mas corta distancia entre dichas curvas; y es fácil demostrar que esta línea es proyeccion de la mas corta distancia que media entre las dos curvas del espacio, trazada por el punto tambien del espacio O′ correspondiente al O.

Sean A′ B′, C′ D′, las curvas del espacio y A B, C D sus proyecciones. Representemos por M N la mas corta distancia que existe entre A B y C D trazada por el punto O; vamos á demostrar que la M′ N′ es tambien la mas corta distancia entre A′ B′ y C′ D′ trazada por el punto O′.

Tiremos la P′Q′ que pasa por O′ en una direccion cualquiera; proyectémosla sobre el plano, en P Q y marquemos las $P'q$ y $N'm$ desde P′ y N′ paralelas á las P Q y N M, pudiendo ya conocer que

$$MN = N'm, \quad PQ = P'q, \quad M'm = Q'q.$$

De manera que los triángulos rectángulos $M'mN'$ y $Q'P'q$ tienen un cateto igual; además $mN' = MN < P'q = PQ$;

luego $M'N' < P'Q'$. Como podriamos demostrar lo mismo para cualquiera otra recta que pasase por O', está evidenciada la proposicion.

Determinemos ahora la altura del punto O del plano, fig. 14 (lám. 1.ª) comprendido entre las curvas de nivel proyectadas AB y CD.

Tracemos por O la mas corta distancia MN; levantemos en M una perpendicular igual á la equidistancia; unamos el punto M' con N y tendremos rebatida sobre el plano CD la línea M'N' del espacio, que estará confundida con el terreno, teniendo el punto cuya proyeccion es O, su posicion en O', extremo de la perpendicular levantada en O. La línea OO' es, pues, lo que se tiene que añadir á la altura del punto N para tener la del punto O.

El sistema de curvas de nivel no ofrece los inconvenientes de los de *Geometría Descriptiva:* se tiene la representacion en un solo plano; no introducen confusion los números que marcan las alturas, pues solo tiene uno cada curva; se pueden encontrar con la mayor facilidad las formas de los perfiles ó cortes causados por cilindros perpendiculares al plano de proyeccion, cuyas trazas sobre este plano tengan una forma cualquiera; marcar caminos de pendiente dada, etc.

Para encontrar las formas del perfil causado por cilindros perpendiculares al plano de proyeccion, no hay mas que fijarse en la determinacion de cotas intermedias de que acabamos de hablar.

Consideremos primero, fig. 15 (lám. 1.ª) un plano vertical como causante del perfil, en el supuesto de que sea horizontal el de proyeccion. Sea MN la interseccion de estos dos planos. Tomemos una recta indefinida M′N′ sobre la que ha de descansar el contorno que se busca, suponiendo que el punto M′ es el M del plano de proyeccion. A contar de M′ tómese una distancia igual á Ma y elévese en a', punto extremo, una vertical igual á la altura del punto a, marcada en la curva á que pertenece. Desde a', tómese otra distancia $a'b' = ab$, y elevemos en b' otra vertical de dimensiones iguales á la altura de b. Siguiendo del mismo modo, se obtienen puntos M′, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, N′ por donde el perfil tiene que pasar. Tomemos por el mismo sistema puntos O, O′, etc. de ordenada intermedia y elevemos las verticales correspondientes, obteniendo de este modo otros $\bar{O}$, $\bar{O}'$, etc. tan aproximados como se quiera, haciendo luego pasar el perfil por los puntos marcados, uniéndolos por un trazado contínuo.

Fijémonos ahora en el perfil causado por una superficie prismática perpendicular al plano de proyeccion cuya traza sobre este sea la MNOP; fig. 16 (lám. 1.ª). Pueden ocurrir dos casos: que se quiera el perfil proyectado sobre una de las caras del prisma, ó desarrollado. En el primero, tomemos sobre una recta indefinida la longitud P′a' suponiendo que el punto P′ es el P del plano, y teniendo Pa = P′a', elevemos en a' la $a'\bar{a}$ igual á la altura de a. Prolonguemos la Pa, traza del plano donde el perfil se va á proyectar. Tomemos desde a' la $a'O' = aO$, tiremos la $O'\bar{O}$ igual á la cota de O.

Desde O' midamos $O'N' = On$ proyeccion de ON sobre Pa, y elevemos la altura del punto N, $N'\overline{N}$. Traslademos tambien desde N' la $N'M' = nm$, proyeccion de NM sobre Pa, y marquemos en M' la altura del punto M que en este caso particular es nula. Hállense tambien por el mismo procedimiento alturas de puntos intermedios, y efectuemos el trazado como en el caso anterior.

Cuando se quiera obtener el perfil desarrollado, no hay mas que sustituir á las longitudes de las proyecciones de los lados de la traza, las de los lados mismos.

Escusado es decir, que siendo el cilindro, límite de los prismas, los perfiles causados por aquellos se determinan por iguales procedimientos, siendo solo necesario tomar mayor número de puntos.

Tambien es de resolucion fácil la cuestion de marcar sobre un plano topográfico la direccion de un camino de pendiente conocida.

Sea en el plano de la fig. 1.ª (lám. 2.ª) donde partiendo de A, se quiere trazar un camino de pendiente $\frac{1}{n}$, es decir, que por cada longitud horizontal de n metros corresponda una diferencia de altura 1 á sus extremos. Se puede establecer $\frac{1}{n} = \frac{E}{x}$, siendo E la equidistancia de los planos de las secciones y x la línea que desde el punto A va á parar al pié de la vertical bajada desde el de la curva B, que unido con A daría la pendiente pedida, ó lo que es lo mismo, x es la proyeccion del primer trozo del camino ideado.

::

Determinado x por la establecida proporcion, se hace centro en A y con un rádio $AC = x$ se traza un arco de círculo; la union de A con C ó C′, dá la direccion pedida. Desde C se hacen para seguir el camino las mismas consideraciones que desde A.

Equidistancia.—Sabemos ya que toma este nombre la distancia vertical que separa una curva de nivel de sus inmediatas. Puede ser esta cantidad arbitraria, pero se la debe hacer depender de la pendiente mas rápida que se tenga que representar y de la escala. En efecto, es necesario en todos los planos que se formen, que las separaciones horizontales de cada curva de nivel con sus inmediatas sea mayor que $0^m,0005$, pues de lo contrario las proyecciones de las curvas se confundirían y nos darían una sola línea negra que ensuciaría el plano sin indicarnos los detalles del terreno representado.

Vamos, pues, á encontrar la equidistancia necesaria en cada caso, dando ya por supuesto que en el papel la separacion de las proyecciones de dos curvas inmediatas tiene por límite $0^m,0005$.

El de las pendientes mas rápidas que conviene representar es 45°, y expresando por α el ángulo de dicha pendiente se tendrá tang. $\alpha = \frac{E}{d}$, llamando á la equidistancia E, y d á la separacion de dos curvas inmediatas en proyeccion horizontal, las dos en sus verdaderas dimensiones.

Si la equidistancia fuera por ejemplo $0^m,5 = E$ en la escala $\frac{1}{2000}$; se tendria en el límite $1 = \frac{0^m,5}{d}$; $d = 0^m,5$, que reducido á escala sería $\frac{0^m,5}{2000}$ puesto que

$$\frac{z}{0,5} = \frac{1}{2000} : z = \frac{0^m,5}{2000} = 0^m,00025,$$

cuya distancia no se podria representar en el plano.

Es necesario, pues, ligar la equidistancia con la escala de tal modo, que cuando esta aumente, aquella disminuya y vice versa. Pues para ello en la expresion tang. $\alpha = \frac{E}{d}$, dividamos los dos términos del segundo miembro por M, siendo $\frac{1}{M}$ la escala y tendremos

tang. $\alpha = \frac{\frac{E}{M}}{\frac{d}{M}}$; pero $\frac{d}{M}$ es igual en su límite á $0^m,0005$,

de modo que al llegar á él se verifica

$$1 = \frac{E}{M \times 0,0005} \text{ ó } E = M \times 0^m,0005,$$

este será su valor en el terreno, y en el papel se obtendrá representando por E′ esta equidistancia, por la relacion $\frac{1}{M} = \frac{E'}{E}$.

Generalmente se adoptan equidistancias de dos ó tres metros, excepto en los casos de muy pequeña escala, en que se pueden tomar hasta 10^m.

Cuando solo se deseen representar las ondulaciones del terreno, podemos desde luego marcar las curvas por medio de un trazo contínuo de tinta, pero si se quiere indicar la posicion de caseríos ú otros accidentes, hay que interrumpir las curvas de nivel lo que sea necesario para la colocacion de estos detalles de la superficie.

Líneas de máxima pendiente auxiliadas por curvas de nivel.—Este sistema de representacion consiste en disponer entre cada dos proyecciones de curvas horizontales trazadas con lapiz, líneas perpendiculares á la vez á ambas, cuyas líneas, como demostraremos despues, son las que forman mayor ángulo con el plano del levantamiento. Es necesario no confundir estas líneas llamadas de *pendiente* ó de *máxima pendiente* trazadas con arreglo á ciertas condiciones, con los trazos arbitrarios que se colocan en algunos dibujos á pluma.

Las curvas de nivel auxiliares se borran despues, y las líneas de máxima pendiente no están en prolongacion las de una zona con las de la inmediata, sino que entre cada dos extremos de las de la superior, entra el de una de la inferior. Las líneas de máxima pendiente son tanto mas aproximadas entre sí cuanto mas cortas son, de manera que la simple inspeccion del dibujo nos hará conocer ya la naturaleza y posicion de las pendientes del terreno, pues las mas rápidas aparecerán mas oscuras que las mas suaves.

Se debe distinguir esta sombra de las que expresan los efectos de luz, pues estos se marcan con capas de tinta de china de la intensidad conveniente.

Vamos ahora á demostrar que la línea trazada desde un punto cualquiera del terreno y rasante á él, que forma mayor ángulo con el horizonte, ó lo que es lo mismo, la *línea de mayor ó máxima pendiente*, goza de las propiedades siguientes: 1.ª Es perpendicular á la interseccion de la superficie por planos horizontales. 2.ª Su proyeccion es perpendicular á la de estas intersecciones.

Efectivamente, sea MN fig. 2.ª (lám. 2.ª) una línea de máxima pendiente comprendida entre dos curvas horizontales AB y CD.

Tracemos por N la tangente NT, y sobre ella tomemos dos puntos P y P′ equidistantes del N de contacto; unámoslos con M. Proyectemos M en m sobre el plano CD y unamos m con P y P′; se tiene entónces en los tres triángulos rectángulos MPm, MNm, MP′m:

tangente $MPm = \frac{Mm}{mP}$; tangente $MNm = \frac{Mm}{Nm}$; tangente $MP'm = \frac{Mm}{P'm}$, y como MNm es por el supuesto mayor que los otros dos, para que esto se verifique es preciso que $Nm < mP$ y que mP'; luego la Nm es perpendicular á la NT, por ser la mas corta distancia de m á ella. Demostrado esto, los triángulos $PNm = NmP'$ y $MPm = MP'm$, siendo en consecuencia $MP = MP'$, y se separan igualmente del pié de MN, luego esta es perpendicular á la PT.

Como podiamos haber supuesto la línea MN partiendo de N, y proyectar la figura sobre el plano superior, podriamos tambien demostrar la perpendicularidad de MN sobre MT′, y la de esta con la proyeccion de aquella sobre el plano AB, por lo que está completamente evidenciada la verdad de las proposiciones sentadas.

Llamando $E = Mm$ la equidistancia, d á la Nm, separacion de la CD y $a'b'$, proyeccion de AB en el plano de CD, α al ángulo MNm, tendremos que $d = E \cot. \alpha$, y dividiendo por el denominador M de la escala tendremos $\frac{d}{M} = \frac{E}{M} \cot. \alpha$; es decir, la magnitud reducida á escala de la línea proyectada de máxima pendiente es igual á la equidistancia reducida, por la cotangente de la inclinacion. En un mismo plano topográfico, ó en planos que tengan la misma equidistancia reducida, puede servir esto para formar una idea de las pendientes.

En el primer caso se tiene E constante, y para dos proyecciones d y d' de líneas de máxima pendiente

$$\frac{d}{M} = \frac{E}{M} \cot. \alpha; \quad \frac{d'}{M} = \frac{E}{M} \cot. \alpha'; \quad \frac{\frac{d}{M}}{\frac{d'}{M}} = \frac{\cot. \alpha}{\cot. \alpha'}.$$

En el segundo caso $\frac{E}{M} = \frac{E'}{M'}$ y para dos proyecciones d y d'

$$\frac{d}{M} = \frac{E}{M} \cot. \alpha; \quad \frac{d'}{M'} = \frac{E'}{M'} \cot. \alpha'; \quad \frac{\frac{d'}{M'}}{\frac{d}{M}} = \frac{\cot. \alpha'}{\cot. \alpha}.$$

Se concibe, que teniendo un punto tal como M en una superficie cualquiera, fig. 3.ª (lám. 2.ª) alrededor de este punto radiarán los elementos rectilíneos de extrema pequeñez, correspondientes á todas las líneas que sobre la superficie se pueden trazar pasando por dicho punto. Estos elementos se pueden considerar como intersecciones de planos verticales en donde estén dichos elementos contenidos, con el plano tangente en M cuya traza sobre el de proyeccion es TT′. Entre todos estos elementos habrá uno cuyo plano tenga su traza PQ paralela á la TT′, y otro que la tenga tal como M′N′, perpendicular á la TT′. El elemento SS′ del primero será de nivel, comprendido en la seccion horizontal AB; el segundo corta el primero perpendicularmente, y forma con el plano de proyeccion un ángulo igual al diedro del plano tangente y el de proyeccion.

Este segundo elemento MR, perpendicular al horizontal SS′ es el principio de la línea de mayor pendiente que del punto M parte. Si existen varios planos tangentes en el punto M, para todos podemos hacer las mismas consideraciones, y deduciremos líneas de máxima pendiente diferentes en cada uno de ellos, por lo que podemos decir que en un punto de una superficie hay tantas líneas de máxima pendiente como planos tangentes se puedan trazar.

En el dibujo de los planos topográficos, para marcar las líneas de pendiente máxima, se consideran solo las proyecciones de las curvas horizontales indicadas con lapiz en el papel, y á ellas se hace que sean normales las líneas que se trazan.

Cuando las proyecciones de dos curvas de nivel consecutivas, están bastante separadas y se apartan del paralelismo fig. 4.ª (lám. 2.ª) no es yá una recta la que nos indica la pendiente máxima, sino una curva, como se puede comprobar trazando proyecciones de secciones intermedias. Fórmase tambien idea de estas curvas de máxima pendiente con la observacion del cono oblícuo de la fig. 5.ª (lám. 2.ª). Tanto en esta como en la anterior vemos que las curvas proyeccion de la pendiente máxima, vuelven su convexidad al punto de mayor separacion de las proyecciones de las curvas de nivel auxiliares.

Dedúcese de aquí: 1.º que cuando dos curvas, proyeccion de secciones horizontales se acercan para alejarse en seguida, las concavidades miran hácia la recta proyeccion de la máxima pendiente en los puntos mas cércanos fig. 7.ª (lám. 2.ª): 2.º que cuando las mismas proyecciones de curvas de nivel se alejan para aproximarse en seguida, las líneas de máxima pendiente vuelven su convexidad á la recta proyeccion de la pendiente en la separacion mayor fig. 7.ª (lám. 2.ª). (*)

Separacion de las líneas de pendiente.—Con el objeto de que el dibujo por líneas de máxima pendiente nos dé á conocer desde luego las ondulaciones del

---

(*) Estas curvas no representan las proyecciones de los caminos que seguirian cuerpos pesados abandonados á si mismos desde el punto culminante, por causa de la velocidad que en cada uno de los de su camino adquiririan. Para que siguiesen este camino era necesario detenerles al encontrar cada curva de nivel, estando estas muy próximas, y hacerles partir para la inmediata saliendo del estado de reposo.

terreno, se han hecho varios convenios para la separacion de dichas líneas:

Método Aleman.—Supónese en él, que los rayos luminosos son verticales, y se siguen las reglas siguientes:

1.ª El color es mas oscuro á medida que la pendiente aumenta; el blanco puro se destina á los planos horizontales, y el negro espeso á las pendientes máximas, ó sea de 45.°

2.ª La distancia entre trazo y trazo es constante de eje á eje. (*)

3.ª El grueso de los trazos es funcion de la pendiente; para 10° es doble de la que corresponde á 5°.

4.ª Entre dos curvas, el grueso del trazo es á la distancia que entre aquellas existe, como la inclinacion del terreno sobre la horizontal, es á lo que le falta para llegar á 45°.

Este método es muy laborioso y difícil en la práctica.

Método Francés.—1.° La tinta es la misma siempre. 2.° La distancia entre cada dos trazos está en razon inversa de la rapidez de las pendientes, y es igual al cuarto de la separacion, tomada sobre el plano, entre dos curvas consecutivas; esta distancia se mide en la parte media ó eje de los trazos. 3.° En el caso en que la distancia entre dos curvas consecutivas es menor que $0^m,002$ se sustituye á la disminucion de distancia el aumento de grueso en los trazos.

(*) Llamamos *eje* á la línea matemática que divide al trazo en dos partes iguales en sentido de su longitud.

En la práctica se dividen las pendientes en *suaves*, *medias* y *empinadas*.

1.° Cuando una pendiente *media* está representada por una proyeccion que haga que las curvas estén separadas mas de $0^m,002$, las líneas de pendiente se marcan con trazos finos y separados $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{3}$ de su longitud.

2.° Cuando la zona proyectada tenga menor ancho que $0^m,002$ no se toman ya las equidistancias expresadas, y los trazos gruesos y unidos nos darán á conocer la rapidez de la pendiente *empinada*.

3.° Por último, cuando el intérvalo entre las dos curvas es mayor de $0^m,030$ se descompone la pendiente en dos partes; una que sea algo mas rápida, y otra completamente horizontal, y como la parte superior de los trazos es mas gruesa que la inferior, el sentido de la pendiente queda marcado. Se dibujan algunas veces en este caso curvas de nivel auxiliares, y los pequeños trazos correspondientes para sostener el colorido del dibujo.

En los sitios escarpados, las curvas proyeccion de las secciones se acercan, y se confunden cuando el terreno está cortado verticalmente.

Los trazos que representan las líneas de máxima pendiente, son ó seguidos ó ligeramente temblones. Tanto estos como las curvas de nivel, se detienen si llegan á tocar algunas rocas, barrancos ú otros accidentes, los cuales se dibujan en proyeccion horizontal.

Apreciacion de los sistemas.—Cuando se trata de representar un terreno, y se desea que la exactitud se una al buen efecto del conjunto, es decir, cuando á más de un plano topográfico se quiere una obra artística, debemos elegir las *líneas de pendiente*, pero en los planos que los oficiales del Ejército tienen que levantar generalmente, se adopta siempre el de *curvas de nivel,* que no necesita auxilio del otro, dá idea bastante exacta del terreno, es mas sencillo, y por sus pocas líneas, dá lugar á que aparezcan sin confusion todos los detalles (*). Algunas veces cuando haya necesidad de hacer notar á primera vista las ondulaciones principales, se suele complementar el método de secciones, dando ligeras capas de tinta de China en los sitios convenientes. Las figs. 8.ª y 9.ª de la (lám. 2.ª) sirven para dar idea de ambos sistemas.

(*) Ayuda además al conocimiento perfecto de la representacion; el croquis, y la memoria descriptiva que generalmente se unen, como en el lugar correspondiente se explicará.

de uno ó la plancha del conjunto, es [illegible], cuando á vez de un plano topográfico se quiera una obra artística, deben [illegible], para no los pueden [illegible] del [illegible] que [illegible] de [illegible] del [illegible], en [illegible] exacta del terreno, [illegible] y [illegible] que [illegible] los detalles [illegible] de haber [illegible] las [illegible], suele complementar el trabajo de [illegible], dando [illegible] de [illegible] convenientes. [illegible] idea de [illegible].

TRIANGULACION.

LECCION 3.ª

CANEVAS.—ELECCION DE LA BASE, DE LOS TRIÁNGULOS Y DEL INSTRUMENTO ANGULAR.—CROQUIS.—REGISTRO.—SEÑALES.

Tiene la triangulacion por objeto cubrir el terreno del cual se vá á hacer el levantamiento de una série de triángulos cuyos vértices, de posicion exactamente marcada pueden servirnos de comprobacion para los demás puntos. En el papel, se fijan aquellos con gran precision, y tambien comprueban la posicion de los otros. La red de triángulos que resulta de este modo cubriendo el terreno, toma el nombre de *cánevas*.

La necesidad del cánevas se concibe desde el momento que se tengan en cuenta los no perfectos instrumentos que se emplean, y lo difícil que es, aun al mas práctico, dejar de cometer errores en las operaciones del terreno. Supóngase que el observador saliendo del punto A trata de construir un polígono que envuelva el terreno del levantamiento, fig. 10 (lám. 2.ª). Mide primero el lado AB, despues el ángulo α, en seguida el lado BC, el ángulo β, y así sucesivamente hasta tratar de volver á A. Pero por poco error que den los instrumentos y por pequeño que sea el dependiente del observador, el polígono no cerrará sobre el punto A al trasladarlo al papel; y como por el método seguido, el error que se cometa en una medicion influye en la posicion de los puntos siguientes, cuyos errores se aumentan al primitivo, tenemos que empezar otra vez el levantamiento por no existir datos que den á conocer el sitio en que la primera equivocacion se ha cometido.

Además, en muchos terrenos, como bosques, grupos de rocas, etc., la medicion no es fácil, y algunas veces no es practicable. Poniéndonos en el mejor caso, que el polígono cerrase por haberse hecho las operaciones con gran exactitud, esta implicaría mucha mas lentitud en el trabajo, y pérdida consiguiente de un tiempo que se puede y debe economizar.

Para evitar los inconvenientes citados, supongamos que se marcan sobre el terreno puntos convenientemente elegidos y en pequeño número; y que estos estén ligados unos á otros por rectas de las cuales una sola se mide directamente. Queda así cubierto el terreno por un cánevas cuyos ángulos se miden con la precision posible. Se trasladan al papel dichos puntos, que llamaremos *trigonométricos* y tenemos ya así el conjunto de varios planos parciales comprendido cada uno dentro de un triángulo, y con la ventaja de que el error que al levantar los detalles de uno de ellos se pueda cometer, no se introduce en el inmediato, cuyo levantamiento es completamente independiente. Si al trasladar con los datos encontrados uno de los triángulos ó sus detalles al papel, no cerrasen del modo preciso, no habria que empezar la operacion, pues en la seguridad de que el error estaba localizado, debiamos buscarlo en el triángulo en que estamos operando, y de todos modos los puntos marcados son de referencia ó comparacion, hasta para los menores incidentes del plano.

Trazado ya el cánevas fundamental, se apoyan en sus lados rectas provenientes de otros puntos del terreno que se ligan de este modo con los ya establecidos; se miden los ángulos de los nuevos triángulos y se tienen las posiciones de aquellos determinadas. Sobre los lados de la nueva triangulacion se puede apoyar otra de parecidas dimensiones en sus lados, etc., y de este modo se habrá conseguido formar otra red de triángulos mas pequeños, que nos dará la posicion de nuevos puntos en número mucho mayor, y no tan exactamente determinados como los que han servido de base. Además se pueden formar polígonos que apoyen sus lados ó tengan sus vértices en los vértices ó lados ya determinados, y dividirlos por transversales, rectas ó poligonales, cuyas direcciones pasen por los puntos de importancia secundaria que por cualquier causa convenga recoger. En cuanto á los menos importantes, se marcan en el plano, ligándolos por medio de perpendiculares cuya longitud se mide, ó por cualquier otro medio, á las líneas ya determinadas de posicion.

Al conjunto de la primera triangulacion se le dá el nombre de *cánevas trigonométrico*, al de la segunda, polígonos y transversales, el de *cánevas topográfico*, y al resultante de la tercera operacion el de *cánevas de los detalles*, que generalmente se confunde bajo este nombre con la anterior triangulacion.

Sea PQ, fig. 11 (lám. 2.ª) el terreno cuyo plano se quiere levantar. En él tenemos que marcar puntos de dos clases diferentes: *trigonométricos de primer órden*, y de *segundo órden*. Vamos á dar algunas nociones sobre ellos. 1.° Como puntos trigonométricos de primer órden, se consideran los O, A, B, C, D, E de la figura, cuyo número se limita á 6, 7 ú 8 destinados á servir de comprobacion á los demás. Lo general es elegir uno de ellos en la parte central del terreno y los otros en su mismo perímetro. 2.° El punto central O debe tener una señal elevada, como la veleta de un campanario, la barra de un pararayos, etc., y en defecto de ella se coloca en O un gran mástil con su gallardete de color vivo. La señal de este punto debe ser visible desde gran número de los del contorno del polígono principal y desde todos los vértices. 3.° El número y la posicion de los puntos se subordina á las condiciones del terreno, y á la de formar por la union de los exteriores un polígono que no difiera mucho de la regularidad, y en el que el punto O sea próximamente el centro. En los paises montañosos, serán puntos trigonométricos de primer órden los cúspides que mas sobresalgan. 4.° Los triángulos AOB, BOC, COD etc., se procura que sean próxima ó exactamente equiláteros; pero como alguna vez la naturaleza del terreno no lo permite, se fija el número de lados del polígono y su direccion de manera que no se tengan ángulos muy pequeños. Generalmente los menores de 30° no se admiten yá (*). 5.° La longitud máxima de los lados del polígono principal, está subordinada al grado de precision del instrumento medidor de ángulos. Las líneas AO, BO, CO..... no suelen pasar de 2000^{m} sino en casos excepcionales, y las AB, BC..... suelen ser algo mas pequeñas. 6.° De cada vértice del polígono se deben descubrir sea interior sea exteriormente, muchos puntos característicos del terreno tales como salientes de las obras de fortificacion, union de caminos, cabezas de puentes, etc. Estos son los puntos que se llaman de *segundo órden* y que se ligan á los de primero por los triángulos de que hemos hablado, y en los cuales aunque sería conveniente que todos los ángulos fuesen mayores que 30°, se admiten tambien los menores. 7.° La posicion de los puntos de primer órden A, B..... debe ser tal que de cada uno de ellos se tiene que ver por lo menos el punto O, y los dos vértices próximos á derecha é izquierda. Con estas consideraciones y la práctica que se adquiera en breve se hace fácil la eleccion.

Cánevas de una plaza fuerte—Los principios que acaban de indicarse son aplicables á este como á todos los

(*) El motivo de esta limitacion se explicará mas adelante.

casos. El punto central O se toma en el interior de la plaza. Debe ser bastante elevado, para hacerse visible de la mayor parte de los de la zona exterior de la fortificacion. En esta zona se marcan, despues de detenido exámen, los vértices de un polígono principal que comprenda en su perímetro la plaza y sus alrededores. Los puntos de segundo órden interiores al polígono, se fijan en las prolongaciones de las caras, en los ángulos salientes de las medias lunas, de los caminos cubiertos, etc., debiendo ser en bastante número para que su recíproca union nos dé perfecta idea de la obra. Los puntos de detalle se fijan especialmente en las compuertas ó exclusas de inundacion, en los diques etc.

Otros de segundo órden se establecen tambien en las obras de defensa destacadas, ya estén ó nó comprendidas en el polígono, con el objeto de que se unan con los convenientes del cuerpo de la plaza. Se esparcen en fin otros muchos de la misma categoría en toda la extension, situándolos preferentemente á lo largo de las grandes vías de comunicacion, en la union de los caminos, en las orillas de los rios, sobre los bordes de los escarpados y demas obstáculos que el operador no puede salvar, en las islas, cabos, bajos, fondeaderos, etc.

Instrumentos angulares.—Los instrumentos destinados á medir los ángulos en los levantamientos tienen diferentes apreciaciones, es decir, que permiten aproximar mas ó menos los exactos á los observados, reservándose los mas precisos para la resolucion de los triángulos de primer órden, dejando los otros para los de segundo; en cuanto al levantamiento del detalle propiamente dicho, se hace con aparatos de muy poca precision.

Pero puede darse el caso de operar con un aparato nuevo, y no saber si su apreciacion es suficiente en la operacion que se ejecuta, para que no aparezca en el plano error notable, y como esto dependerá de la escala y de la magnitud de lados del triángulo en que se opere, vamos á tratar de formar una ligazon entre dichas cantidades.

Sea φ el error cometido en la medicion del ángulo A del triángulo A B C fig. 12 (lám. 2.ª) resultante de la imperfeccion del instrumento y de faltas cometidas por el que lo maneja. Sea $Ce = \overline{E}$ el que resulta en el lado BC. Existe la proporcion $\frac{\overline{E}}{AC} = \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,(C+\varphi)}$; de

donde $\overline{E} = \frac{b\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,(C+\varphi)}$; el límite superior de sen.$(C+\varphi)$ es la unidad, en un círculo de este rádio, de modo que generalmente sen. $(C+\varphi)<1$ y en consecuencia $\overline{E}>b\,\text{sen.}\,\varphi$ Pero como el ángulo φ es siempre muy pequeño se puede considerar confundido con su seno, convirtiéndose entonces la desigualdad anterior en $\overline{E}>b\varphi$, ó bien

$\varphi<\frac{\overline{E}}{b}$; y reducidas á escala estas dimensiones $\varphi<\frac{\frac{\overline{E}}{M}}{\frac{b}{M}}$.

Ahora supongamos que el menor error que en el papel se pueda cometer sea 0,m0005; este será tambien el límite superior de $\frac{\overline{E}}{M}$, que es el error gráfico reducido á escala, y por consiguiente se tendrá que $\varphi < \frac{0^m,0005 \times M}{b}$, en cuya desigualdad dadas dos de las cantidades φ, M y b se podrá determinar el valor límite de la otra.

Pero φ es arco desarrollado y lo usual es marcar los ángulos por su valor gradual, siendo muy fácil pasar de aquel á este.

Sea en efecto a la longitud de un arco desarrollado y $\bar{a}$ su equivalente en valor gradual. Es evidente que el arco a contendrá tantas veces la longitud del arco de 1″ como segundos haya en $\bar{a}$, de modo que $a = \bar{a} \times 1''$ y como por la extrema pequeñez se puede considerar $1'' = \text{sen. } 1''$, $a = \bar{a}\ \text{sen. } 1''$, $\bar{a} = \frac{a}{\text{sen. } 1''}$, lo que nos dice que para reducir longitud de arco á valor gradual en el círculo de rádio 1, no hay mas que dividir aquella por el sen. de 1″. Por lo cual la desigualdad

$$\varphi < \frac{0^m,0005 \times M}{b} \text{ se convierte en } \varphi < \frac{0^m,0005 \times M}{b\ \text{sen. } 1''}.$$

Conocido yá lo que deben apreciar los instrumentos medidores para que sean aplicables á los levantamientos, con relacion á los mayores lados y á la escala, vamos á ocuparnos de la magnitud mas conveniente de los ángulos para que los errores gráficos resultantes sean de poca consideracion.

El primer procedimiento para demostrarlo se deduce del mismo valor $\overline{E} = \dfrac{b \text{ sen. } \varphi}{\text{sen. }(C + \varphi)}$.

El valor mínimo de $\overline{E}$ será cuando sen. $(C+\varphi) = 1$ ó lo que es lo mismo cuando $C+\varphi = 90^\circ$ y como φ es siempre muy pequeño, se puede decir que dicho valor mínimo vá siendo menor, conforme el ángulo C se vá acercando al recto; pero este valor de C, haría que los lados de su triángulo cerrasen con mayor oblicuidad, formando los otros ángulos muy agudos, y el error que se disminuia en la medicion de C, se aumentaba en la de los A y B. Compensando pues el valor de aquel con las de estos, se concibe que se tienen que detener los tres en su dimension intermedia de 60 grados.

Tambien se demuestra la misma proposicion, considerando los errores relativos cometidos en la medicion de cada uno de los ángulos. Estos errores son $\dfrac{\varphi}{A}$, $\dfrac{\varphi'}{B}$ y $\dfrac{\varphi''}{C}$ representando por φ, φ' y φ'' los absolutos, y adquieren simultáneamente su valor mínimo cuando al mismo tiempo tienen A, B, C su máximo, y el mayor valor que pueden tener simultáneamente A, B y C es $A = B = C = 60^\circ$.

Consiste por último el tercer método de demostracion en la consideracion del triángulo ABC, fig. 13 (lám. 2.ª) cuyo lado b ha sido medido exactamente. Apoyándonos en él y con un instrumento imperfecto, hemos determinado el valor de los ángulos A y C, y en consecuencia ha resultado el B, todos ellos con error, que puede hacer variable su magnitud, así como la de a y c. Establezcamos la proporcion $\frac{b}{c}=\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}$ cuya única constante es b; b sen. C $= c$ sen. B, y diferenciando:

$$b \cos. C\, d C = c \cos. B\, d B + \text{sen. } B\, d c \quad \text{de donde}$$

$$dc = \frac{b \cos. C}{\text{sen. B}} dC - \frac{c \cos. B dB}{\text{sen. B}} = \frac{cb \cos. C dC}{b \text{ sen. C}} - \frac{c \cos. B d B}{\text{sen. B}}$$

por ser sen. B $= \frac{b \text{ sen. C}}{c}$ y de ahí:

$$dc = \overline{\text{E}} = c \cot. C\, d C - c \cot. B\, d B;$$

los ángulos han sido medidos con el mismo aparato y por procedimientos idénticos, y es lo regular que la diferencia entre los errores sea de pequeñez extrema, y se pueda establecer la igualdad $dC = dB$, con cuya suposicion queda: $\overline{\text{E}} = c\,dB$ (cot. C — cot. B), cuyo valor es el mínimo cuando cot. C $=$ cot. B, y B $=$ C.

Cuando los errores dC y dB, conservando un valor que podemos considerar igual, sean de sentidos contrarios, el valor de $\overline{\text{E}}$, se convierte en $\overline{\text{E}} = c\,dB$ (cot. C + cot. B), que es necesario demostrar llega á su mínimo valor cuando C $=$ B; en efecto, si restamos una de otra las dos ecuaciones

$$\cos. (B + C) = \cos. B \cos. C - \text{sen. B sen. C};$$

$$\cos. (B - C) = \cos. B \cos. C + \text{sen. B sen. C};$$

nos resultará

$$2 \text{ sen. B sen. C} = \cos. (B - C) - \cos. (B + C) =$$

$$= \cos. (B - C) + \cos. A; \text{ luego}$$

$$\text{E} = c\,d\text{B}\left(\frac{\cos.\,\text{C}}{\text{sen.}\,\text{C}} + \frac{\cos.\,\text{B}}{\text{sen.}\,\text{B}}\right) =$$

$$= c\,d\text{B}\left(\frac{\cos.\,\text{C}\,\text{sen.}\,\text{B} + \text{sen.}\,\text{C}\cos.\,\text{B}}{\text{sen.}\,\text{C}\,\text{sen.}\,\text{B}}\right) = \frac{c\,d\text{B}\,\text{sen.}\,(\text{C}+\text{B})}{\text{sen.}\,\text{C}\,\text{sen.}\,\text{B}} =$$

$= \dfrac{2\,c\,d\text{B} \times \text{sen.}\,\text{A}}{\cos.(\text{B}-\text{C}) + \cos.\,\text{A}}$ expresion á la cual la suposicion $\text{B} = \text{C}$ hace la menor posible.

Como los mismos procedimientos podiamos haber seguido tomando en consideracion los ángulos B y A, obtendriamos tambien $\text{A} = \text{B}$, lo que nos demuestra una vez mas que la forma equilátera de los triángulos es la mas conveniente para que los errores se reduzcan á su mínimo valor.

Vamos ahora á considerar la ventaja ó defecto que puede producir en el plano un aumento ó disminucion de magnitud en los lados de los triángulos sucesivos que se van apoyando en los primitivamente formados.

Fijémonos en un primer triángulo, que tomamos en un parage cualquiera del plano con los errores a', b', c' en sus lados, fig. 14 (lám. 2.ª) Establezcamos la proporcion

$\dfrac{\text{sen.}\,\text{A}}{\text{sen.}\,\text{B}} = \dfrac{a \pm a'}{b \pm b'}$ de donde $(b \pm b')\,\text{sen.}\,\text{A} = (a \pm a')\,\text{sen.}\,\text{B}$

y como $a\,\text{sen.}\,\text{B} = b\,\text{sen.}\,\text{A}$, resulta que tambien

$$b'\,\text{sen.}\,\text{A} = a'\,\text{sen.}\,\text{B}, \text{ ó } a' = b'\,\frac{\text{sen.}\,\text{A}}{\text{sen.}\,\text{B}}.$$

En el triángulo BCM apoyado sobre BC, tendremos

$$\bar{c}' = a' \times \frac{\text{sen. } \bar{C}}{\text{sen. M}} = b' \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}} \times \frac{\text{sen. } \bar{C}}{\text{sen. M}}.$$

Apoyando ahora un triángulo sobre BM,

$$t' = \bar{c}' \times \frac{\text{sen. T}}{\text{sen. S}} = b' \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}} \times \frac{\text{sen. } \bar{C}}{\text{sen. M}} \times \frac{\text{sen. T}}{\text{sen. S}},$$

y tomando mas triángulos y representando por $\bar{E}'$ el error gráfico definitivo, tendremos:

$$\bar{E}' = b' \times \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}} \times \frac{\text{sen. } \bar{C}}{\text{sen. M}} \times \frac{\text{sen. T}}{\text{sen. S}} \ldots\ldots,$$

y como podemos sustituir la relacion de los senos por la de los lados opuestos á los ángulos, se tiene

$$\bar{E}' = b' \times \frac{a \pm a'}{b \pm b'} \times \frac{\bar{c} \pm \bar{c}'}{a \pm a'} \times \frac{t \pm t'}{\bar{c} \pm \bar{c}'} \ldots\ldots$$

De manera que si sobre el primer triángulo apoyamos otro de lados mayores, $\frac{\bar{c} \pm \bar{c}'}{a \pm a'} > 1$, $\frac{t \pm t'}{\bar{c} \pm \bar{c}'} > 1$; y el valor de $\bar{E}' > b' \times \frac{a \pm a'}{b \pm b'}$ que era el primer error.

Si por el contrario sobre el primer triángulo se apoyan otros de lados cada vez menores

$$\frac{\bar{c} \pm \bar{c}'}{a \pm a'} < 1, \quad \frac{t \pm t'}{\bar{c} \pm \bar{c}'} < 1 \ldots\ldots \quad \bar{E}' < b' \times \frac{a \pm a'}{b \pm b'}.$$

El paso de triángulos pequeños á otros mayores pudiendo producir aumento de error, es necesario ver si este es escesivo; en algunos períodos del levantamiento se miden las longitudes sobre el terreno de alguno de los lados de los triángulos últimamente hallados; se reducen á escala, y se vé si los números encontrados difieren de los procedentes del cálculo, en cantidades mayores de la permitida $0^{m},0005$, y en el caso que así sea, se tienen que suprimir y rehacer los triángulos que contengan lados con este error. A los lados medidos con precision sobre el terreno para servir de comprobacion, se les llama *bases auxiliares* ó de *comparacion*.

El paso de triángulos grandes á otros de lados menores solo ofrece ventajas y el error disminuye.

Eleccion de base.—Conocida yá la forma más conveniente de los ángulos de la triangulacion, y las alteraciones que producen en la exactitud de los planos, los aumentos ó disminuciones de longitud de los lados, se hace necesario efectuar en el terreno la medicion exacta de una línea recta que una dos puntos trigonométricos de primer órden, es decir, un lado del polígono principal, para trasladarlo al papel, y apoyar en ella la construccion del cánevas.

Siendo esta línea, que se llama *base*, orígen de todas las operaciones, natural es que se procure no cometer error en su medicion, llegando al límite de estas precauciones cuando en la base se tienen que apoyar triangulaciones de grande extension, como sucede en las *geodésicas*, de las que nos ocuparemos á su tiempo.

Siendo la medicion en terreno horizontal la mas fácil de efectuar, es tambien la menos expuesta á errores, y por ello se procura que la base se encuentre en dicha situacion. Se eligen para el objeto: la direccion de grandes carreteras, cuya inclinacion no sea sensible, las orillas de un rio en los parages en que sea poca la corriente, la superficie del mismo rio ó de un lago helado, la orilla del mar, etc. En el caso en que no exista terreno horizontal donde poder marcar la base, se traza en terreno inclinado, efectuando despues su paso á la horizontal, restando de la medida de la parte inclinada la correccion hallada por la consideracion de la fig. 15 (lám. 2.ª)

$$AB-AC=AB-AB\cos.\alpha=AB(1-\cos.\alpha)=2\,AB\,\text{sen}^2.\frac{1}{2}\alpha:$$

Cuando los obstáculos existentes en el terreno, impidan la medicion contínua de una base horizontal ó inclinada, se traza una línea angulosa, deduciendo de sus ligazones con la recta que une sus extremos, la longitud de esta que será la base buscada.

Sea, fig. 16 (lám. 2.ª) la recta que une los puntos A y B la que se ha elegido. Existe en su direccion el obstáculo C y no se puede medir directamente. Trazaremos sobre el terreno la línea angulosa A E B que empieza en A y concluye en B. Uniremos el punto E con A por medio de la A E, y con m, principio del obstáculo por Em, la cual mediremos exactamente, lo mismo que el trozo Am de la base elegida.

Se puede ahora resolver el triángulo EmB, conociendo el ángulo E y los lados EB y Em, de lo cual deduciremos mB y el valor buscado será la suma mB + mA, la que reducida á escala se trasladará al papel en la conveniente direccion.

Reconocimiento preliminar.—Para que los puntos trigonométricos y la base resulten bien elegidos, es muy conveniente hacer en el terreno un reconocimiento preliminar, recorriéndolo en todas direcciones, midiendo algunas distancias y ángulos con los instrumentos cuyo manejo sea mas pronto, aunque tengan menos exactitud, y formando un *croquis* ó dibujo á la ligera de la extension que se vá á representar.

Este reconocimiento hará que la eleccion de puntos se haga con completo conocimiento de causa, y el plano topográfico ganará notablemente en perfeccion á expensas del poco tiempo empleado.

Cuando por consecuencia de la operacion acabada de indicar se tiene conocimiento perfecto del terreno, se pasa á colocar *señales* en los puntos elegidos, que se procura que en posicion y número estén acordes con las reglas dadas.

Se traslada al papel del *croquis* la triangulacion formada por la union de los puntos elegidos; se pone una letra en cada vértice, y al lado la indicacion de la señal que en el terreno le distingue, así como la direccion y extremos de la base. Se ponen tambien números de órden á los diferentes triángulos, y para conservar los datos que en el terreno se van adquiriendo de un modo sistemático y poco expuesto á pérdidas, se abre un *registro* que puede tener la forma del siguiente, ú otra análoga.

Número de los triángulos.	Designacion de los vértices y señales.	VALOR DE LOS ÁNGULOS.		MEDIDA DE LA BASE.		Observaciones.
		Múltiplos.	Medios.	Múltipla.	Media.	
1	A. pararayos de.....	10 A=	A =	4AB=	AB=	
	B. casa de...	....	....	....	....	
	O.	....	....	....	....	
2	B.........	....	....	....	....	
	C. Mástil.	....	....	....	....	
	O.........	....	....	....	....	
:	:	:	:	:	:	

En la última casilla se ponen ciertas correcciones que hay que hacer sufrir á los ángulos medidos, si aquellas son en pequeño número; pero si son en número mayor se pondrán aparte.

Precauciones relativas á las señales.—Con el objeto de hacer las operaciones en el menor tiempo posible, y evitar los cambios de posicion de las señales causados por el acaso ó la mala intencion, es necesario, 1.° Establecerlas bien. 2.° Cuando se ha operado, mantener determinado el punto, pero dejar la señal poco visible.

Para establecerlas se cogen grandes mástiles, muy rectos y perfectamente rígidos; se rodea su extremo superior de paja y esta de papel ó trapo blanco, terminado en un pequeño gallardete, cono, etc., lo que hace que la proyeccion del extremo de la señal sobre las tierras sea perfectamente visible y la posicion del punto está determinada con exactitud. Para fijarla, se abre un hoyo en el terreno de $0^{m},5$ de profundidad y despues de introducir en él el extremo inferior del mástil, se llena de piedras y tierra apisonada, concluyéndose de afirmar con cuñas de madera introducidas á golpes de mazo.

Cuando se cesa de operar en un punto, si este es alguna parte de una construccion permanente, basta indicarla en el registro. Si no lo es, pero está cerca de dos puntos determinados é inamovibles, se indican en dicho registro las distancias de cada uno de ellos á él, el cual se puede encontrar por interseccion. De todos modos, si es un punto del terreno se introduce un piquete hasta que no sobresalga de la superficie; si estuviese situado en una piedra, se marcan á pico dos ranuras que se corten en él; si fuera un árbol se marca en su corteza, etc.

LECCION 4.ª

MEDIDA DE LAS BASES.

Conocida la necesidad de efectuar la medicion exacta de una línea comprendida entre dos puntos principales, para apoyar sobre ella la triangulacion, vamos á ocuparnos del modo de ejecutar dicho trabajo.

Alineaciones.—Elegidos y señalados convenientemente los puntos extremos, la operacion está reducida á ver cuántas veces la unidad de medida adoptada está comprendida en la línea recta que los une; pero como quiera que es muy difícil marchar en una direccion constante sin que existan puntos intermedios de comprobacion colocados en ella, tenemos que ocuparnos tambien de la colocacion de dichos puntos.

Este trabajo toma el nombre de *alineacion*.

Al efectuarla, pueden ocurrir varios casos: 1.º Que los extremos marcados sean accesibles. 2.º Que lo sea solo uno de ellos. 3.º Que sean inaccesibles los dos.

Considerando el primero, sean los puntos A y B figura 1.ª (lámina 3.ª) señalados y accesibles.

Se coloca el observador en un punto tal como A' un poco separado de A dirigiendo la visual hácia B, mientras que un peon recorre la direccion AB desde B hácia A. Dicho peon lleva en la mano un *jalon*, (*) el cual sostiene por su parte superior, manteniéndolo separado del cuerpo, con el objeto de que el propio peso haga que esté vertical. En el momento en que el que observa, vé confundidos los puntos A y B con el jalon, hace seña al que lo lleva, el cual lo deja caer en direccion del eje, asegurándolo en el terreno con algunos golpes de mazo, cerciorándose de su verticalidad por una plomada ó una piedra atada á un bramante, el que tiene que coincidir en una vuelta completa alrededor del jalon con la superficie exterior de este. Colocado ya el primero en un punto que supondremos b, se coloca otro por los mismos medios en b' y lo mismo en b''... con la aproximacion necesaria para que la pendiente sea uniforme entre los piés de los dos inmediatos, y su distancia no excesiva, para poder seguir con facilidad la direccion deseada. Si se quiere prolongar la línea AB, se van marcando por el mismo procedimiento los puntos $\bar{b}$, $\bar{b}'$.....

Supongamos ahora que el punto B sea inaccesible. La simple consideracion del procedimiento anterior hace

(*) Toma el nombre de *jalon* una estaca ó varilla cilíndrica de madera, terminada por su parte inferior en un cono, fig. 2.ª (lám. 3.ª) cubierto generalmente de un casquillo de hierro, y teniendo en la parte superior otro aro ó casquillo, destinado á evitar que se hienda la madera, por los golpes de mazo. La longitud máxima que tienen los jalones es de metro y medio ó dos metros. Los de longitud mayor que con un lienzo á su extremo sirven para marcar alineaciones entre puntos distantes, toman el nombre de ***banderolas***.

ver que no se le debe variar en nada para el caso actual.

Por último, cuando A y B sean inaccesibles existen dos maneras para marcar puntos intermedios.

En el primero, fig. 3.ª (lám. 3.ª) se coloca el que dirige la alineacion en un punto cualquiera tal como *c* con un jalon en la mano, y un ayudante que lleva otro jalon se sitúa en *d*, cubierto con A y *c* y dando frente al operador colocado en este último punto. Emprende en seguida el *c* su marcha oblícua, acercándose á AB por los puntos *c'*, *c''*....., y el *d* sigue dicha marcha con mayor rapidez por los *d'*, *d''*....., manteniéndose siempre en la línea recta de A y de las posiciones sucesivas de *c*, hasta que este vea á *d* en la posicion *d'''* cubierto con B, en cuyo caso, fijando los dos operadores sus jalones, estos marcarán dos puntos intermedios y accesibles de la alineacion AB.

El segundo procedimiento consiste en colocarse cada uno de los dos que le siguen, con la espalda al punto mas próximo de los inaccesibles fijados, en posiciones tales como *c* y *d*, fig. 4.ª (lám. 3.ª) Mantenido en su posicion el del punto *c* dirige el movimiento del *d* hasta que lo vea en una *d'* cubierto con B, en cuyo caso *d'* es el que se para, emprendiendo el movimiento el *c* hasta que *d'* le vea en la posicion *c'* cubierto con A. Detiene entonces el *c'* su marcha, y la emprende el *d'* hasta colocarse en *d''*, y así sucesivamente hasta que cada uno de los que forman la alineacion vea al otro cubierto con uno de los puntos extremos. Clávanse en el suelo los jalones, y se tienen marcados dos puntos intermedios y accesibles, siguiendo ya desde esta situacion los procedimientos del primer caso.

Cuando entre los extremos de la alineacion existiesen pendientes muy empinadas, es necesario tener cuidado de aproximar mas los jalones, pues de lo contrario podria resultar que la visual horizontal dirigida por la cabeza de un jalon cortase al terreno antes de llegar al inmediato ó bien que pasase por encima de este sin tocarle. En la fig. 5.ª (lám. 3.ª) que nos sirve para explicar una modificacion de los procedimientos de alineacion para un terreno de esta clase se da idea de lo que acabamos de expresar.

A y B son los puntos extremos de la alineacion. M es la primera posicion del observador destinado á marcar otro punto C convenientemente elegido, marcando en seguida y desde el mismo punto M el correspondiente al jalon 2. Desde detrás de este jalon y mirando á C se marca otro punto 3, desde detrás del 3 el 4, etc.

Inútil es hablar de la importancia de la operacion que se ha explicado, pues es el fundamento de todas las siguientes. En cuanto á la perfeccion con que se tiene que efectuar el trabajo es menor cuando se hace para medir una línea, que cuando se ejecuta para medir el ángulo formado por dos alineaciones. En el primer caso, una pequeña desviacion no producirá diferencia sensible en la extension medida, mientras que en el segundo, puede dar lugar á una diferencia en el ángulo de alguna consideracion, que se trasladará al lado opuesto del triángulo de que forme parte, en cantidad tanto mas notable, cuanto mayor sea la longitud de los lados adyacentes.

Es conveniente en todos casos, empezar á colocar, siendo posible, los jalones mas lejanos, pues si no se hace así, una pequeña desviacion en uno de los que están mas próximos al observador, produce un error notable en la direccion de la línea.

Para aumentar la distancia á que se pueden hacer las alineaciones y perfeccionar la direccion de las visuales, se usan pínulas, anteojos, etc., de los cuales hablaremos mas adelante, y para hacer mas visibles las señales se sustituyen los jalones por banderolas y se pintan dichos jalones de blanco para que resalten sobre el fondo oscuro del terreno.

Es necesario al hacer las alineaciones que el observador se coloque algo separado del jalon que tiene mas cercano, pues en el caso contrario, las visuales de cada uno de los ojos rasando su superficie tomarian direcciones divergentes, quedando oculto para el que ejecuta el trabajo el ángulo comprendido por ellas, en el que se podia cometer cualquier error sin que fuese notado.

Medicion.—Sabiendo yá el modo de marcar la direccion en que se tiene que medir, vamos á ocuparnos de la medicion, advirtiendo que esta se puede hacer de tres modos entre los puntos A y B de la fig. 6.ª (lámina 3.ª) puesto que entre ellos existen tres distancias. 1.º La *natural* ACB siguiendo la direccion de la línea ondulada. 2.º AB ó *Geométrica*, que se mide por la recta que vá de A á B. Y 3.° la *horizontal* Ab comprendida entre los piés A y b de las perpendiculares bajadas de los puntos A y B á la horizontal Ab ó á cualquiera que le sea paralela. De la medicion de la distancia natural no nos ocuparemos, puesto que colocando los jalones con la suficiente aproximacion, se confundirá con la geométrica que entre los piés de cada dos exista.

En el caso que midamos esta, se la tiene que convertir luego en distancia horizontal, por la fórmula que encontramos, en la cual siendo AB la geométrica y Ab aquella, existia la relacion

$AB - Ab = 2\,AB \text{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha$, siendo α el ángulo de la pendiente.

De modo que quitando á la magnitud AB medida en direccion del terreno la cantidad $2\,AB\ \text{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha$, se tiene la verdadera distancia horizontal, que reducida á la escala en que se opera se marca en el papel. Pero algunas veces, la relacion que entre la magnitud AB, el ángulo α y la escala del plano existen, permite tomar sin error sensible por distancia horizontal la medida en direccion de la pendiente. Para ver cuando esto tendrá lugar, sea $\overline{E}''$ el error gráfico que se puede cometer en el terreno, sin que perjudique notablemente á la exactitud del plano; siendo M la escala, el correspondiente en el papel será $\frac{\overline{E}''}{M} = e$; de donde $\overline{E}'' = Me$. El que se comete al tomar la distancia geométrica por la horizontal es $2\,AB\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$, el cual tiene que ser menor que $\overline{E}''$ para que el plano no resulte sensiblemente deformado, pudiendo pues decir

$$2AB\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\,\alpha < Me;\ \text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha < \frac{Me}{2\,AB};\ AB < \frac{Me}{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}:$$

Supongamos que se opere en la escala $\frac{1}{1000}$, y que el error tolerable en el papel fuese $0^m,0005$; tendriamos $\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha < \frac{0^m,5}{2\,AB};\ AB < \frac{0^m,5}{2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\alpha}$, desigualdades que nos permiten hallar, dado el ángulo de inclinacion de un terreno, el límite del valor de la distancia que se puede medir en sentido de la pendiente para poderla tomar sin correccion ni error sensible por la horizontal, y hallar tambien para un valor determinado de longitud medida, el del ángulo necesario para el mismo fin.

Pasemos ahora á la materialidad de la medicion. Se efectúa esta por varios procedimientos, y valiéndose de distintos objetos auxiliares ó instrumentos, aunque en casi todos está reducida la medicion á aplicar la unidad elegida sobre la longitud que se tiene que medir, todas las veces que se pueda.

Los medios mas sencillos aunque muy inexactos, de los que nos ocuparemos al hablar de *Topografía irregular,* en la cual solamente tienen aplicacion, son los pasos del hombre y del caballo, el *odómetro* ó *cuenta pasos*, el tiempo y el sonido, existiendo además los siguientes:

Cadena metálica.—Consiste esta, fig. 8.ª (lám. 3.ª) en una cadena de 10^m de longitud ordinariamente, formada de eslabones consistentes en una varilla de hierro *m* terminada en dos anillos, reuniéndose cada uno con los de su inmediato por medio de otros anillos pequeños. Tiene cada eslabon dos decímetros de longitud contado entre las mitades de dos anillos *s* consecutivos, excepto en el primero y el último, en que el doble decímetro se cuenta desde la mitad del anillo $\bar{s}$ hasta el punto *p*, exterior al asa del aparato. A cada cinco eslabones, es decir, de metro en metro, el anillo de union es de laton, y algunas cadenas suelen tener medallas de este metal con números que indican el de metros que dista del asa cada uno.

Acompañan al aparato 11 agujas de hierro de poca longitud, y forma igual á la K, fig. 7.ª (lám. 3.ª) que sirven para perfeccionar la medicion.

La cadena es muy propensa á errores, pues con la mayor facilidad se dobla un eslabon sobre otro, produciendo lo que se llama *nudo* y disminuyendo su longitud; para evitar el error que de esta manera se produce es necesario llevar la cadena bastante tirante, lo cual causa el que se abran los anillos, y el aparato medidor se alarga.

La probabilidad de que existan estos defectos hace que sea necesaria una verificacion de la longitud de la cadena, y esta se efectúa trazando sobre un muro, pretil de un puente, ó una superficie bien lisa una línea recta, la cual se divide en partes iguales á las de aquella.

Se ajusta esta en seguida sobre dicha recta, poniéndose en evidencia las deformaciones que aquella haya sufrido. Para corregirlas, se dan en los anillos que terminan los eslabones unos golpes de mazo con el objeto de cerrarlos; si esto no fuese bastante, se introduce mas el tornillo *r* de union con el asa, y si aun no fuese suficiente se encorvan ligeramente algunos eslabones, lo cual se hace á expensas de su longitud, hasta reducir la total á la dimension exacta.

El anillo que liga los eslabones centrales de la cadena es algo mayor que los demás ó tiene una señal para distinguirlo, y sirve de asa en algunos casos particulares, como en el de la medicion horizontal en sitios de pendiente muy inclinada, en que es conveniente apreciar longitudes pequeñas, doblándose entonces la cadena en dos mitades, y cogiendo el mismo operador las dos asas.

Sabiendo esto vamos á medir con el aparato descripto. (*) En el sitio de partida se clava en el terreno una aguja, que se procura esté vertical, y para conseguirlo se emplean algunas veces de la forma de la K′; fig. 7.ª (lámina 3.ª) Uno de los que operan adapta exactamente una de las asas á ella sujetando las dos con la mano y apoyando el brazo en la rodilla con el objeto de que no cargue el peso del cuerpo en la aguja, y se varíe su direccion.

(*) Antes de hacerlo, se coloca la cuerda de alineacion que es de cáñamo y está preparada como diremos en la *métrica*, de modo que marque la traza del plano vertical que pase por los jalones para cuyo objeto se sujetan en ellos los dos extremos de la cuerda, la cual se deja caer suavemente hasta que llegue al terreno en la direccion que su propio peso la ha marcado.

El que lleva el otro extremo de la cadena, provisto de las otras diez agujas, marcha en el sentido de la alineacion hasta mantenerla bien tirante, en cuyo caso pone una de aquellas en el terreno, vertical y en contacto con el asa. Se levantan los dos, desclavando el de detrás la aguja hasta llegar á la que ha dejado el otro, en la que apoya el asa del mismo modo que hemos dicho. El de delante ha seguido su marcha con la misma velocidad manteniendo la cadena en tension y en el momento en que el de detrás adapta el asa á la aguja clavada, clava aquel otra, y así siguen hasta concluir la medicion. Durante ella tienen cuidado los medidores de llevar un registro en el cual anotan las veces que la cadena entera se ha adaptado al terreno, y al concluirla, los metros y decímetros que complementan la medida.

En la operacion han de cuidar los que la efectuan de lo siguiente:

1.° Los medidores deben aplicar exactamente las asas á las agujas; si el de detrás aplica á la aguja la superficie exterior del asa, el de delante debe aplicar la interior.

2.° El portacadena, ó sea el que marcha delante debe poner la aguja exactamente vertical.

3.° Es necesario tender bien la cadena para evitar la diminucion de longitud producida por el pandeo, pero la tension no debe ser forzada para evitar la abertura de los anillos. Con objeto de compensar en algo dicho error de pandeo que no puede nunca suprimirse por completo, se permite en la cadena un exceso de longitud sobre los diez metros de unos $0^{m},02$.

4.° Las agujas no deben ser muy largas, para que sea menos notable en ellas una ligera falta de verticalidad.

5.° Se deben evitar y suprimir las formaciones de nudos.

6.° Comprobar con frecuencia si las agujas del portacadena, y las que tiene el medidor componen diez, sin contar la que está clavada.

7.° El medidor no quitará ninguna aguja hasta tanto que el portacadena haya clavado la otra.

8.° A cada 100 metros el portacadena entrega al medidor las diez agujas, y este apunta por separado en su registro la distancia medida.

9.° Cuando al ir á terminar la medicion quede una distancia menor de diez metros, no debe detener el portacadena su marcha, sino seguir en la misma direccion hasta que quede la cadena tirante, y se cuentan los metros y decímetros que haya desde el medidor hasta el último jalon.

10. Si en la recta de la alineacion se encontrasen puntos notables, como puentes, rios, caminos, etc., se tiene cuidado, sin alterar ni detener el sistema indicado de anotar la distancia que hay desde el orígen de la medida á los expresados puntos.

11. Cuando se tenga que medir las pendientes rápidas para poner las agujas bien verticales se usan las K', y en el caso en que se operase sobre rocas, en vez de clavar la aguja se deja esta tendida en direccion perpendicular á la alineacion.

12. Es preferente efectuar esta bajando que subiendo. En efecto en este último caso, es el portacadena el que encuentra un punto fijado en el suelo por el extremo de ella, pero el medidor tiende á ser arrastrado, ó al querer resistir arrastra á su vez á aquel, produciéndose errores. Si es por el contrario el medidor el que está mas alto, se podrá mantener fijo en su posicion y el portacadena puede por el extremo de ella dejar caer libremente la aguja.

13. Se procura evitar la medida de cinco en cinco metros en las pendientes rápidas, efectuando entre tres la medicion. El de en medio tiene una aguja que no abandona nunca; conserva en la mano la parte media de la cadena, y opera primero con respecto al que la lleva y despues con el medidor. Este tiene que recoger las mismas agujas que en los otros casos, y el que se encuentra en la parte central quita la que habia puesto, para colocarla otra vez en la siguiente distancia de 10^{m}.

14. Si se puede, es conveniente que el que apunte en el registro, no mida, sino siga el movimiento de dos portacadenas.

En el caso que con este aparato se quieran medir distancias horizontales, es necesario poner la cadena horizontal tambien, para lo cual suponiendo que AB la represente, fig. 9.ª (lám. 3.ª), se fijan en dos puntos cualquiera P, Q de su longitud, bramantes de igual largo y se reunen, atando una piedra ó peso M á su punto de union; y en el medio de la longitud PQ, se suspende una plomada ú otra piedra sujeta con un hilo. La cadena estará horizontal cuando el de la plomada pase por M. En este caso, para marcar en el suelo la posicion de las agujas existe otra plomada en el extremo de la cadena, que marcará el punto donde llega al terreno la vertical de dicho extremo, y en este se clava la aguja.

Cinta metálica.—Consiste esta en una lámina de metal delgada y flexible, que está arrollada á un pequeño cilindro, tal como se vé en la fig. 10 (lám. 3.ª). Con el objeto de evitar la salida de la cinta por los extremos del eje, existen en ellos dos placas circulares de suela ó de madera M, M y en la parte lateral de estas hay unas ranuras *r*, *r*, en las cuales se introducen las varillas K que de este modo mantienen la cinta arrollada.

Son dichas varillas K, unos semicilindros que tienen en su parte plana dos ranuras semicilíndricas tambien y del mismo diámetro de seccion que las agujas. Están sujetos á la cinta por una asa y un pequeño tornillo que permite hacer una ligera rectificacion de la longitud. Esta suele ser de 10^{m}, y la mitad tiene un rombo metálico con sus dos diagonales trazadas á fin de conocer mejor el verdadero punto por el cruce de estas. En cada metro existe una pequeña corona circular de laton, adaptada tambien á la cinta, y en cada medio metro, un pequeño círculo; los decímetros están indicados por agujeros.

La verificacion, rectificacion y uso de la cinta metálica son los mismos que para la cadena. La cinta debe ser lo suficientemente elástica para adaptarse á todas las posiciones.

Es mas conveniente que la cadena por carecer de nudos y por vencer mas la yerba y pequeños accidentes que en el terreno existan, por efecto de su poco grueso, pero se suele romper con facilidad, y en este caso no se pueden superponer las diferentes partes porque variaría la longitud.

Para componer la cadena, se juntan las partes rotas y se ponen á un lado y á otro pequeñas placas de metal que se reunen entre sí y con la cinta del modo conveniente.

Cuerda métrica.—Una cuerda ordinaria de cáñamo, pero cuyos cordones están retorcidos en sentidos contrarios, constituye la *cuerda métrica*, cuya longitud suele tambien ser de diez metros. En la mitad, lleva cosido un trozo de cinta encarnada y en cada metro otra blanca con un número que indique su posicion con respecto al orígen. La disposicion de los cordones de que hemos hablado hacen que los cambios de longitud por torsion ó destorsion, causados por la sequedad ó humedad del aire, tengan lugar en sentidos contrarios, lo que anula el efecto total ó al menos lo evita en mucho. Para anular por completo la influencia de los agentes atmósféricos, se suele introducir la cuerda en aceite hirviendo antes de graduarla, y despues, se la pasa rozando por un pan de cera algo caliente, para que en la superficie adquiera dureza y compacidad.

El método de medicion por la cuerda, igual en procedimiento á los dos anteriores, es menos exacto que ellos.

Existen tambien rodetes de cinta de hilo con graduaciones marcadas, de distintas longitudes.

Aparato de reglas.—El ordinario consiste en un par de reglas de madera de pino, de fibra recta, introducidas antes de graduarlas en aceite caliente, y barnizados; suelen tener cuatro metros de longitud y están divididos en decímetros, fig. 11 (lám. 3.ª) Van unidos á las reglas A, sostenes de la forma del B, fig. 12 (lám. 3.ª) en el cual se introduce una barra de hierro *mm* terminada en punta por la parte inferior, la que tiene que clavarse en el terreno.

En C del sosten ahorquillado, existe un cilindro que sirve de apoyo ó descanso á la regla, y permite á esta deslizarse en sentido horizontal. Para detener este movimiento cuando convenga, y para fijar el sosten á su pié de hierro existen los dos tornillos de presion M y N. En la parte superior de la regla hay un nivel de aire *p*.

Para medir con este aparato una longitud en un terreno proximamente horizontal, no hay mas que ir adaptando las reglas una á continuacion de otra de manera que se toquen y no se empujen, siguiendo el sentido de la alineacion, y no empleando los sostenes sino hay necesidad.

Cuando el terreno es inclinado, se ponen las reglas sobre los sostenes, fijos en el terreno por las barras. Se suben ó bajan dichos sostenes hasta conseguir la horizontalidad de la regla; se hace correr en seguida esta hasta que su extremo coincida con el punto en que empezamos la medicion, para la cual se pone una plomada en la ranura que existe en un extremo de la regla. En el otro extremo que tiene tambien ranura, se coloca otra plomada, á cuyo hilo ha de venir á tocar la regla inmediata, siguiendo la medicion como indica la figura 13 (lámina 3.ª)

Clerc, para fijar el contacto de las dos reglas, y hacer que no existieran los empujes que eran casi inevitables en la colocacion, modificó algo los puntos extremos de dichas reglas, terminando uno de ellos en un semicilindro de eje horizontal A fig. 14 (lám. 3.ª) y el otro por uno de eje vertical B.

El A está fijo; pero el B puede moverse con ayuda de una lengueta M situada en la parte superior de la regla en la cual tiene su ranura ó mortaja, con una graduacion que tiene su cero correspondiente al extremo de la lengueta, cuando el cilindro B está lo mas aproximado posible á la regla. Se evitan de esta manera los empuges, pues las reglas no se ponen en contacto, sino á una pequeña distancia, y aflojando el tornillo M se hace correr suavemente el cilindro B, hasta que toque al A de la siguiente. El contacto se efectua por un punto, pero hay que tener cuidado en la apuntacion que se lleve, de añadir á las longitudes de las reglas, las pequeñas separaciones del extremo de la lengueta del 0 de su graduacion. Para regularizar mas el movimiento de la lengueta, tiene esta en uno de sus cantos una cremallera que engrana con un pequeño piñon el cual recibe movimiento del boton *m*. Para apreciar con mas exactitud hay un nonio *n*.

LECCION 5.ª

NOCIONES ELEMENTALES DE LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS, Y PARTES QUE CONSTITUYEN LOS INSTRUMENTOS DE MEDICION, CONSIDERADAS AISLADAMENTE, Y SUS RECTIFICACIONES.

Medida ya la base y teniendo que apoyar sobre ella la triangulacion, debemos pasar á medir los ángulos. Los instrumentos destinados á esta medicion se llaman *goniógrafos* ó *goniómetros*. Los primeros son los que dan trazado el ángulo por la direccion de los lados que lo forman, y los segundos dan á conocer su valor gradual.

Cualquiera de las dos clases que se emplee, tendrá un grado de exactitud marcado, dependiente de lo perfecto de su construccion, de la graduacion mas ó menos minuciosa de su limbo, (si lo tiene), y de su nonio, es decir, que nos será fácil conocer el error φ que podemos cometer en cada una de las mediciones.

Conocido dicho ángulo φ en los intrumentos de que se disponga, será fácil ya la eleccion del mas conveniente de ellos, para la operacion que vayamos á emprender. Parece que debiamos escoger siempre aquel cuya apreciacion fuese mayor, ó lo que es lo mismo, que tuviese el valor de φ mas pequeño, pero los instrumentos de gran precision son de difícil manejo por lo complicado de su mecanismo, y una gran exactitud en el ángulo, tal vez innecesaria, no nos compensaria el mayor tiempo empleado en la medicion.

Está pues concretada nuestra cuestion á elegir para cada caso, un instrumento que produzca la aproximacion extrictamente necesaria en las medidas, y que sea el mas sencillo de cuantos con dicha condicion cumplan por mas que haya otros de mayor apreciacion.

La desigualdad $\mathrm{M}\,e > b\,\text{sen.}\,\varphi$, entre la escala, el error gráfico, el lado mayor que se mida y el error que en la medida ha podido resultar para el ángulo, nos proporciona el medio de resolver la cuestion.

Conocidas ya $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots..$ apreciaciones límites de los instrumentos de que podemos disponer, la escala M, y el error e tolerable en el papel, se tiene:

$b < \frac{\mathrm{M}e}{\text{sen.}\,\varphi}$; sen. $\varphi < \frac{\mathrm{M}e}{b}$, lo que nos dá á conocer el valor límite de sen. φ que es $\frac{\mathrm{M}e}{b}$, pudiendo elegir ya de los aparatos el que se separe menos del valor encontrado, por defecto. Notamos que conforme b sea mayor, φ tendrá que ser menor, es decir, que cuando mayor sea la extension de los levantamientos, mejores tienen que ser los medios usados. En las operaciones geodésicas se usan por esta causa los de extrema precision, y de menor en los topográficos.

Antes de entrar de lleno en la descripcion de estos últimos y en la explicacion de su uso, es indispensable conocer las partes que por su conveniente reunion, forman cada uno de dichos aparatos.

Nos ocuparemos, pues, sucesivamente de los *tornillos, limbos, alidadas, anteojos* y *niveles* como partes constituyentes, tratando tambien de las condiciones que deben reunir para que su uso no de lugar á errores; y como aparatos de suspension, estabilidad, y uso cómodo de los instrumentos, mencionaremos tambien las *rodillas, plataformas*, y *trípodes* mas comunmente usados, completando estos conocimientos elementales, los del *nonio* y del *tornillo micrométrico,* cuyo objeto es atenuar los defectos de observacion que puedan cometerse.

Tornillos.—Varias son las clases de estos que tenemos que considerar. Excusando la definicion, conocida en Mecánica, de esta parte de los aparatos, y tambien su teoría, ajena á este lugar, citaremos solo las disposiciones en que suele presentarse.

Distínguense los tornillos en de *tuerca fija* y de *tuerca movible;* en los primeros es el tornillo el que avanza ó retrocede en su tuerca de invariable posicion; figura 15 (lámina 3.ª) y en los segundos, mientras el tornillo permanece fijo, adelanta la tuerca ó retrocede, recorriendo su longitud, fig. 16 (lám. 3.ª)

Tornillos de union.—Se usan para juntar invariablemente dos partes del aparato. Pueden ser de

::

varias clases, pero los mas generales son los representados en la fig. 17 (lám. 3.ª)

Trátase de unir las piezas B y C por el tornillo AA′ cuya cabeza es A; la pieza B tiene en su parte central un taladro cilíndrico, donde entra holgadamente la parte estrecha del tornillo; la pieza C lleva la tuerca y se supone fija. Dando vueltas al tornillo se aprieta la pieza B sobre la C; pero un esfuerzo grande podia hacer girar la cara inferior de aquella sobre la superior de esta, lo cual se evita poniendo otro tornillo de forma igual.

Tornillos de presion.—Sea fig. 18 (lám. 3.ª) un cilindro ó prisma AB sobre el cual resbala una abrazadera tambien cilíndrica ó prismática M. Podemos detener el movimiento de la abrazadera por medio de un tornillo que teniendo su tuerca en ella, apriete su cara opuesta sobre la superficie exterior correspondiente del cilindro ó prisma. Con el objeto que la punta del tornillo no deforme la superficie en donde se apoya, hay en la parte interior de la abrazadera y sostenido por uno de sus extremos, un fleje delgado de hierro *rs*, y este, recibiendo directamente la accion del tornillo de presion, apoya sin deformar sobre la superficie prismática.

Cuando una pieza del aparato puede girar sobre otra, y existe un tornillo que las una de modo que formen un solo cuerpo, este es un tornillo de presion. Para conocer su forma en este caso, sea AB una pieza cilíndrica de poca altura, fig. 19 (lám. 3.ª), en cuya parte central se eleva un pivote *h*. Sea tambien CD otra pieza cilíndrica, que lleva una manga ó eje hueco *f*, en el que se introduce el pivote *h*, de manera que alrededor de él puede girar la pieza CD sobre la AB. Lleva esta una lengüeta *n* en la cual hay trabajada una tuerca. Existe introducido en ella un tornillo P, que lleva una pieza en escuadra *m* dispuesta de tal modo que la parte del tornillo introducido en dicha pieza no tenga filete, con el objeto que no sea arrastrada en el movimiento de rotacion horizontal.

Desde el momento en que se den vueltas al tornillo, la pieza *m* aprieta la CD sobre la AB haciéndolas formar un solo cuerpo.

Tambien se suelen disponer los tornillos de presion como indica la fig. 20 (lám. 3.ª) siendo la pieza *mm* una lengueta fija al disco CB.

Tornillos de ajuste, coincidencia ó movimiento lento.—Estos, como su nombre indica, tienen el objeto de dar movimientos pequeños á las partes de los aparatos á que esten unidos, lográndose aumentar así la precision en las observaciones.

Para conocer su necesidad, supongamos que se tratan de hacer coincidir ciertas divisiones de dos reglas. La imperfeccion de los movimientos que á mano podemos comunicarles hará que esta coincidencia sea muy difícil sino imposible de efectuar exactamente. Sean las dos reglas AB y CD. fig. 21 (lám. 3.ª) resbalando la segunda á corredera sobre la primera. Hagamos que recorra tambien la longitud de la AB, una abrazadera M que tiene un tornillo de presion *q* para detener este movimiento cuando se quiera. La regla CD tiene un suplemento N taladrado á rosca para recibir un tornillo T, que á poca distancia de su cabeza tiene una esfera P, que gira sin adelantar en un hueco practicado en el saliente de la abrazadera M. Se concibe que si se afloja el tornillo de presion de esta, ella con la regla CD que la está unida por T, podrán tomar un movimiento tan rápido como se quiera; pero si estando ya cercana la coincidencia de las divisiones indicadas, apretamos el *q*, dando despues vueltas al T, se irá acercando la regla CD á la abrazadera con un movimiento tanto mas lento, cuanto menor sea el paso del tornillo, siendo de suma facilidad, valiéndose de un microscopio, el detener dicho movimiento cuando sea perfecta la coincidencia.

Lo que hemos dicho de las reglas lo podemos aplicar á la manera de efectuar las coincidencias de las divisiones de una corona circular, recorriendo otra del mismo centro, como está indicado en la fig. 22 (lám. 3.ª). Algunas veces los tornillos de presion y coincidencia van juntos y entonces la tuerca de este está trabajada en la abrazadera de aquel, tal como se vé indicado en la figura 23 (lám. 3.ª)

Tornillos de correccion.—Son muy pequeños generalmente, y sirven para efectuar ligeras modificaciones en los aparatos para obtener en su uso mayor precision; tienen la forma de los ordinarios, con la única diferencia de existir en su cabeza, uno ó mas huecos destinados á recibir llaves parecidas á las de reloj, con las cuales se les imprimen movimientos.

Tornillos de nivelacion.—Son los que sirven para poner horizontal una parte cualquiera de un aparato, siendo de esta clase los que forman los apoyos de la generalidad de los instrumentos topográficos.

Partes de los aparatos destinados á darles estabilidad y hacer su uso cómodo.—(*) Es necesario que los aparatos estén unidos con sus piés de tal manera, que no solamente tengan una fijeza completa en su posicion despues de colocados, sino que esta colocacion permita inclinarlos del modo necesario, y los deje á una altura que haga cómoda la posicion del observador.

Cubos ó mangos huecos.—Son en su clase los mas sencillos medios de union de los aparatos con sus piés.

Consisten en un tronco de cono hueco figura 24 (lámina 3.ª) terminado en su parte superior por una pieza cilíndrica roscada, donde se atornilla la inferior del instrumento. La parte hueca está destinada á recibir la espiga unida al trípode, siendo el giro alrededor de esta espiga el único movimiento que tiene la totalidad del aparato cuando está unido al cubo. Lleva este para detener dicho movimiento cuando se quiera un tornillo de presion en uno de sus costados.

Rodillas.—Existen sistemas perfeccionados de union que se llaman así, con las cuales se pueden dar á los aparatos las inclinaciones que se deseen. La mas sencilla es

(*) Adelantamos su explicacion á las de los limbos, alidadas, etc., porque así se comprende mejor la de estos.

la de *nuez*. Consiste en un mango hueco A, figura 25 (lámina 3.ª) que tiene en su parte superior dos piezas cóncavas esféricas en forma de conchas B, que están atravesadas por un tornillo C de presion. En el hueco esférico comprendido entre las dos piezas se introduce una esfera P de metal, que lleva la parte inferior del sosten del instrumento. En M está la rodilla ya armada, la cual presenta el inconveniente de que basta una ligera presion sobre el aparato para hacerle variar de inclinacion, pues se vence la resistencia de la esfera á girar sobre las conchas, y el de que marcada una línea horizontal en alguna direccion del aparato, para marcar otra hay que perder la primera; por lo cual se ha sustituido por la:

Rodilla de cilindros.—Consiste esta, figura 1.ª (lámina 4.ª) en dos cilindros A y B que se cortan en ángulo recto. En los extremos del A existen dos muñones terminados en una parte roscada que sobresale por los soportes C, C′, en que dichos muñones se apoyan.

Se introducen en dicha parte roscada unas clavijas ó tuercas movibles *o*, que fijan al apretarse el cilindro á sus soportes. El B está unido en iguales condiciones con los soportes D, D′, fijos en un disco M destinado á recibir el aparato. Este tiene que tener un tornillo en su parte inferior que penetra en el taladro P del disco M, pudiéndose apretar contra él á voluntad por medio de una tuerca movible *n*, en cuyo caso no existirá alrededor del taladro P el giro que puede tener lugar cuando la tuerca esté floja. La posibilidad de giro alrededor de los ejes *o*, *o′*, P, la disposicion de estos, y la facultad de detener alguno ó todos los movimientos, nos hacen conocer que el aparato puede tomar todas las inclinaciones y que una vez conseguida la que se quiera, se puede establecer la perfecta estabilidad. El apoyo N es la meseta de donde salen los piés. Existen otras muchas clases de rodillas que por su número y sencillez de forma sería prolijo é innecesario enumerar.

Plataformas.—Son aparatos de union que sirven para dar á los instrumentos de que forman parte las inclinaciones convenientes, y mas comunmente para conseguir la horizontalidad ó la posicion vertical de alguno de sus planos, por medio de los oportunos tornillos, muelles y charnelas.

Las mas usadas son las que siguen:

Plataforma de cuatro tornillos verticales.—Consiste en una pieza AB fig. 2.ª (lám. 4.ª) unida por una espiga $\overline{c}$ al sosten RQ de todo el instrumento. Lleva dicha placa AB en su parte superior, las tuercas s, s', s''..., de cuatro tornillos t, t', t''..., los cuales apoyan sus cabezas en unos salientes de otra pieza circular CD de donde parten los piés. Lleva esta pieza CD un suplemento hueco M, en el cual se introduce el extremo esférico C' de la espiga $\overline{c}$C', el cual puede girar alrededor de su centro. El movimiento inverso de cada dos tornillos opuestos produce cambios de inclinacion en dos líneas perpendiculares que pueden llevar á la horizontalidad el plano en que se encuentran.

En realidad no hacen falta mas que los tres tornillos t, t', t'', con los cuales se puede conseguir poner horizontal primero la línea tt', y por el t'' se horizonta la perpendicular á aquella.

Plataforma de dos tornillos y charnelas.—Si en vez de ser el giro alrededor del punto central como en el caso anterior se hace que dicho giro se efectúe alrededor de los puntos t y t'', colocando en vez de los tornillos t y t'' charnelas, conservando como antes los t', t''', y suprimiendo la esfera C' y pieza M, tendremos tambien la facultad de variar la inclinacion de las dos líneas perpendiculares, obteniendo por ellas la horizontalidad del plano.

La fig. 3.ª (lám. 4.ª) nos da idea de una plataforma de dicha clase, y la 4.ª de una modificacion de esta.

Plataforma de cuatro tornillos horizontales.—Consta de una placa circular AB que sostiene el aparato, fig. 5.ª (lám. 4.ª) la cual lleva una espiga CD terminada por su parte inferior en un cubo E, que se introduce en una caja tambien cúbica FG, cuya parte mas baja lleva los pies del aparato. Atraviesan las cuatro caras de la caja cuatro tornillos horizontales cuyos extremos apoyan en el cubo E, y por movimientos inversos de cada dos tornillos opuestos, se logra tambien variar la inclinacion de dos líneas constantemente perpendiculares.

Plataforma de dos tornillos y resortes metálicos.—La pieza AB que sostiene el aparato tiene una espiga que termina en una esfera M, la cual puede girar dentro de una pieza N unida al disco CD que lleva los piés, fig. 6.ª (lám. 4.ª) Existen además dos tornillos E, E' y dos muelles $F\overline{F}$, $F'\overline{F}'$ que apoyan en AB por F, F', tendiendo á elevarla. Está dispuesta de tal modo la plataforma, que uniendo la punta de un tornillo con el punto de apoyo de un muelle, resulta una línea perpendicular á la que une el otro tornillo con el punto de apoyo del otro muelle, cuyas dos líneas varían de inclinacion apretando ó aflojando á voluntad los E y E'.

Piés ó sostenes.—Llámanse así los medios destinados á sostener los aparatos á la altura conveniente para la comodidad de su uso, y una vez fijos en esta posicion, hacerla estable, reuniendo además las circunstancias de union perfecta con la totalidad del instrumento y facilidad en el transporte. Son de varias clases, y citaremos los mas usados.

Bastones ó chuzos.—Son estos unos cilindros ó prismas octogonales, fig. 7.ª (lám. 4.ª) de $1^m,3$ de longitud, terminados en su parte inferior por un regaton de hierro destinado á clavarse en el suelo, y por la superior por una parte tronco-cónica que se introduce en el mango hueco del instrumento, pudiendo este girar alrededor de dicha espiga cuando esté flojo el tornillo. Se consigue la verticalidad del chuzo por medio de una plomada.

Trípodes.—El chuzo tiene el inconveniente de poca estabilidad y de no poderse emplear en terreno duro, por lo cual es de poco uso, sustituyéndole los *trípodes*, que son de varias formas.

Consiste la mas sencilla, fig. 8.ª (lám. 4.ª) en un prisma triangular de madera A, terminado por una espiga B. En cada una de las caras laterales del prisma existen

::

unos pernos roscados, que se introducen en los taladros que llevan en su parte superior los tres piés K, K′, K″, los cuales por la inferior terminan en regatones de hierro *m* que se apoyan en el terreno. La parte de los pernos que sobresalga de los piés, sirve para introducir unas tuercas movibles *p* que los sujetan al prisma.

Otro de los trípodes usados es el de *seis brazos*, representado en la fig. 9.ª (lám. 4.ª) Se compone de una pieza A, que lleva una espiga B, destinada á recibir el mango del aparato. En cada uno de los lados *m*, *m* de las partes salientes de la pieza, se ajustan por medio de pernos y clavijas, brazos *p*, *p* que se reunen dos á dos en su parte central, y en la inferior por un casquillo de cobre R, R, terminado en una punta de hierro. Con el objeto de que sea mas fácil su transporte, suele tener sus piés divididos en dos partes que se ajustan las unas á las otras por medio de tornillos *t*, *t*.

Se emplea tambien el *trípode de muelle* que consiste figura 10 (lámina 4.ª) en uno de tres, ó mas comunmente seis brazos, que en vez de tener espiga en su meseta, lleva en ella un taladro, con el cual entra un pivote *s* roscado por su parte superior y destinado á recibir el hueco de la inferior del aparato. Rodea á este pivote por la parte inferior de la meseta un cilindro hueco de laton M sujeto á ella, y en el cual enchufa otro N con un taladro en su base, que sirve para que pase por ella el extremo *s′* de la varilla *s*. Interior á dichos cilindros hay un muelle en espiral, que rodea la varilla, cuyo extremo inferior está roscado y deja correr por él una tuerca movible *a*, terminando dicha varilla en un boton acordonado *b*. Para unir este trípode al aparato se empieza por atornillar el hueco de la parte inferior de este al extremo *s* para lo cual se hace girar el boton *b*. Conseguido esto, se dan vueltas á la tuerca *a*, la cual oprime en su base al cilindro N, haciéndole introducir en el M, y logrando así que el muelle tienda á separar el M de la meseta, oprimiendo al aparato contra ella y dándole así perfecta estabilidad.

El trípode que acabamos de explicar se ha modificado recientemente, suprimiendo el cilindro N del cual solo queda la base inferior representada en N'; figura 11 (lámina 4.ª). En vez del boton acordonado *b*, figura 10, existe en la 11 un mango *b'*, terminado por su extremo superior por una parte cilíndrica que está roscada, pudiendo introducirse esta en una tuerca que lleva inferior é interiormente el cilindro M. Compréndese por la figura, que en el momento en que se apriete hácia arriba el mango *b'*, introduciendo el tornillo ó espiga *s* en el hueco del aparato, este estará perfectamente sujeto al trípode por el esfuerzo de tension del muelle M, fuertemente comprimido por la rodaja N'.

Los aparatos modernos están comunmente sostenidos por unos trípodes de fácil transporte que suelen llamarse *trípodes ingleses*, fig. 12 (lám. 4.ª). Forma la reunion de los tres piés *a*, *a*, *a*, un doble tronco de cono, teniendo la union lugar por las bases mayores MM. La seccion perpendicular á la longitud por MM está representada en M'. Cada uno de los piés termina por su parte inferior en unos regatones de hierro *b, b, b* prolongacion de su forma, y por la superior por unas piezas metálicas *m, m, m* sujetas á dichos piés con tornillos y terminadas en espigas *q*. Tienen estas espigas un taladro por donde pasa un perno terminado en roscas, en las cuales se introducen tuercas que sujetan las espigas á una pieza *p*, tambien roscada en su parte superior *c*; y para que esta rosca no se deforme, se cubre con otra pieza D llamada *sombrerete*. Los piés se mantienen unidos cuando no se opera por tres anillas *x, x, x*.

Anteojos.—Se usan en los aparatos topográficos los astronómicos, generalmente, y algunas veces los terrestres, provistos de sus correspondientes retículos. Con el objeto de evitar repeticiones dejaremos su rectificacion para hacerla juntamente con las correspondientes á las alidadas diciendo ahora solamente que las cerdas del retículo están sujetas á una pieza, que moviéndose por medio de tornillos de rectificacion, permite variar la posicion del punto de cruce de aquellas al mismo tiempo que la rotacion del tubo en que todo el ocular está colocado, deja que cada cerda pueda tomar todas las posiciones.

Limbos.—Para obtener con los instrumentos los valores de los ángulos expresados en cantidad gradual, se emplean los *límbos*. Consisten estos en unos discos circulares de metal, en cuya superficie vá trazado un círculo de menor rádio y concéntrico al que limita el disco. En la corona circular que así resulta vá marcada la graduacion. Algunas veces el disco no es completo, consistiendo solo en la corona circular reunida al centro por travesaños situados en direccion de los rádios. Este aparato puede no ser de perfecta construccion, y hay que someterlo á las verificaciones siguientes:

1.ª *Ver si hay desigualdad en las divisiones.*—Para conocer este defecto se aplican las puntas de un compas de tal manera que abarquen un número exacto de aquellas, 7 por ejemplo, y en seguida se traslada la misma abertura á otros puntos del limbo á ver si marca otras siete, y si esto se verifica será prueba de la buena construccion del aparato.

2.ª *Escentricidad en el limbo.*—Como tomamos la magnitud de los ángulos por el arco que abrazan sus lados en el limbo, claro es que para no cometer error todos deben tener su vértice en el centro, y si asi no sucede, nos resultarán defectos en la medicion. Para conocer este inconveniente en el aparato, se miden varias veces el mismo ángulo empezando desde distintas graduaciones del limbo, y si no resulta el mismo número de grados comprendido entre los dos lados, tendremos seguridad de la mala construccion.

Existiendo cualquiera de los dos defectos citados, el aparato debe desecharse.

Alidadas.—Si colocados en el vértice de un ángulo que queremos medir y en el plano de los puntos que limitan sus lados, dirigimos á ellos dos reglas, los trazos que marquemos por los cantos de ellas nos indicarán la *abertura del ángulo deseado,* y si las dos reglas se apoyan sobre un limbo, la parte de la graduacion comprendida entre los dos cantos, nos dará el *valor gradual* del mismo. Este es el fundamento de las *alidadas*, que se dividen en dos clases principales que vamos á dar á conocer.

Alidada de pinulas.—Se compone de una regla de metal AB, sobre la cual se elevan otras dos P y P′, figura 13 (lámina 4.ª) que pueden girar á charnela sobre $c\,\bar{c}$, $c'\,\bar{c}'$, y sujetarse despues de girar, perpendicularmente á la AB, por medio de los rebordes *mm*, en los cuales aprieta una clavija *s*, la que al dar un cuarto de giro deja completamente libres las P, P′. Llevan estas unas ranuras *n*, *n* en su parte central y en sentido de su longitud, y unos espacios huecos *r*, *r* divididos en dos partes iguales por cerdas *t*, *t′*, prolongacion de las ranuras correspondientes. Estas son dos líneas perpendiculares á la regla AB, y el plano que las contiene, llamado *plano de colimacion*, es tambien perpendicular á aquella. Está la regla rebajada por la parte $\bar{m}\,\bar{n}$ de tal manera que la $\bar{m}\,\bar{n}$ es la traza del plano de colimacion sobre el AB, y dicha $\bar{m}\,\bar{n}$ toma el nombre de *línea de fé ó de colimacion*, sirviendo de regla de trazado el canto rebajado, el cual tiene una escala marcada, generalmente la de mil partes.

Pueden las alidadas tener para su uso diferentes disposiciones, como son: 1.º Completamente sueltas, y pudiendo girar alrededor de un punto cualquiera de su direccion. 2.º Girando alrededor del punto medio de su longitud; y 3.º Usándose dos alidadas, de las cuales, una fija, marca la direccion de uno de los lados del ángulo, y la otra movible va á buscar la otra direccion. En todos los casos el uso es sumamente sencillo, pues se reduce á colocarse en el vértice del ángulo que se quiere medir, el cual tiene que servir de punto de giro á las alidadas, cualquiera que sea su disposicion. Se dirige la visual al punto de la izquierda, tomando la ranura por objetivo y la cerda opuesta por ocular, teniendo cuidado de que el plano de la regla sea horizontal. Se da el giro alrededor del vértice y se mira al segundo punto. Las líneas que se hayan trazado por las de fé de las reglas en las dos posiciones, formarán el ángulo pedido si se usa el instrumento como goniógrafo; y si como goniómetro, las divisiones de un limbo cuyo centro sea el vértice del ángulo, comprendidas entre las dos posiciones de la regla nos indicarán tambien el valor de él.

Adviértase que por este procedimiento le hemos reducido al horizonte, es decir, hemos medido el ángulo plano que á su vez mide al diedro formado por los planos verticales de los dos lados, siendo necesario para efectuarlo que las P y P′ sean de bastante altura para que las visuales puedan abarcar gran extension en sentido vertical; si se quisiera medir el ángulo en el plano de los objetos, se seguiría el mismo procedimiento con la sola diferencia de colocar en él la regla AB, antes horizontal.

No siempre la alidada es perfecta y es necesario someterla á verificaciones, y hacer en consecuencia de ellas las correcciones á que haya lugar; son dichas verificaciones y correcciones:

1.ª *Ver si el canto de la regla es una línea recta;* para lo cual no hay mas que marcar con un lapiz el trazo de su posicion, é imprimir luego un giro alrededor de dicho canto, debiendo coincidir este con el trazo marcado, despues de concluir el movimiento. Si así no sucede, la regla no es recta y se debe desechar.

2.ª *Observar si las cerdas son perfectamente verticales cuando la regla sea horizontal.*—Se coloca la regla AB en posicion horizontal, y se dirige una visual por la pínula al hilo de una plomada, con el cual debe confundirse la cerda en los distintos puntos de su longitud, se da la vuelta á la alidada y se hace la observacion indicada con la otra ranura y opuesta cerda, y efectuándose en los dos casos la coincidencia podemos estar seguros de la verticalidad que se queria comprobar. Si la coincidencia de cerda y plomada no se efectúa, *careciendo de correccion aquellas,* es falsa la alidada; y si existe algun tornillo que las pueda imprimir un pequeño movimiento se hace por él la correccion.

3.ª *Verificar si el plano de colimacion tiene por traza sobre el de la regla la línea de fe.*—Para ello dirigiremos figura 14 (lámina 4.ª) por una ranura y la cerda opuesta una visual á un punto lejano B, y marcaremos con lapiz el trazo AC por el canto de la regla. Invirtiendo esta de modo que dicho canto venga á coincidir con el trazo marcado, el punto A pasando á C y vice versa, la visual dirigida en el mismo sentido debe encontrar al punto B, en cuyo caso, este y los A y C, determinan con las cerdas un plano único, cuya traza sobre el de la regla es la línea de fé.

En el caso que la segunda visual no encontrase al punto B, se podia hacer por tanteos la correccion, si las pínulas tuviesen movimientos laterales, pero si esto no sucede, no podrá emplearse la alidada en la ejecucion de trabajos de importancia, pues variará en los planos la posicion absoluta de las líneas aunque no la relativa, supuesto que *los ángulos que formen unas direcciones con otras serán los verdaderos*.

Supongamos para demostrarlo que en la figura 15 (lámina 4.ª) AB es la verdadera línea de fé de la alidada en su primera posicion, y AB' el trazo marcado por el canto de la regla, que no coincide con aquella direccion.

Sean $A\overline{B}$, $A\overline{B}'$, las posiciones de las mismas líneas en la segunda de la alidada. El ángulo BAB' pertenece al aparato, y gira con él sin variar de valor hasta colocarse en $\overline{B}A\overline{B}'$, con lo cual tenemos demostrado que el ángulo $B'A\overline{B}'$ medido, es igual al verdadero $BA\overline{B}$, por ser suma del $B'A\overline{B}$ con los iguales $B'AB$ y $\overline{B}A\overline{B}'$. Pero las direcciones absolutas de las líneas han variado puesto que la AB' debia seguir la de AB y la $A\overline{B}'$ la de $A\overline{B}$.

En un plano cuyos ángulos se hayan encontrado con una alidada que adolezca de dicho defecto, se tendrá que marcar la posicion verdadera de las líneas por medio de una *orientacion,* de la cual nos ocuparemos mas adelante.

Las alidadas que llevan *nonio* y aun algunas de las que no lo llevan, tienen un cero en el extremo de su línea de fé, destinado generalmente á marcar el punto de partida en las mediciones.

Suelen llevar tambien sobre la regla un nivel, destinado á ponerlas horizontales.

4.ª Cuando para medir los ángulos se usan dos alidadas, una fija y otra movible, se tiene que comprobar *si sus planos de colimacion coinciden, cuando coincidan sus líneas de fé*. Puede hacerse de dos modos la verificacion: haciendo coincidir las líneas de fé y mirando por las ranuras si las cerdas de las dos alidadas coinciden exactamente; ó bien hacer coincidir las cerdas y ver si se efectúa la coincidencia de las líneas de fé. El segundo sistema es mejor que el primero, porque por la separacion de las líneas de fé, si las alidadas se mueven sobre un limbo se viene en conocimiento del valor gradual del ángulo error.

Este será el que se cometa en la medicion de todos los ángulos con tal que se efectúe siempre en el mismo sentido, y que sea la misma la alidada que queda fija, circunstancias que se procura siempre satisfacer.

Alidadas con anteojo.—Se componen figura 16 (lámina 4.ª), de una regla AB de metal, rebajada por uno de sus lados mayores, donde tiene que estar la línea de fé, con el objeto que se puedan marcar los trazos por ella, y de un anteojo MN sostenido en un collar P, compuesto de dos mitades que pueden girar alrededor de una charnela C, y permite sacar el anteojo é invertirlo de posicion, fijándolo por medio de las chavetas *m*, introducidas en unos taladros que llevan unas orejetas O. Invariablemente unido á los collares del anteojo existe un eje horizontal D, que puede girar alrededor de un anillo r, que lleva un soporte vertical V. Dicho eje D debe ser perpendicular al eje óptico del anteojo y al canto de la regla, y tiene la longitud necesaria para que el plano vertical que pasa por aquel tenga por traza sobre ella, supuesta horizontal, la línea de fé A z. El anteojo puede girar describiendo su eje el citado plano vertical, permitiendo de este modo encontrar con mayor comodidad los ángulos proyectados sobre el horizonte; hay que advertir que por construccion es el eje de rotacion perpendicular al de figura del anteojo.

Las verificaciones son las siguientes, siendo su uso igual al de la de pínulas, con la diferencia de dirigir las visuales por el eje óptico.

1.ª *Que el canto de la regla que sirve de línea de fé sea recto* lo cual se verifica como en la de pínulas.

2.ª *Que el eje óptico sea perpendicular al de rotacion* para que el anteojo describa un plano y no una superficie cónica. Sea AB la seccion causada en el anteojo por un plano que pasa por su eje de figura y por el de rotacion fig. 17 (lám. 4.ª)

Si damos vueltas al anteojo en sus collares despues de haber dirigido la visual á un punto lejano, pueden ocurrir dos casos, segun que el eje óptico coincida con el de figura, y se verifique por consiguiente la perpendicularidad, ó que dicha coincidencia no se efectúe. En el primero, si m es el punto á donde se ha dirigido la visual, el giro se verificará alrededor de la línea Am, y cuando hayamos dado una semi-revolucion y el punto N haya ido á parar á N′, mirando por el anteojo se verá aun el punto m, lo cual prueba la buena disposicion del aparato (*). Sino sucediera así y al dirigir la primera visual nos fijasémos en un punto $\bar{m}$, lo veriamos en la direccion $\bar{A}\,\bar{m}$, siendo esta la del eje óptico: y al dar el giro, cuando N viniese á N′, la $\bar{A}\,\bar{m}$ tomaría la posicion $A'\,\bar{\bar{m}}$, y el punto $\bar{\bar{m}}$ sería el que viésemos al dirigir la segunda visual.

Tambien puede hacerse dicha verificacion dando el giro alrededor del eje NP despues de dirigida la primera visual, y cambiar despues de la semi-revolucion el anteojo, dándole la vuelta de manera que el ocular vaya donde ha quedado el objetivo y vice versa. Si el eje óptico coincide con el de figura, el punto m se encontrará en el plano vertical que marquen las visuales que se obtengan dando movimientos de cabeceo al anteojo, y sino, se obtendrán los dos puntos $\bar{m}, \bar{\bar{m}}$ para las visuales como en el caso anterior.

Conocido ya el error, para corregirlo, es necesario colocar la línea $\bar{A}\,\bar{m}$ en direccion de la $A\,m$ para lo cual hay que hacerla recorrer el ángulo $\bar{m}\,o\,m$, mitad exacta del que forman las dos visuales dirigidas, $A'\,\bar{\bar{m}}$ y $\bar{A}\,\bar{m}$ desdesde el punto donde se observa, que en este como en todos los casos se llama *punto de estacion*.

Para marcar la direccion $o\,m$ con la cual debe concurrir la $\bar{A}\,\bar{m}$, como $\bar{m}$ y $\bar{\bar{m}}$ se han tomado á ojo próximamente á la misma distancia, y por otra parte

(*) Hay que advertir que esta rectificacion es general para todos los anteojos de los aparatos, para hacer coincidir el eje óptico con el eje de figura.

las $\bar{m}\,m$ y $\bar{\bar{m}}\,m$ son sumamente pequeñas comparadas con las $o\,\bar{m}$, $o\,\bar{\bar{m}}$, se puede considerar el triángulo $\bar{m}\,o\,\bar{\bar{m}}$ como isósceles, en el cual la bisectriz del ángulo en o divide al lado opuesto en dos partes iguales.

Se coloca, pues, en el terreno un jalon á la mitad de la distancia $\bar{m}\,\bar{\bar{m}}$ y por medio de unos tornillos de rectificacion que tiene el retículo del anteojo, se afloja el uno y se aprieta el opuesto, hasta que el punto de cruce de las cerdas coincida con dicho jalon. Repitiendo algunas veces la misma verificacion y correccion, se llega á obtener la union perfecta de los ejes óptico y de figura, y en consecuencia la perpendicularidad entre aquel y el de rotacion.

3.ª *El plano descrito por el eje óptico del anteojo tiene que ser vertical.* (*) Para cerciorarse de ello se dirige el anteojo al hilo de una plomada ó arista lejana de un edificio bien construido, con la cual se hace coincida la cruz filar, y se da un movimiento de cabeceo al anteojo en el cual no debe salir dicha cruz del hilo ó arista que se observe, en cuyo caso el expresado hilo ó arista y la posicion del observador forman un plano vertical que es el que describe el eje óptico por la sucesion de sus posiciones.

Si no se verificase en todo el movimiento, la perfecta coincidencia, sería indicio de que el plano descrito no es vertical, ó lo que es lo mismo que no es horizontal el eje D, y entonces habria que corregir por tanteos la desviacion, si dicho eje D tuviera tornillos

(*) Esta correccion es tambien general para todos los anteojos.

á propósito, y en caso contrario debe desecharse el aparato.

Las dos últimas correcciones que se han indicado se hacen juntas en la mayor parte de los instrumentos que llevan anteojo. Sin haber hecho la primera, dirijámoslo al extremo del hilo de una plomada con el cual se haga coincidir la cruz de las cerdas y si se aparta en el movimiento de cabeceo dicha cruz del expresado hilo AB fig. 18 (lám. 4.ª) puede suceder ó que describa una línea oblícua AC ó una curva AD. En el primer caso, estamos en el en que siendo perpendicular el eje de rotacion al óptico del anteojo, aquel no es horizontal, efectuando la correccion por los tornillos de dicho eje de rotacion. Si la línea descrita es curva, conoceremos que el eje óptico no es perpendicular al de rotacion, porque describe aquel un cono en lugar de un plano, y recurriremos por tanteos á los tornillos del retículo hasta que dicha curva AD se confunda con la recta AC ú otra oblícua, y conseguido esto se obtendrá la coincidencia de la AC con la AB por los tornillos de rectificacion del eje de rotacion.

4.ª *El plano vertical que describe el eje óptico del anteojo, tiene que marcar por traza sobre la regla, la línea de fé.* Esta verificacion se hace como la análoga en la alidada de pínulas, marcando en direccion de la primera visual la línea de fé por un trazo de lapiz, invirtiendo la regla, ajustándola sobre la línea antes marcada, volviendo el anteojo de modo que el ocular vuelva á estar al lado del observador, y dirigiendo otra visual, que si el aparato está bien dispuesto debe ir á parar á un punto de la misma vertical que el antes observado, teniendo entonces la seguridad de que la línea de fé es la traza del plano descrito, pues las dos veces dicha línea está contenida en él, en donde tambien se encuentran la plomada y el punto de estacion.

El error de colimacion como ya indicamos no influye en el valor de los ángulos.

Niveles.—Aunque la explicacion de estos aparatos no es de este lugar, como todos los instrumentos medidores de ángulos los tienen, es preciso adquirir alguna nocion de ellos, de su rectificacion y de su uso, para disponer de la manera conveniente sus apoyos. Como todos los niveles que suelen llevar los goniómetros son de aire, á ellos nos limitaremos aquí.

Consiste el *nivel de aire* en un tubo cerrado por sus dos extremos, y de la figura indicada en AB, figura 19 (lámina 4.ª) lleno de agua, y dejando solo ocupado por aire un pequeño espacio que constituye una burbuja, la que sube á la parte superior por efecto de su menor densidad, determinando una línea horizontal la tangente á ella cuando ocupe la parte céntrica del tubo, el cual tiene dos puntos de color, ó dos rayas trazadas en el cristal para marcarla.

Dicho tubo está encerrado generalmente en un estuche de laton, cilíndrico C, con una abertura en la parte superior, destinada á ver los movimientos de la burbuja. Este tubo cilíndrico puede girar en una charnela que existe en uno de sus extremos D, y es obligado á ello por un tornillo de rectificacion F que hay en el otro. Por complicados que sean los apoyos de los niveles siempre se podrán reducir en suma á dos piés, uno de los cuales puede variar de longitud.

La única rectificacion del nivel que ahora necesitamos es la *igualacion de sus apoyos*. Supongamos un nivel tal como AB, situado en una posicion horizontal sobre un apoyo oblícuo PT, fig. 20 (lám. 4.ª)

En esta posicion la burbuja está en el punto O′. Si imprimimos al nivel un movimiento de rotacion alrededor de la línea OO′ perpendicular al terreno por el punto central, hasta que B se coloque en B′, y A en A′, dejando de ser el nivel horizontal, la burbuja correrá hácia el extremo B′, y vamos á ver el giro que tenemos que dar al nivel y á su apoyo, para que aquel tenga sus piés iguales y este sea horizontal. Tracemos por O la horizontal OH y por O′ la O′S, paralela al terreno, que será al propio tiempo bisectriz del ángulo BO′A′, por la posicion del eje alrededor del cual se ha efectuado el giro. De modo que $BO'S = SO'A' = HOT$, y si por cualquier medio hacemos girar la B′O′ de modo que el punto A′ vaya á parar á $\overline{A}$, el nivel tendrá ya los piés iguales y estará rectificado, lo que se marcará por la direccion $\overline{A}\,\overline{B}$, indicada por la posicion de la burbuja intermedia entre la central y la que habrá tomado despues del giro. Si ahora se quiere poner la línea PT horizontal, lo conseguiremos imprimiéndola un giro igual alrededor del punto O; en cuyo caso A′B′ se habrá colocado en direccion de AB y la burbuja volverá á sus referencias, ó lo que es lo mismo, á la parte central. De modo que podemos deducir de aquí las siguientes reglas.

1.ª *Para poner el nivel de manera que sus apoyos sean iguales, se coloca dicho nivel apoyado en una línea cualquiera y se hace que la burbuja esté en la parte central; se invierte en seguida dicho nivel y observando lo que se ha desviado la burbuja, se mueve el tornillo de rectificacion hasta que aquella recorra la mitad de dicha desviacion*

2.ª *Para poner una línea horizontal, se coloca encima de ella el nivel, en el cual se hace que la burbuja ocupe la parte central; se invierte dicho nivel, y se mueve el tornillo de rectificacion hasta hacer recorrer á la burbuja la mitad de su separacion, y en seguida se mueve la misma línea, haciendo recorrer á la burbuja la otra mitad, hasta que llegue á dicha parte central.* Si se quiere mayor exactitud se repite varias veces la misma rectificacion.

3.ª Para poner horizontal un plano, *basta marcar por el procedimiento indicado la horizontalidad de dos líneas que se corten, y que esten contenidas en él,* pero teniendo cuidado, si la nivelacion de dichas dos líneas tiene que ser sucesiva, de dar los giros á la segunda, alrededor de la primera, con el objeto que esta no pierda su posicion y en consecuencia su horizontalidad.

Partes de los aparatos destinados á atenúar sus errores.—Las reglas de los aparatos están generalmente divididas en metros, decímetros, centímetros y milímetros, y los limbos segun la magnitud del rádio con que estén trazados; de manera que con aquellas aisladas, la mayor dimension que podemos apreciar es de un milímetro, y los limbos tienen que ser muy grandes para que las fracciones de grado que se puedan medir sean pequeñas. Con el objeto de poder apreciar magnitudes menores que las marcadas en la regla ó en el limbo, se han ideado el *nonio* y el *tornillo micrométrico* de los cuales vamos á dar idea.

Nonio. Los hay de dos clases: el *recto*, destinado á aumentar la precision en la medicion de líneas rectas, y el *circular*, que contribuye al mismo efecto en los limbos. Consiste aquel en una pequeña regla que puede resbalar sobre la destinada á medir la longitud dada. La de dicha regla pequeña comprende un número cualquiera de divisiones de la grande, y esta longitud está dividida en una unidad mas, es decir, que si la regla mayor está dividida en milímetros y el nonio comprende $n-1$, está dividido en n partes iguales. Si los ceros de las dos reglas coinciden, las divisiones 1, estarán separadas una cantidad $\frac{1}{n}$, las divisiones 2, $\frac{2}{n}$, etc., puesto que cada una de las de la regla pequeña es $\frac{1}{n}$ menor que las de la mayor. Del mismo modo si están confundidas las divisiones 3, 5, 8... etc., estarán separados los ceros $\frac{3}{n}$, ó $\frac{5}{n}$, ó $\frac{8}{n}$ etc.

Como en este caso podemos apreciar distancias que se diferencian en $\frac{1}{n}$, este será el máximo error que se puede cometer, y la cantidad $\frac{1}{n}$, relacion entre un milímetro, menor division de la regla grande y n, número de divisiones de la pequeña, se llama *apreciacion del instrumento.*

Fijémonos en un ejemplo para comprender mas fácilmente el uso del nonio. Sea una regla AB dividida, figura 21 (lám. 4.ª) y supongamos que se han tomado en una menor *cd*, 9 divisiones de las mas pequeñas y se ha dividido despues en 10 partes; cada una de estas será $\frac{1}{10}$ de division grande menor que estas, y por lo que hemos dicho anteriormente, si coinciden las divisiones 7 por ejemplo, los ceros estarán separados $\frac{7}{10}$ de division de la regla grande. Teniéndose que medir una longitud tal como QP, se hace coincidir uno de sus extremos con el de la regla mayor y se corre el nonio hasta que se adose al otro extremo. Supongamos que la extension PQ ocupe 12 divisiones enteras y una fraccion que vamos á apreciar. Como las divisiones del nonio y de la regla principal tienen por diferencia una cantidad pequeña, será lo mas regular que el trazo que limita una de aquellas coincida con el que limita una de estas y si esto se verifica en el número 7 del nonio por ejemplo, estará el cero de este separado $\frac{7}{10}$ de la division á que corresponda en la regla, cuya distancia $\frac{7}{10}$ es la fraccion que tratábamos de medir. Si la coincidencia de trazos no se efectuase, entonces por precision tendrian que estar dos del nonio comprendidos dentro de una division de la regla, en cuyo caso la aproximacion será mayor, tomando al término medio de las que resultarian si la coincidencia se efectuase en las divisiones anterior y posterior.

Los nonios circulares no se diferencian de los rectos explicados, más que en la forma, siendo la teoría comun á ambos. La regla mayor está sustituida por el limbo principal y la pequeña por otro limbo ó parte de él de menor radio y el mismo centro, cuyas graduaciones están trazadas segun los principios que hemos indicado.

Con el objeto de establecer una relacion analítica que en cada caso nos deje conocer la apreciacion de los aparatos; sea γ la longitud de la regla pequeña correspondiente á $n-1$ de las menores divisiones de la grande. Teniendo segun lo dicho

$(n-1)\mathrm{D}=\gamma$: $nd=\gamma$. $nd=(n-1)\mathrm{D}$; $\mathrm{D}-d=a=\frac{\mathrm{D}}{n}$ habiendo llamado D la magnitud de division de la regla ó limbo principal, d á la del nonio, y a la apreciacion, que como ántes hemos visto es la diferencia entre dichas magnitudes. De la expresion $a=\frac{\mathrm{D}}{n}$ se deducen tres cuestiones de fácil resolucion, dando valores á dos de ellas y tratando de determinar la otra.

Tornillo micrométrico.—Se han utilizado las propiedades de la *hélice* y los medios que ofrece el arte para su buena construccion, en la de un aparato de precision llamado *tornillo micrométrico*. Consiste en un bastidor de madera A A', fig. 22 (lám. 4.ª) en uno de cuyos lados menores existe un hueco en donde se aloja la esfera e de un tornillo TT', el cual se introduce en la pieza MNP la cual lleva la tuerca correspondiente y puede resbalar con ligero rozamiento sobre el bastidor AA'. En este, y empezando en el punto A', donde tiene el cero, existe una graduacion en magnitudes iguales á las del paso del tornillo. El punto 0 corresponde tambien á la posicion extrema de la línea NP cuando está lo menos posible introducida la pieza á que corresponde en el tornillo. Tiene este por cabeza un disco de metal en el cual hay marcada una graduacion, que supongamos sea de n partes iguales.

Sujeto por clavijas al bastidor en el punto S, existe un estilete r cuya punta corresponde al cero de la graduacion del disco cuando la NP está coincidiendo con el bastidor. Hay además un boton acordonado T, el cual sirve para dar el tornillo las vueltas necesarias.

Se comprende que á cada vuelta completa, la línea NP avanzará ó retrocederá una cantidad igual al paso, y á cada division del disco que se vaya colocando en la punta del estilete, habrá adelantado la PN $\frac{1}{n}$ de paso, ó $\frac{1}{n}$ de las últimas divisiones del bastidor.

Para medir una longitud cualquiera se procura que apoye uno de sus extremos en el lado A′, y que siga la direccion A′S, y se ván dando vueltas al tornillo hasta que la línea NP toque al otro extremo de dicha longitud. Las divisiones pasadas en la graduacion del bastidor, unidas á las $n.^{simas}$ partes que indique la punta del estilete será la magnitud pedida.

Rectificaciones.—Para rectificar el nonio no hay más que ajustar sucesivamente uno de sus extremos á los trazos de varias divisiones de su regla ó limbo y el otro extremo tiene que caer siempre en el trazo de otra division. Sino cumple con esta condicion se desecha.

Para el tornillo se observa si recorre distancias iguales la línea NP, para los mismos números de vueltas y fracciones de vuelta.

Los nonios se usan generalmente en los instrumentos topográficos y los tornillos en los geodésicos, por lo cual nos hemos ocupado de los últimos más ligeramente.

LECCION 6.ª

GONIÓMETROS DE PRECISION.—GENERALIDADES.

Al hablar de los instrumentos destinados á la medicion de ángulos, expresamos la necesidad de mayor exactitud en los empleados en las operaciones geodésicas ó en las topográficas de grande extension. Ocupándonos ahora de la medida de ángulos en la triangulacion principal, es necesario describir los aparatos para ello usados, dejando para cuando expliquemos la manera de formar el cánevas topográfico el hacerlo de los destinados á este efecto, menos precisos que aquellos, y que se suelen conocer con el nombre general de *goniómetros de detalle*.

La idea mas general de forma en los de precision, es un limbo, susceptible de tomar todas las inclinaciones; una ó dos alidadas para encontrar la magnitud de los arcos sobre dicho limbo, y un sistema conveniente de sostenes, destinado á facilitar y hacer mas cómodo el uso. Como las alidadas de pínulas son de poca exactitud, pues por delgada que sea la cerda siempre cubre un cierto espacio en el campo de la vision, se emplean en dichos instrumentos las de anteojo.

En los aparatos antiguos, el círculo ó limbo no solia ser completo, empleándose generalmente los cuartos de círculo, ó á lo mas una mitad, lo cual adolecia de varios defectos que mas adelante expresaremos, y para evitar los cuales se ha sustituido dicha parte de limbo por uno completo.

Las rodillas de dichos aparatos antiguos, permitian poner el círculo graduado en el plano de los objetos, midiéndose entonces los ángulos en dicho plano, para lo cual no habia mas que colocarse en estacion en el vértice, dar al limbo la inclinacion conveniente, y por medio de las dos posiciones de una alidada dirigida sucesivamente á los dos objetos, ó del espacio comprendido entre las dos alidadas (caso que existiesen), apuntadas cada una al suyo, se conocia el valor gradual.

Pero como lo que se desea es la proyeccion horizontal de dicho ángulo, habria que efectuar la reduccion al horizonte, alargando y dificultando de esta manera la operacion. Es mas conveniente encontrar desde luego el ángulo plano, medida del formado por los proyectantes verticales de los lados naturales del verdadero, ó lo que es lo mismo, la magnitud de la proyeccion horizontal de este. Dicho ángulo horizontal, proyeccion de el del espacio, toma el nombre de *azimutal*.

A la determinacion del valor de estos y de los ángulos *verticales* que á su tiempo nos darán á conocer las diferencias de altura, es á lo que queda reducida la medicion de todos, permitiéndonos establecer una distincion entre los aparatos medidores, los cuales toman el nombre de *teodolitos* cuando están destinados á medir ángulos horizontales, y de *eclímetros* cuando se les puede emplear en la medicion de los verticales. En algunos teodolitos existen modificaciones y adicciones destinadas á facilitar y hacer conveniente su empleo como eclímetros.

Tanto aquellos como estos se procura tengan sus piezas de tal modo colocadas, que sea fácil el movimiento aislado de ellas cuando este convenga, ó formando cuerpo con otros elementos del aparato, para lo cual existen varios tornillos de presion y de coincidencia.

Cualquiera que sea el instrumento que usemos, existen en el uso tres causas de error. 1.º *De coincidencia*, debidos á la dificultad que se encuentra en poner el punto de cruce de las cerdas coincidiendo con las señales, sobre todo cuando están iluminadas de distinto modo por el sol, y son irregulares. Además, por visibles y perfectas que sean dichas señales, grande el aumento del anteojo, y finos los hilos de la retícula, es muy difícil dividir por ellos exactamente la señal en dos partes iguales, puesto que dicho hilo siempre cubre en el terreno un cierto espacio que aumenta con la distancia y dentro del cual no son visibles los errores. 2.º *De lectura* que se cometen por la dificultad de apreciar la coincidencia perfecta de las graduaciones de nonio y limbo; y 3.º *Accidentales*, que son debidos á la mala construccion del aparato ó á la impericia del operador.

A corregir y atenuar dichos errores debe dedicarse gran cuidado en levantamientos de alguna importancia, para lo cual existen medios sistemáticos de medicion que á continuacion expresamos con la apreciacion de sus defectos y ventajas.

Repeticion de los ángulos.—Existiendo como hemos dicho, errores de coincidencia y de lectura, natural es que al tratar de atenuarlos ó corregirlos se presente á la imaginacion la idea de observar lo puramente necesario y leer lo ménos posible. En cuanto á las observaciones no se puede prescindir de hacer dos en cada medicion supuesto que hay que dirigir visuales á los puntos que marcan la direccion de los lados del ánlo; pero los de lectura pueden evitarse mucho con la *repeticion*.

Consiste esta en medir varias veces el mismo ángulo tomando como lado orígen en cada medicion, el de término de la anterior, como en seguida explicaremos, y no leyendo mas que al empezar la operacion y al concluirla, con el objeto de ver el número total de grados recorridos, los que divididos por el de repeticiones que se han hecho, nos darán el valor del ángulo sin estar afectado de mas errores de lectura que los de primera y última medicion.

Método de repeticion de los ángulos de uno en uno.—Sea MN fig. 1.ª (lám. 5.ª) el limbo de un teodólito cualquiera. Para esta operacion no le hace precisa falta al aparato mas que un anteojo, pero conviene tenga otro, una pínula, ó un canto de regla de perfecta rectitud, para dirigir por ellos la visual á un punto cualquiera del terreno, cuya vista constante nos tiene que dar á conocer la invariabilidad del instrumento en su estacion. Supongámoslo en ella, y sea CA el anteojo superior al limbo, el cual puede describir en el giro alrededor de un eje horizontal un plano vertical. Como en todos los instrumentos, vá el anteojo sujeto á su correspondiente alidada, la cual lleva un nonio con la graduacion necesaria para la suficiente apreciacion. Supongamos tambien al limbo completamente horizontal y sean A y B los dos puntos cuyo ángulo se quiere hallar.

Hagamos coincidir por el movimiento del anteojo con su alidada el cero del nonio con el cero del limbo, y conseguido esto, hagamos que gire todo el sistema hasta que por dicho anteojo se vea el objeto de la izquierda, (suponiendo que la graduacion vaya en el sentido en que giran las agujas de un reloj), y fijando en seguida el limbo, se deja mover solamente al anteojo con su alidada hasta que colocado en direccion CB se vea el punto de la derecha. El arco $a\ b$ nos dará el valor, y el cero del nonio en b la lectura del ángulo buscado, puesto que el 0 se ha quedado en a. Para atenuar los errores no se efectua la lectura de este ángulo, sino que despues de bien fijado el punto B por el de cruce de las cerdas, se dá la vuelta á todo el sistema hasta que se vea otra vez por el anteojo el punto A. El cero de la graduacion se habrá trasladado á a' siendo $a\ a' = a\ b$. Se vuelve á soltar el anteojo y se le dirige otra vez al punto B, marcando entonces el cero del nonio b una lectura doble de la del ángulo pedido ACB que tampoco se lee. Unido todo el sistema, se le imprime un giro hasta que por el anteojo se llegue á ver el punto A, en cuyo momento el 0 de la graduacion se habrá trasladado á a'', y si soltamos el anteojo haciendo que vuelva á mirar al punto B, el cero del nonio nos marcará una lectura del limbo triple del ángulo buscado.

Siguiendo el mismo procedimiento de repeticion todas las veces que se crea conveniente, al llegar á la última operacion se hace la lectura correspondiente á la actual posicion del 0 del nonio, y añadiéndole el número de grados correspondientes á las circunferencias enteras que en el curso de la operacion se hayan recorrido, y dividiendo el resultado por el de repeticiones que se hayan efectuado, se tendrá el valor del ángulo con los errores de escentricidad y mala graduacion atenuados y tambien tanto mas disminuidos los de lectura cuanto mayor número de repeticiones se hubiesen hecho. En cuanto á los de coincidencia, como es lo regular que se hayan cometido unas veces por esceso y otras por defecto, es lo probable que al encontrar su término medio por las repeticiones, resulten disminuidos, y positivamente no quedan aumentados.

Método de repeticion de los ángulos de dos en dos.—Sea tambien MN fig. 2.ª (lám. 5.ª) el limbo del aparato que consideramos, el cual en este caso tiene que llevar dos anteojos, colocados comunmente en la parte superior del limbo uno, y el otro sujeto por medio de un collar al eje vertical de rotacion de dicho limbo, pudiendo formar cuerpo con este ó moverse independiente-mente segun se quiera. Este segundo anteojo tiene el inconveniente de la escentricidad que adquiere por su colocacion en la parte exterior del cilindro eje vertical del limbo, pero el error que puede resultar de esta escentricidad en la medicion de los ángulos, tiene su correccion, de la cual hablaremos á su tiempo.

Supuesto ya colocado el limbo horizontal, sea AB el anteojo superior, CD el inferior, y P y Q los puntos cuyo ángulo con la estacion queremos encontrar. Se empieza por efectuar la coincidencia entre nonio y limbo en sus ceros, y despues por un giro de todo el sistema alrededor de su eje vertical, se dirige el anteojo superior al punto P de la izquierda, y mantenidos limbo y anteojo superior en esta posicion, se dirige el inferior solo, al punto Q de la derecha. Se le sujeta en esta posicion, y despues por un giro de todo el sistema se hace que mire al objeto P de la izquierda, en cuyo caso el anteojo AB habrá pasado á tomar con el cero de la graduacion la posicion OB′, siendo $B'OP = POQ$.

Pues si á partir de esta posicion y fijas las demás partes del aparato se hace mover el anteojo superior hasta que por él se vea el objeto de la derecha Q, será necesario para obtener este resultado que haya recorrido dicho anteojo separándose del cero un ángulo doble del pedido. Si no se quiere repetir, se ve la lectura que al cero del nonio corresponde en el limbo, y dividiéndolo por dos, se tendrá el ángulo con un cierto error.

Si se quiere atenuar repitiendo, no se efectúa la lectura correspondiente al cero del nonio, sino que por un movimiento de todo el sistema se lleva otra vez el anteojo superior á mirar al objeto P de la izquierda, estando ya en el mismo caso que al empezar, con la única diferencia que en vez de tomar como orígen del ángulo el cero de la graduacion, se toma como tal orígen el punto correspondiente al extremo del ángulo duplo, siendo la lectura que indique su cuadruplo valor, la que coincide con el cero del nonio al terminar la segunda medicion. Al cabo del número necesario de ellas, se suma la division que entónces se lee coincidiendo con el cero del nonio, con los grados correspondientes á las circunferencias enteras que se hayan recorrido, y el resultado, dividido por el doble número de las repeticiones que se han hecho dará el valor del ángulo simple con las mismas ventajas del otro procedimiento anteriormente indicado.

Estas ventajas son indudables en la teoría, pero en la práctica se ha notado que la exactitud no es tan grande como fuera de desear. En Inglaterra se han desechado ya por imperfectos los aparatos repetidores. Herchel atribuye los errores resultantes del método indicado, á la imperfeccion de los medios que se emplean para sujetar las diferentes partes del aparato, como son: tornillos de presion y coincidencia, etc. El juego de la esferilla de estos principalmente, hace que tenga poca fijeza la visual dirigida, y además cualquiera alteracion en el filete de un tornillo puede producir un salto en la marcha del aparato que implique poca exactitud en la apreciacion. Estas deformaciones de los tornillos son mucho más fáciles aun, cuando tienen que sostener algun peso, como sucede en los círculos destinados á medir ángulos verticales y para evitar los errores propuso M. Biott y empleó posteriormente el coronel Bonne al medir el arco de paralelo de Brest á París, aparatos que tienen dobles tornillos de presion y de coincidencia, los cuales si bien atenuan las faltas arriba indicadas tenian el inconveniente de su difícil manejo, pues se comprende la dificultad de dar movimientos simultáneos, de velocidad igual y en el mismo sentido á dos tornillos de la última clase.

Ademas existe en las repeticiones otra causa de error, cual es el arrastre que ejerce por su rozamiento el nonio sobre el limbo, cuando este debia estar completamente inmóvil. Como la marcha del nonio es siempre en el sentido de la graduacion, resulta que los ángulos se miden menores de lo que son en realidad, lo cual comprobó Mr. Bessel empotrando el limbo y obteniendo por este medio ángulos mayores. Para atenuar en parte este error se ideó el repetir los ángulos una vez en el sentido de la graduacion y otra en sentido contrario, con lo cual se queria compensar el error debido al movimiento del limbo.

Mr. Liagre comparando el último medio con el de repeticion encontró en este la ventaja. Pero ademas de los errores tomados en cuenta por Mr. Liagre existe otro de no menor importancia, que es la torsion del eje. En efecto, para evitar que el nonio arrastrase indebidamente al limbo en su movimiento, se construyeron limbos y nonios de ejes completamente independientes y sin existir en ellos el mas ligero rozamiento, notándose aun un error por defecto, el cual despues de detenidísimo estudio se ha atribuido á que el eje sufre una pequeña torsion al girar en sus apoyos, y como el giro es siempre en el mismo sentido, el error vá aumentando y la torsion tambien, pudiendo llegar á convertirse en una cantidad considerable.

Todos estos errores, muy pequeños en detall pueden hacerse sensibles por su reunion, motivo por lo cual se ha adoptado definitivamente la medida de ángulos por reiteracion volviendo al cero, la cual vamos á explicar.

Medida de los ángulos por reiteracion, volviendo al cero.—El limbo de los aparatos destinados á destruir la torsion del eje, operando por reiteracion, tienen generalmente dos tornillos de presion para quedar completamente fijos y no ser arrastrados por los nonios. Sea NM un limbo de esta clase, y AB su anteojo, siendo P y Q los puntos cuyo ángulo con la estacion se quiere medir fig. 3 (lám. 5.ª) Hagamos coincidir primeramente el 0 del nonio con el del limbo, y sujetando en seguida el uno al otro, se dá una vuelta á todo el sistema hasta que se vea el punto P de la izquierda. Se suelta en seguida el anteojo y se le conduce á la posicion OQ desde donde se vé el punto Q. En este estado, el 0 del nonio corresponderá á la lectura b que indique la medida del ángulo buscado. Para deshacer la torsion, se desapunta el anteojo dirigiéndole á otro punto Q′ situado mas á la derecha del Q. Se consigna la lectura correspondiente al punto b' de coincidencia con el cero del nonio en un registro que al efecto se lleva, y sujetando en seguida el anteojo al limbo se dá un giro á todo el sistema hasta que se vuelva á ver el punto Q, y en este caso el cero que antes estaba en a se ha trasladado á a'.

Vuélvese á soltar el anteojo y se dirige otra vez al punto P, apuntando en el registro en este caso la lectura del cero del nonio, la cual restada de la escrita anteriormente, nos dá el valor del ángulo buscado. En efecto, las dos lecturas expresan los arcos $a'b$ y $a'a$, cuya diferencia es el ab. Tiénense de este modo dos valores de un mismo ángulo medidos en sentido contrario, y deshecha en el segundo la torsion cometida en el primero, para completar lo cual, una vez el anteojo en la posicion OP se le vuelve al cero haciéndole girar el ángulo POP$'$ que concluye de destruir la torsion que pudiera existir, y deja al aparato en disposicion de empezar nueva medicion. La semi-suma de las dos lecturas efectuadas, da el valor del ángulo corregido. Esta correccion se refiere solo al error de torsion, pero puede ser que el limbo esté mal graduado, y la parte imperfecta de la graduacion corresponda á la que ha servido para la medicion, y para atenuar el error resultante, se hacen nuevas mediciones y reiteraciones, pero en vez de partir del O se parte sucesivamente de las graduaciones 5°, 10°, 15°....., encontrando los valores tanto en las mediciones directas como en las reiteradas, por diferencia entre las dos lecturas correspondientes al cero del limbo en sus dos posiciones inicial y final dentro de la misma medicion, y teniendo cuidado despues de esta y antes de empezar otra nueva, de volver al cero del limbo el del nonio de la alidada, para que el eje no quede torcido y se vayan acumulando las faltas por esta razon producidas.

Explicados los métodos generales de medicion, debemos dar una idea del sistema metódico que se debe seguir para consignar en el registro el resultado de las operaciones efectuadas.

Expresamos al medir los ángulos por repeticion, que se podia no consignar en el registro mas que el resultado de las primera y última observaciones, y suponiendo que habiamos empezado desde cero, dividiendo esta por el número de repeticiones que se habian hecho, si se median los ángulos de uno en uno, ó por el doble número de dichas repeticiones si se median de dos en dos, se obtenia el valor del ángulo verdadero.

Algunas veces sin embargo, y solo como comprobacion se encuentran los ángulos simples en cada una de las repeticiones, dividiendo la lectura que marque el nonio que partió de cero aumentada en el número de circunferencias enteras recorridas, por el de órden de la medicion, siendo necesario para que la observacion esté bien efectuada que la mayor diferencia que exista entre los valores hallados para los ángulos simples, no iguale ni exceda á la aproximacion dada por el instrumento.

Con el objeto de asegurar mas la exactitud del valor encontrado, la mayor parte de los de precision llevan en vez de alidada ordinaria y nonio, un círculo ó limbo concéntrico (*) al de la graduacion en el cual están invariablemente fijos los soportes del anteojo, y puede girar alrededor de un eje comun con el del limbo principal, al que se sujeta en casos dados por medio de tornillos convenientemente dispuestos. Lleva dicho limbo cuatro nonios, dos de los cuales tienen su cero en los extremos del diámetro que hace de línea de fé, que es la traza del plano vertical que pasa por el eje óptico del anteojo, y los ceros de los otros dos, están en los extremos del diámetro perpendicular á aquel. Si los cuatro nonios estuviesen en diámetros exactamente perpendiculares y la graduacion de los limbos fuese perfecta, cuando el cero de uno de aquellos coincidiese con el de la graduacion, el otro coincidiría con la 90 y los otros dos respectivamente con las 180 y 270. En este caso, si apuntásemos el anteojo á un objeto cualquiera para tomar su ángulo con el de la primitiva direccion, cuyo valor sea α, el cero del primer nonio corresponderia á este grado, mientras los ceros de los otros marcarian respectivamente los $90+\alpha$, $180+\alpha$ y $270+\alpha$. En las repeticiones recorrerian ángulos exacta y matemáticamente iguales, siendo por consiguiente innecesario considerar mas que el movimiento y la graduacion de uno de ellos.

Pero en la práctica no sucede así: aunque las gradua-

(*) Compréndese que todo lo que decimos del limbo de los nonios, se aplica á un sistema de dos alidadas perpendiculares, una de las cuales lleva el anteojo y las dos un nonio en cada extremo.

ciones se hacen á máquina y suelen ser rigurosamente regulares, los nonios pueden no estar colocados perpendicularmente por causa del uso, desgaste de los ejes, dilataciones, etc., por lo cual es necesario efectuar al empezar y terminar la operacion las lecturas de los cuatro nonios, restar de la suma de las cuatro que se obtengan al fin, la de los cuatro que se hallaron al principio y dividir el resto por el cuádruplo numero de repeticiones que se hayan efectuado ó por el doble de este cuádruplo segun se haya seguido el primero ó el segundo procedimiento.

Para fijarse mas detenidamente en lo que acabamos de expresar, sean A, D, C y B fig. 4.ª (lám. 5.ª) las posiciones de los ceros de los nonios que por cualquier causa han perdido su perpendicularidad, de manera que cuando el cero de A coincida con el de la graduacion, los ceros de C, D y B marcarán $90^\circ \pm a$, $180^\circ \pm a'$, y $270^\circ \pm a''$, llaman a, a' y a'', á las pequeñas diferencias que resulten de la mala disposicion. Si ahora haciendo uso del A medimos un ángulo α, cuando el cero de A marque dicha lectura, los D, C y B marcarán las indicadas á continuacion

A . . . . α	Y los valores de los ángulos recorridos serán.......	$\alpha - 0$
D . . . . α'		$\alpha' - (90^\circ \pm a)$
C . . . . α''		$\alpha'' - (180 \pm a')$
B . . . . α'''		$\alpha''' - (270^\circ \pm a'')$

los cuales sumados y divididos por cuatro nos darán el verdadero valor del ángulo que será

$$\frac{1}{4}\left(\alpha+\alpha'-(90^\circ \pm a)+\alpha''-(180^\circ \pm a')+\alpha'''-(270^\circ \pm a'')\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''')-(0+(90^\circ \pm a)+\right.$$

$$\left.+(180^\circ \pm a')+(270^\circ \pm a'')\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\alpha+(\alpha'-90^\circ)+(\alpha''-180^\circ)+(\alpha'''-270^\circ)\right) -$$

$$-\frac{1}{4}(\pm a \pm a' \pm a'') : \qquad (2)$$

cuyo segundo miembro nos dice que el valor del ángulo es la cuarta parte de la diferencia que existe entre las sumas de las cuatro lecturas finales y las cuatro iniciales cuando no se repite, pero en el caso de efectuarse n repeticiones, como se han medido $4n$ ángulos se tiene que dividir por $4n$. En el tercer miembro vemos que la cantidad $\frac{1}{4}(\pm a \pm a' \pm a'')$ es constante, y una vez determinada, basta para encontrar cualquier ángulo, hacer las lecturas α, α', α'', α''', y sustituir en la fórmula (2). Excusado es decir que si los ángulos se midiesen de dos en dos el coeficiente $\frac{1}{4}$, se convertiria en $\frac{1}{8}$.

A continuacion se indican los formularios de registros en uno y otro sistema de medicion.

PARA LAS MEDICIONES DE UNO EN UNO.

Registro núm......

Nonios.	Lecturas iniciales.		
	0	'	''
I..................	0	0	0
II..................	90	0	10
III..................	179	59	50
IV..................	269	59	40
Suma inicial......	539	59	40

Angulos múltiples.			Número de repeticiones.	Angulos simples.		
0	'	''		0	'	''
»	»	»	1	64	22	30
128	45	0	2	64	22	30
193	7	40	3	64	22	33
257	30	20	4	64	22	35
.	.	.	.	.	.	.
1287	35	10	20	64	22	45.

Nonios.	Lecturas finales.			
	0	'	''	
I..................	1287	35	10	
II..................	1377	35	20	
III..................	1467	34	50	
IV..................	1557	34	30	
Suma final......	5690	19	50	
Suma inicial....	539	59	40	
Diferencia....	5150	20	10	80
				64°22'45,"12

Angulo simple....... 64°...22'...45,"12

PARA LAS MEDICIONES DE DOS EN DOS.

Registro núm......

Nonios.	Lecturas iniciales.		
	0	'	''
I....................	0	0	0
II....................	90	0	10
III.....................	179	59	50
IV....................	269	59	40
Suma inicial......	539	59	40

Angulos múltiplos.			Número de repeticiones.		Angulos simples.		
0	'	''	Dobles.	Simples.	0	'	''
124	59	40	1	2	62	29	50
249	59	30	2	4	62	29	52
374	59	20	3	6	62	29	53
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
1249	59	40	10	20	62	29	59.

Nonios.	Lecturas finales.		
	0	'	''
I..................	1249	59	40
II...	1340	00	10
III..................	1424	59	50
IV..................	1519	59	30
Suma final.....	5539	59	10
Suma inicial....	539	39	40
Diferencia....	4999	59	30

4999...59...30 | 80

62°29'59,"625

Angulo simple...... 62°...29'...59,"625.

En la medida de los ángulos por reiteracion se usan tambien aparatos que tienen dos ó cuatro nonios. En cualquiera de los dos casos, se observan en cada medicion las lecturas iniciales y finales de cada uno, encontrando el promedio de ellos y el ángulo simple como se indica en los siguientes registros:

PARA LOS APARATOS DE DOS NONIOS.

Registro núm.......

Vueltas.	Señales.	Nonios.	Lecturas. 0 ′ ″	Promedio de los nonios 0 ′ ″	Angulos simples. 0 ′ ″	Angulos definitivos. 0 ′ ″	Observaciones.
1.ª	P........	1.°.........	0... 0.. 0	0 .. 0 .. 15	56 .. 26 .. 30		
		2.°—180..	0... 0.. 30				
	Q........	1.°.........	56.. 26.. 40	56 .. 26 . 45			
		2.°—180..	56... 26.. 50				
2.ª	Q........	1.°.........	58.. 31.. 30	58 .. 31 .. 35	56 .. 26 .. 40		
		2.°—180..	58... 31.. 40				
	P........	1.°.........	2... 4.. 50	2 .. 4 .. 55			
		2.°—180..	2... 5.. 0				
3.ª	P........	1.°.........	5... 0.. 0	5 .. 0 . 5	56 .. 26 .. 29		
		2.°—180..	5... 0.. 10				
	Q........	1.°.........	61... 26.. 32	61 .. 26 .. 34			
		2.°—180..	61 .. 26.. 36				
Se siguen indicando las vueltas empezando despues por el grado 10, 20, etc.	Aquí se siguen poniendo las señales.	Se indican en esta casilla en cada caso las lecturas de los dos nonios, quitando antes á la del 2.° 180°, y la semi suma de la lectura así disminuida con la del primer nonio nos da el		Promedio de los nonios que se escriben en esta casilla.	La diferencia de los promedios de los nonios correspondientes á las dos señales en una misma vuelta, constituye el ángulo simple aproximado.	El ángulo definitivo se obtiene sumando todos los ángulos simples y dividiéndolos por su número.	

PARA LOS APARATOS DE CUATRO NONIOS.

Registro núm.....

Vueltas.	Señales.	Nonios.	Lecturas. ° ' ''	Promedios de los nonios. ° ' ''	Angulos simples. ° ' ''	Angulos definitivos. ° ' ''	Observaciones.
1.ª	P......	1.°......	0.. 0.. 0	0.. 0.23	15 11 46		
		2.°— 90.	0.. 0.. 25				
		3.°—180.	0 . 0.. 15				
		4.°—270.	0.. 0.. 6				
	Q......	1.°......	15 . 12.. 3	15. 12. 9			
		2.°— 90.	15.. 12.. 8				
		3.°—180.	15 . 12.. 5				
		4.°—270.	15.. 12.. 2				
2.ª	Q......						
	P......						

Por lo que se ve que este registro es exactamente igual al anterior con la sola diferencia que en vez de tener que sumar las indicaciones del primer nonio con las del segundo menos 180° y dividirlo por dos, para obtener el promedio, se suman ahora 1.° + 2.° — 90 + 3.° — 180 + 4.° — 270 y la suma se divide por 4.

Todos los aparatos de repeticion pueden ser reiteradores, pero no todos los reiteradores pueden servir para efectuar la repeticion, como tendremos ocasion de ver.

LECCION 7.ª

GRAFÓMETRO.—CÍRCULO REPETIDOR.—TEODÓLITO DE LENOIR.

Con el objeto de que las generalidades consignadas en la leccion anterior se completen con el conocimiento de algunos aparatos, vamos á dar idea de varios de ellos, que por su diferencia de forma son tipos de los grupos en que podemos clasificarlos á todos. Por lo demás, es muy extraño encontrar instrumentos construidos de idéntica forma de los que estudiemos é imposible la explicacion de todos lo que existen, por lo cual es de imprescindible necesidad el fijarse mas en la totalidad del instrumento y en su objeto, que en sus detalles, pues de lo contrario el manejo de otro cualquiera dará ocasion á tropiezos, que de fijo evitará el que teniendo presente las formas generales, estudie sobre el que se le dé, las distintas modificaciones que pueden haber sufrido los por él aprendidos y manejados.

Grafómetro de anteojos.—El mas sencillo de todos los goniómetros es el *grafómetro*, que puede ser de *pínulas ó de anteojos.* El de pínulas, que es el más elemental y el menos exacto, corresponde á la categoría de los instrumentos de detalle, cuya explicacion daremos mas adelante, ocupándonos ahora del de anteojos solamente.

Consistía antiguamente este, figura 5.ª (lámina 5.ª), en un semilimbo graduado CMD, que algunas veces contenia dos graduaciones en sentidos contrarios de 0 á 180°. Contenía tambien dicho instrumento dos anteojos, de los cuales uno estaba fijo á un collar G sujeto al eje perpendicular al semilimbo, y conservaba constantemente su posicion paralela al diámetro 0—180°, y el otro E estaba invariable en la direccion de la alidada *ab*, movible alrededor del centro. Esta alidada llevaba un nonio en cada uno de sus extremos, correspondiendo los ceros á los de la línea de fé. Estaba sostenido todo el instrumento por una rodilla de nuez, cuyo mango hueco se introducia en el del trípode, existiendo algunas veces un nivel de aire *p* como complemento del aparato.

Así dispuesto el grafómetro, servia para encontrar los ángulos en el plano de los objetos, para lo cual no habia mas que dar al aparato la posicion conveniente para que por el anteojo inferior se viese uno de aquellos, y haciendo girar el semilimbo valiéndose de la rodilla, sin perder la visual hasta que entrase el otro objeto en el plano de dicho semilimbo, en cuyo caso se sujetaba la rodilla, y por el anteojo superior se dirigía la visual al expresado segundo punto, siendo la lectura unida al cero de la alidada la que marcaba el valor del ángulo buscado.

Algunas veces se efectuaba tambien la medicion valiéndose solo del anteojo superior y su alidada, haciendo de modo que al dirigir la primera visual á uno de los puntos, el cero del nonio coincidiese con el del limbo, y dirigiendo por el mismo anteojo la segunda visual al otro punto, despues de poner al dicho limbo en el plano de los objetos. El anteojo inferior servia solo para verificar la invariabilidad de posicion.

El aparato así dispuesto adolecia de muchos y graves inconvenientes, siendo los principales: 1.º Dando la medida de los ángulos en el plano de los objetos, teniamos luego que efectuar su reduccion al horizonte. 2.º La rodilla le daba poca estabilidad, y se aumentaba este inconveniente por la forma del aparato que hacia que el centro de gravedad estuviera muy separado del eje. 3.º No existiendo mas que un semilimbo, no se podia con una sola operacion medir ángulos mayores de 180º. 4.º Estando la alidada sostenida sobre el semilimbo solo por la mitad de su longitud, el peso de la otra mitad obraba sobre el eje, tendiendo á falsearle y variar la disposicion primitiva.

Dichos inconvenientes se han obviado con las siguientes alteraciones en la forma. Para evitar el 1.º, se ha dado giro á los dos anteojos alrededor de ejes horizontales, haciendo de este modo que los planos que describan los ejes ópticos sean verticales, y además vá unido al limbo un nivel de aire, destinado á ponerlo horizontal. Para corregir el 2.º, se ha sustituido á la rodilla una plataforma de tres tornillos, dando además al aparato una forma simétrica con relacion al eje, con lo cual el limbo es completo y queda corregido tambien el tercer inconveniente, y por último, estando sostenida la alidada por ambos lados, queda evitado el 4.°, habiendo quedado el grafómetro con la forma indicada en la figura 6.ª (lámina 5.ª), en la cual *a* es el anteojo superior, giratorio alrededor de un eje horizontal que tiene su apoyo vertical *b*, y fijo á la alidada *cc'* que puede estar en la misma direccion que el eje óptico ó en sentido perpendicular. Sobre el limbo *m* está apoyado un nivel de aire *d* con su tornillo de rectificacion *t*. El apoyo *b* está hueco, y en él entra un pivote que por construccion es perpendicular al limbo. Este tiene á su vez un mango hueco *n*, que gira alrededor de otro pivote sujeto al centro del platillo superior O de la plataforma P.

En este aparato las mediciones se hacen dirigiendo las dos visuales por el anteojo superior, sirviendo solo el de abajo para comprobar la estacion. Este está unido por un collar que se sujeta al eje *n*, y alrededor de uno horizontal, puede cabecear verticalmente.

Para efectuar la medicion, se aflojan los tornillos de presion y coincidencia que lleva la alidada, colocando el cero de su nonio muy cerca del de la graduacion, y apretando en seguida el de presion solo, se concluye de efectuar la coincidencia por el de este nombre. Se pone el limbo horizontal por medio del nivel y de los tornillos del pié, y se da giro á todo el aparato alrededor del pivote de la plataforma hasta que por el anteojo superior se vea el objeto de la izquierda, fijando en un punto cualquiera la visual del anteojo inferior que nos tiene que servir para comprobar la estacion. Sujetando por los correspondientes tornillos de presion los mangos huecos á sus pivotes, se sueltan los tornillos de la alidada á la cual se hace girar hasta que por su anteojo se vea el punto de la derecha, con el cual se efectúa la union exacta por el tornillo de coincidencia, siendo entónces la lectura correspondiente al cero del nonio, la que nos dá el valor del ángulo medido. Tambien se puede efectuar esta operacion sin empezar por la coincidencia de los ceros, en cuyo caso el valor del ángulo se obtiene, restando de la lectura final la inicial, correspondientes las dos al cero del nonio al dirigir las visuales á los dos puntos.

Las verificaciones que se deben hacer con este instrumento son: 1.ª *Que el eje de rotacion sea vertical.* 2.ª *Que el eje óptico coincida con el de figura*, ó lo que es lo mismo *que dicho eje óptico sea perpendicular al de rotacion horizontal*, y 3.ª *Que el plano que dicho eje óptico describa en su movimiento sea vertical*, debiéndose efectuar ademas las inherentes á los limbos y nonios.

La primera de estas rectificaciones es la misma que indicamos para arreglar el nivel y poner horizontal un plano, trazando dos horizontales en él, que se corten. La plataforma varía de inclinacion por los tornillos de su pié y el nivel por el suyo de rectificacion. Las dos líneas que se horizontan son, la que liga dos de los tornillos del apoyo, y la perpendicular bajada á esta línea desde el otro tornillo. Las otras rectificaciones tambien las tenemos indicadas.

Con este aparato se pueden repetir los ángulos de uno en uno, y en el caso de tener tornillo de coincidencia el anteojo inferior, como acontece al de la figura 6.ª tambien pudieran repetirse de dos en dos. La reiteracion tambien es aplicable, lo mismo que la lectura de los dos nonios para mayor aproximacion.

Circulo repetidor.—Es este un aparato de mucha precision, pero de poco uso, por la dificultad que este presenta. Su forma es la representada en la figura 7.ª de la (lámina 5.ª) Consta de un platillo ó disco circular MN de laton, cuya circunferencia está graduada. Dicho platillo está unido á un sosten de tres brazos, D, D′ D″, los cuales están atravesados por tornillos de cabezas T, T′ T″ que sirven para obtener la horizontalidad, estando para ello sus puntas en los puntos correspondientes á los vértices de un triángulo equilátero. En la parte céntrica del platillo MN, se eleva su pivote de acero C tronco-cónico, perpendicular á él por construccion, y en el cual entra perfectamente ajustado un manguito de laton F cuya parte inferior está apoyada sobre MN, y termina por una alidada GH en cuyos dos extremos existen nonios, y en uno de ellos hay un tornillo de presion *a* y otra de coincidencia *b*, para permitir á la alidada, y con ella á todo el instrumento un movimiento de rotacion rápido ó lento alrededor del pivote C. En la parte superior del manguito F, existe una pieza horquillada XYZ en cuyos brazos verticales se apoya y gira un eje PQ, llamado *eje de la horquilla*. En la parte media de este y perpendicularmente á su direccion hay una pieza RS unida invariablemente á él, que termina por uno de sus extremos R en un cilindro O, relleno de plomo, que sirve de contrapeso. La pieza RS es hueca, y entra en ella una varilla de acero que por uno de sus extremos S está unida invariablemente á un círculo graduado ó limbo de laton AB; y por el otro termina en un boton acordonado α el cual forma la base posterior del contrapeso, y sirve para imprimir movimientos al AB, existiendo para regularizarlos unos tornillos de presion y coincidencia h, h', que en caso dado, pueden hacer formar cuerpo á dicho limbo, con el manguito RS en que su eje gira. En S, por la parte inferior del limbo existe un collar, donde está sujeto un anteojo ϵ que puede girar alrededor de RS, teniendo sus respectivos tornillos de presion y coincidencia.

En un rebajo practicado en la parte central del limbo AB, entra un pivote, eje de otro limbo A′B′ que ajusta perfecta é interiormente al primero, y que no lleva mas graduacion que la correspondiente á cuatro nonios que se encuentran con sus ceros en los extremos de dos diámetros perpendiculares. Este limbo A′B′ sostiene un anteojo ϵ' que no tiene mas movimiento que el que dicho limbo le comunique. El A′B′ lo tiene independiente, y puede tambien moverse con el AB ó con relacion á él, por medio de los tornillos de presion y coincidencia K y K′.

En la prolongacion de uno de los muñones del eje PQ de la horquilla y en la parte exterior de esta, está unido un arco graduado U sujeto á dicho muñon, por travesaños en direccion de los rádios, pudiéndose apretar al soporte Q por medio del tornillo de presion t, y tener pequeños movimientos por el de coincidencia t'. Los movimientos del eje de la horquilla graduados por este arco, serán trasmitidos á toda la parte superior del instrumento.

De modo que el de que nos ocupamos, destinado exclusivamente á la medida de los ángulos en el plano de los objetos, tiene para efectuar su colocacion en dicho plano tres movimientos, que son: 1.º Alrededor del pivote C. 2.º Alrededor del eje de la horquilla; y 3.º Alrededor del eje del limbo, cuyos movimientos son de gran precision por la colocacion que hemos indicado de los diferentes tornillos.

Como complementos lleva el círculo repetidor un nivel n sujeto á la parte superior del anteojo ε, y en su misma direccion, y otro n' sujeto al manguito RS, tambien en su direccion, yendo provistos ambos niveles de sus correspondientes charnelas y tornillos de rectificacion.

Conocida ya la forma del aparato, es necesario saberle colocar para la medicion de los ángulos en el plano de los objetos, para lo cual debe asegurarse el que opera del paralelismo de los anteojos entre sí y con el plano del limbo.

Para efectuar esta comprobacion se hace uso de un anteojo suelto, fig. 8.ª (lám. 5.ª) igual en todo á los descritos, pero no teniendo mas que una cerda horizontal en su retículo. Este anteojo está montado en unas piezas cúbicas de madera exactamente iguales, las cuales tienen taladrada su parte central, en cuyo taladro apoya y queda ajustada la superficie exterior del anteojo. Este se coloca sobre el limbo, y se hace ajustar su cerda horizontal con un punto lejano, y en seguida se da vuelta al anteojo de manera que apoye en las dos caras de los cubos opuestas á aquellas que antes servian de apoyos y en esta nueva posicion se tiene que ver el punto antes observado. Si así no sucede, se hace recorrer á la cerda por medio de sus tornillos, la mitad de la distancia que separa los dos puntos vistos como lo comprueba la misma figura en que **AB** es la primera posicion del eje y **A′B′** la segunda. Haciendo varias veces la misma operacion se consigue que el *anteojo de prueba* tenga su eje óptico paralelo al limbo. Para conseguir ahora el paralelismo de los dos anteojos del aparato, diríjanse por ellos las visuales al mismo punto antes observado sin variar de posicion el limbo ni el anteojo de prueba, haciendo por el movimiento de los tornillos de los retículos que coincidan con dicho punto las cerdas horizontales, en cuyo caso el paralelismo se puede considerar perfecto, como lo indica la fig. 9.ª (lám. 5.ª) en que **AB** es el limbo, **CM** y **DM** los ejes ópticos de los anteojos y **M** el punto observado. Comparado con la gran distancia á que este se halla, la *hk* que existe entre los dos anteojos se puede considerar nula, y á ellos confundidos, ó paralelos entre sí y con el plano del limbo.

Conseguido ya el paralelismo de los anteojos, resta colocar el limbo en el plano de los objetos. Para ello, si hacemos girar toda la parte superior del instrumento alrededor de su pivote ó eje vertical, el de la horquilla que es perpendicular á dicho pivote describirá un plano. Si dirijimos el eje de la horquilla al punto de interseccion de dicho plano con la recta que une los dos objetos, dicho eje y su prolongacion estará contenida en el plano de ellos, de modo que si el eje de la horquilla coincidiese con el limbo, no habria mas que dar un giro á este alrededor de aquel hasta encontrar á dichos dos objetos. No sucede asi, pero la gran distancia á que ellos se encuentran, y la poca que media entre el limbo y su paralelo el eje, hacen que se tome la disposicion con dicho supuesto adoptada como exacta.

La perfecta coincidencia con los dos objetos se obtienen por medio de los tornillos del limbo azimutal, y por los del arco de círculo, unido al eje de la horquilla.

Con el aparato asi dispuesto se pueden medir los ángulos por todos los medios indicados, puesto que la graduacion del limbo es completa, y sus tres sentidos de movimiento están auxiliados por los convenientes tornillos de presion y coincidencia. Además los cuatro nonios cuya lectura se puede hacer del modo que se explicó dán mayor precision á la observacion efectuada.

Teodolito repetidor de Lenoir.—Figura 10, (lámina 5.ª) Está sostenido este por tres pies a, a', a'', que forman en su union una pequeña plataforma, y tienen atravesados sus extremos por los grandes tornillos b, b', b'' cuyas puntas con los verdaderos apoyos del instrumento. En el centro de la plataforma formada por la union de los pies y perpendicularmente á su plano se eleva un pivote que generalmente es de acero, que se introduce en un cilindro hueco A, con el cual ajusta perfectamente, siéndole empero permitido el giro á este sobre aquel.

Lleva el A en su parte inferior un platillo ó círculo azimutal B que por construccion le es perpendicular. Sujeto á uno de los pies a' existe un nonio, que lleva la esferilla del tornillo de coincidencia t, que unido á uno de presion t', sirven para permitir movimientos rápidos y lentos al A, y con él á toda la parte superior del aparato. Tiene el A en su parte mas elevada una pieza en escuadra $C'C''C'''$, en cuyo brazo vertical apoya un eje D, el cual es perpendicular y está unido invariablemente á una pieza hueca EE', llevando esta en direccion de un plano paralelo á $C'C''$ un arco de metal graduado, sobre el cual oprime el tornillo F, que lo fija á él y á la pieza EE' á quien vá unido en la posicion conveniente. En la parte interior de EE' y ajustado á ella pudiéndose mover con rozamiento suave, existe otro eje G, que contiene en su extremo y perpendicular por construccion un limbo graduado H. Interior al eje G se encuentra otro G' que tambien puede girar sobre él, y que lleva el limbo de los nonios K el cual ajusta con el de la graduacion por la parte interior de esta.

Los nonios son cuatro, situados en los extremos de dos diámetros perpendiculares. Sobre el limbo K que los contiene se elevan dos soportes L, uno de ellos susceptible de variar de altura por medio de un tornillo de rectificacion, que llevan en su parte superior unas muñoneras cilíndricas, en las cuales entran los extremos de un eje cilíndrico tambien y de poco diámetro O, unido á un anteojo R invariablemente, y perpendicular por construccion á su eje de figura. El eje O se mantiene asegurado á los soportes L por medio de unas sobremuñoneras bien ajustadas. Sobre los dos brazos del eje O se apoyan unos rebajos hechos en la parte inferior de los soportes de un nivel P, suelto, colocado sobre dicho eje O y en sentido de la longitud de este. Giratorias alrededor del centro del limbo existen cuatro varillas, cuyos extremos sostienen microscopios, destinados á efectuar las lecturas con mayor precision, y sobre cada uno de los nonios están colocadas placas inclinadas de vidrio deslustrado, para que el reflejo de los rayos del sol sobre la graduacion, no de lugar á equivocaciones causadas por observacion incómoda.

Contiene el teodolito además de las partes descritas, dos niveles susceptibles de rectificacion, colocado el uno Q en la pieza EE′ y en su misma direccion, y el otro Q′ sujeto á la misma pieza pero perpendicularmente á ella.

Completa el instrumento un anteojo R′ que puede girar alrededor de un eje S perpendicular al A y fijo á este.

Para regularizar los movimientos de la parte superior existen el tornillo de presion *m* cuyas pinzas están destinadas á unir el limbo al círculo de los nonios y el de coincidencia *m′*, que teniendo su esferilla fija en aquel, tienen su tuerca en dichas pinzas; y además el de presion *n* cuyas pinzas pueden unir invariablemente al limbo principal con un saliente x que tiene la pieza hueca EE$'$, y uno de coincidencia n' que teniendo su esferilla en dicho saliente, ha en las pinzas del n su tuerca.

Los anteojos son astronómicos, con sus correspondientes retículas susceptibles de rectificacion, y el superior puede asegurar mas su union al círculo de los nonios por medio de una barreta fija á dicho círculo, que se une cuando se quiere á otra barreta giratoria que lleva el anteojo.

El limbo superior está dividido en 2160 partes, correspondientes cada una á 10 minutos, no estando señalados los números sino de 10 en 10 grados, y siendo el sentido de la graduacion contrario á aquel en el cual marchan las agujas de un reloj.

Los nonios de este limbo comprenden 59 partes y están divididos en 60, permitiendo apreciar $\frac{10'}{60} = 10''$.

El limbo inferior ó azimutal está dividido en 1080 partes, comprendiendo cada una 20$'$. El nonio comprende 39 partes y está dividido en 40 apreciando por consiguiente $\frac{20'}{40} = \frac{1200''}{40} = 30''$.

Descritos ya hasta los menores detalles del aparato, para que se pueda formar una idea de los de su tipo, vamos á ocuparnos de su colocacion para medir ángulos horizontales.

Pónese para esto el centro de la meseta del trípode de modo que sea el extremo de la vertical correspondiente al vértice, para lo cual la meseta citada lleva en su parte inferior un gancho, donde se sujeta el hilo de una plomada. Suelen existir unas pequeñas piezas metálicas fijas á la meseta é introducidas en su espesor, las cuales tienen hendiduras destinadas á recibir las puntas de los tornillos que de este modo se hallan mas seguros, y no deforman la madera. El nivel superior está separado de su sitio para evitar su caida. Para preparar los anteojos, se vá sacando ó introduciendo primero el ocular hasta que se vean las cerdas de la retícula, y despues se dá movimientos al sistema completo, ocular y retícula, hasta que la imágen del objeto que se mira aparezca completamente perfecta y limpia.

Rectificaciones.—En este estado, el aparato no está aun dispuesto para la medicion, siendo necesario para esto, sujetarlo á verificaciones y correcciones.

Sea figura 11, (lámina 5.ª) AB la plataforma de los tres tornillos, CD el limbo azimutal, EF el eje del aparato, FG el de los limbos HY. Sea tambien JL la longitud de los muñones del anteojo O, y PQ el nivel, que se coloca en su sitio despues de haber puesto los limbos proximamente horizontales. Las rectificaciones que se han de hacer son las siguientes:

1.ª *Rectificacion del nivel y horizontalidad del eje de rotacion del anteojo* O.—Esta es la rectificacion de un nivel ordinario cuyos apoyos son P*p*, Q*q*, tratando de conseguir la horizontalidad de la línea JL en que está apoyado. Se procura al empezar la rectificacion que esté el nivel en direccion de dos tornillos del pié *t*, *t'*, y se corrige mitad por ellos y mitad por el de rectificacion del nivel, quedando el aparato en la forma indicada en la figura 12, (lámina 5.ª)

2.ª *Paralelismo del eje* JL *de rotacion del anteojo con los limbos* HY.—Esto no es mas que la correccion de otro nivel, cuya longitud de apoyos es $Pp + Jr'$ y $Qq + Ls'$, que descansa sobre la línea HY. El movimiento de giro se le dá por el círculo de los nonios, y la correccion se hace mitad por los tornillos t, t' del pié, y mitad por uno de rectificacion que tiene la parte superior del soporte Ls', el cual hace variar la altura de este.

3.ª *Horizontalidad de los limbos.*—Se reduce á poner un plano horizontal despues de tener una línea. La graduacion hará que el giro que se dé al limbo de los nonios sea de 90°, y la burbuja se atraerá á sus referencias por medio del tercer tornillo del pié, quedando entonces el aparato como indica la figura 13, (lámina 5.ª)

4.ª *Verticalidad del eje* EF *del aparato.*—Está reducida esta rectificacion á marcar la horizontalidad de un plano AB con un nivel no rectificado apoyado en F.

Los giros se le dán al círculo azimutal, soltando las pinzas correspondientes, y las correcciones, al marcar la horizontalidad de la primera línea, mitad por los tornillos t, t' y mitad por el que sujeta á la pieza en escuadra el pequeño arco vertical unido al eje de los limbos. En el giro de 90° para marcar la horizontalidad de la segunda línea, se lleva la burbuja á sus referencias por el tercer tornillo del pié. El aparato queda ya dispuesto como indica la figura 14, (lámina 5.ª)

::

5.ª *Perpendicularidad entre el eje de rotacion y el óptico del anteojo.*—Cuya rectificacion está tambien indicada, corrigiendo por los tornillos de la retícula.

Y 6.ª *Poner una cerda vertical*, para cuya correccion se emplea el movimiento giratorio del tubo en que la retícula está colocada.

Con el teodolito dispuesto de este modo, se pueden medir los ángulos por los tres métodos indicados en el capítulo anterior, teniendo cuidado de apretar bien los tornillos que reunan las partes que deben quedar fijas, y en las que estén en movimiento, detener este antes de llegar á su término, efectuando la perfecta coincidencia por los tornillos de este nombre.

La vista de un aparato de esta clase y el completo conocimiento de los métodos generales de medicion, quitan hasta la mas mínima dificultad en el uso.

LECCION 8.ª

TEODOLITOS DE BRUNNER Y TROUGHTON.

Teodolito de Brunner.—Este y los que á su grupo pertenecen son aparatos reiteradores, destinados á evitar los malos resultados prácticos de los empleados en las mediciones por repeticion.

Consta el que nos ocupa, figura 15 (lámina 5.ª) de tres piés T, T′, T″, que por la union de sus extremos superiores forman una pequeña plataforma A, y tienen atravesados los inferiores por grandes tornillos *t*, *t′*, *t″* que son los verdaderos apoyos del aparato. Del centro de la plataforma A se eleva un pivote vertical de acero, que en la parte más próxima á A está rodeado por un collar de poca altura, en el cual vá montado un limbo BC, el que se puede fijar invariablemente á la plataforma A por medio de dos tornillos de presion *a* y *a′* que atraviesan unas orejetas ó salientes *b*, *b′* de la misma plataforma. Completamente independiente en sus movimientos del limbo BC, existe otro DE interior á él, que lleva dos nonios cuyos ceros se hallan en el extremo de un mismo diámetro, y de cuya parte central y unido á él invariablemente se eleva un manguito FG que sostiene toda la parte superior del aparato, en el cual se introduce el pivote de acero de la plataforma A, debiendo quedar este y la parte interior del manguito bien ajustados, pudiendo girar este con rozamiento suave.

Para que en caso necesario pueda formar el limbo cuerpo con el círculo de los nonios, y regularizar los movimientos, existen un tornillo de presion *d* y uno de coincidencia *d'*, que teniendo su esferilla en el BC, tiene su tuerca en la pinza que apoya sobre el DE. Cristales deslustrados impiden la reflexion directa, y microscopios sujetos á una varilla giratoria alrededor del centro hacen mas precisa la observacion.

En la parte superior del manguito FG, está sujeta una regla HY, en cuyo extremo H existe un contrapeso cilíndrico F' destinado á equilibrar el aparato. Sobre la regla HY se elevan dos soportes *m*, *m'*, uno de ellos de altura rectificable por el tornillo *n'*, en los cuales entra una pieza cilíndrica hueca KL, que en su extremo L y perpendicular por construccion á su eje, lleva un limbo PQ fijo invariablemente á ella. En el interior de la pieza KL, perfectamente ajustado y con rozamiento suave, entra un eje de acero terminado en uno de sus extremos por el boton acordonado ε y llevando en el otro extremo y perpendicular á su direccion el círculo RS de los dos nonios cuya circunferencia exterior encaja perfectamente en la interior del PQ. Para regularizar los movimientos de aquel sobre este, existen los tornillos de presion α y de coincidencia α'. Sobre el círculo RS y en direccion de uno de sus diámetros se elevan los dos soportes x, x', iguales por construccion, pero no rectificables, en cuyos collares perfectamente cerrados está fijo el anteojo U, de retícula corregible, y en la parte posterior del limbo PQ, y perpendicularmente á la direccion de la pieza KL, existe fijo un nivel de aire O con su correspondiente tornillo de rectificacion.

Los limbos, tanto horizontal como vertical están divididos en sestos de grado, correspondiendo cada nonio á una magnitud de 59 divisiones y estando dividido en 60. La apreciacion es por consiguiente de 10 en 10″.

La numeracion es de 10 en 10° y vá en el sentido directo de las rotaciones, es decir de izquierda á derecha por arriba.

La retícula del anteojo se compone de cuatro cerdas, una vertical en sentido de un diámetro, y las otras tres horizontales y equidistantes, pasando la intermedia tambien por el centro.

Conocido ya el instrumento de que nos ocupamos, es necesario ahora conocer el modo de colocarle en la disposicion conveniente para la medida y reiteracion de los ángulos horizontales. Para este efecto va montado en un trípode de los que hemos descrito, y en el cual un tornillo introducido en una tuerca que lleva el aparato en su parte inferior y solicitado hácia los piés por un muelle, sirve para conseguir su estabilidad. Tambien en la parte inferior y central de la plataforma de dicho trípode existe un gancho donde se cuelga el hilo de una plomada, cuya direccion debe corresponder en el momento de operar, al vértice del ángulo deseado.

Cuando esto suceda, debemos cerciorarnos de si el limbo BC es horizontal y si el PQ es vertical, y siendo estos por construccion perpendiculares á sus respectivos ejes, dicha conviccion nos llevará tambien la de verticalidad y horizontalidad respectiva de los FG y KL.

Para cerciorarnos de que el anteojo en su cabezeo describe un plano vertical con su eje óptico, bastará poner por los tornillos de la retícula, este eje óptico paralelo al limbo PQ. De modo que las verificaciones y correccion que con este instrumento tienen que hacerse antes de la medicion, son:

1.ª *Arreglo del nivel* O.—Para esto, como el nivel vá sujeto al limbo PQ en los puntos A y B fig. 16 (lám. 5.ª) y como dicho limbo, su eje L, el FG y el círculo DE de los nonios están formando cuerpo, nada nos impide suponer que los piés del nivel son las líneas ideales A*a* y B*b*, en cuyo caso podemos aplicar ya el general de la rectificacion de niveles á este particular, sirviéndonos para facilitar los giros el citado círculo de los nonios con sus tornillos de presion y coincidencia, y para corregir los tornillos del pié y el de rectificacion del mismo nivel.

Efectuada ya esta correccion es llegado el caso de pasar á la rectificacion segunda.

2.ª Consiste esta en *poner el limbo* BC *horizontal.*—Tenemos ya en él marcada una línea con dicha condicion, y como hemos indicado ya tantas veces, para lograr la segunda, no hay mas que dar un giro de 90°, poniendo la burbuja en sus referencias por medio del tercer tornillo del pié. Se marca de este modo una horizontal á la altura del nivel, y otra paralela en el plano del limbo, que con la $\overline{B}C$, antes encontrada, fijan á dicho plano en la deseada posicion, la cual lleva consigo la colocacion vertical del FG.

3.ª *Horizontalidad del eje de rotacion* KL *del anteojo y perpendicularidad entre este y el óptico.*—Dicho está ya el modo de hacer esta verificacion, y en cuanto á las correcciones se pueden efectuar en este caso por los tornillos de la retícula y por el n' del soporte.

Como al limbo azimutal no le podemos imprimir movimientos lentos, por carecer de tornillo de coincidencia, no es aplicable á este instrumento la medida de los ángulos por repeticion, midiéndose por reiteracion solamente del modo general expresado, utilizando como convenga los tornillos reguladores.

Teodolito de Troughton.—Fig. 17 (lám. 5.ª) Este instrumento tiene tambien dos platillos horizontales, sirviendo el uno de limbo azimutal y el otro de círculo de los nonios. El primero AA tiene su diámetro algo mayor que el segundo, estando su superficie lateral trabajada segun un tronco de cono y llevando en ella la graduacion, que para mayor claridad está en una cinta de plata. Dicho limbo está sujeto al eje γ por una abrazadera que puede girar alrededor de él, existiendo para detener este movimiento un collar n que envuelve á dicha abrazadera á la cual comprime contra el eje en caso necesario por medio del tornillo r que entra en las orejetas $\overline{P}$, y para regularizarlo el tornillo r', que teniendo su esferilla en un saliente del brazo m, posee su tuerca en otro saliente q del collar n. El platillo de los nonios BB, de movimientos completamente independientes de los del limbo, y de seccion algo menor que la de este, es cilíndrico, llevando solamente en los extremos de un mismo diámetro dos partes rebajadas D, segun una superficie prolongacion de la AA, que llevan los nonios sobre cinta de plata. El BB puede fijarse al AA por medio del tornillo de presion K; y el de coincidencia K′ permite el movimiento lento del uno sobre el otro.

El eje γ sobre el cual los dos discos giran, tiene tres brazos m, m, m, atravesados en sus extremos por tornillos b, b', b'', los cuales terminan en su parte inferior por pequeños conos c, c', c'', destinados á producir la perfecta estabilidad del aparato, como despues veremos.

Sobre el disco BB existen dispuestos perpendicularmente el uno al otro, dos niveles de aire E, E′, cuyos apoyos son dos tornillos de rectificacion, ocupando tambien la parte central de dicho disco una pequeña *brujula* F, destinada á orientar los levantamientos que con este aparato se efectuen. Elévanse tambien sobre el BB dos soportes ó caballetes GG, cuyas partes superiores llevan los coginetes de un eje de rotacion O. En este y perpendicularmente á su direccion está montado un semicírculo graduado de metal MM, el cual á su vez sirve de apoyo á los soportes P, P′, de un anteojo QQ′, uno de los que es rectificable. Con el objeto de permitir movimientos rápidos y lentos al semilimbo vertical MM, vá montada en su mismo eje, y próxima á uno de sus extremos, una pieza S la cual por medio de los tornillos t'' y h puede impedir por completo el movimiento de dicho semilimbo, ó permitirle por el segundo uno de extrema lentitud. El nonio N es fijo, y está sujeto al limbo BB. Pendiente del anteojo QQ′ existe un nivel de aire x, cuyos sostenes z y z' son dos tornillos de rectificacion. Dicho anteojo, perfectamente cilíndrico en su exterior, está introducido en unos collares tambien perfectamente cilíndricos y del mismo radio, pudiendo cambiar de posicion en ellos, á favor del giro de la parte superior del collar alrededor de una charnela fija en la mitad inferior. Cuando el collar está cerrado, se sujeta las dos mitades por medio de las clavijas $\delta\delta'$. El anteojo tiene su retícula de tres cerdas, una horizontal y otras dos dispuestas formando un ángulo, como indica la figura 18 (lámina 5.ª) El disponerlas así ha sido por la creencia de que es menos expuesto á error, comprender el punto que se observa dentro de un ángulo, que dividirle en dos partes iguales por medio de una cerda. Cuatro tornillos colocados en los extremos de dos diámetros perpendiculares, sirven para permitir á la retícula movimientos en un plano perpendicular al anteojo. Para que el punto observado por este se distinga con claridad, existe unido al objetivo, un tubo Q′, que se introduce en el principal, teniendo en direccion de una generatriz una cremallera en la cual engrana un piñon, movido por el boton x.

El apoyo del aparato es un trípode inglés, con una

::

meseta adicional representada en la fig. 19, y 19 bis, representando tambien esta en corte la parte inferior del teodolito. Consta de una pieza de tres brazos m, con un taladro á rosca en su parte central, destinado á recibir la espiga del trípode.

Dicha pieza m tiene tres taladros cónicos, en los cuales hay que introducir los piés del aparato, y para sujetarlo, existe una placa A, giratoria alrededor del pivote h, que cuando tiene sus taladros correspondiendo con los de la m, permite la entrada á los piés, é impide su salida dándole un pequeño movimiento, sujetándose en seguida por medio del tornillo de presion k. Los dos limbos AA y MM están divididos en medios grados y numerados de 10 en 10. Los nonios contienen 29 de las divisiones y están divididos en 30 partes siendo por consiguiente su apreciacion de $\frac{30'}{30} = 1'$. La graduacion del AA es completa y está en el sentido directo de las rotaciones, y la del MM está dividida en dos de sentidos contrarios, cuyo cero comun corresponde al del nonio fijo, cuando el eje óptico del anteojo marca la horizontal.

En la cara posterior del semilimbo vertical MM existe otra graduacion que corresponde á las diferencias entre una longitud de 100 metros y su proyeccion, formando las dos líneas los ángulos marcados por las lecturas correspondientes de la cara opuesta; para encontrar dicha graduacion se ha hecho uso de la fórmula hallada figura 15 (lámina 2.ª)

$$AB - AC = 2AB\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\alpha;\ 100 - AC = 2\times100\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Requiere este instrumento antes de operar con él las siguientes verificaciones y correcciones.

1.ª *Arreglar los niveles* E, E'.—Como están estos niveles dispuestos perpendicularmente el uno al otro, no hay inconveniente en hacer esta correccion aislada en cada uno de ellos, colocando á aquel con el cual se esté operando en direccion de dos tornillos del pié, y efectuando las demás operaciones ya sabidas.

2.ª *Conseguir la verticalidad del eje* H *del aparato.*—Bastará para ello, hecha ya la correccion anterior, poner uno de los niveles en direccion de dos tornillos del pié quedando el otro nivel en consecuencia perpendicular á la direccion de la línea que une dichos dos tornillos. Se lleva la burbuja del primer nivel á sus referencias por medio de los tornillos en cuya direccion está, y la burbuja del segundo nivel se lleva tambien á su parte central por medio del tercer tornillo del pié, y estando entonces marcadas dos líneas horizontales en el limbo, las cuales se cortan, dicho limbo está horizontal, y vertical en consecuencia al eje H.

3.ª *El eje óptico del anteojo debe coincidir con el eje de figura.*—Como el anteojo tiene collares en los cuales puede girar, y tornillos de rectificacion en su retícula, ninguna dificultad hay ya en hacer esta verificacion y la correccion correspondiente.

Arreglado ya de esta manera el aparato puede servir para repetir los ángulos de uno en uno, y para reiterar, pero no puede repetir los ángulos de dos en dos, por no tener mas que un anteojo.

Precauciones necesarias para la conservacion de los instrumentos topográficos.—Las distintas partes de estos aparatos pueden estar barnizadas ó pavonadas, ó bien tener descubierto el metal. En el primer caso, no hay que temer su oxidacion, pero en el segundo es de absoluta necesidad despues de usados el frotarlos con gamuza con el objeto de que no conserven las mas mínimas señales de humedad. Las partes barnizadas solo deben frotarse muy ligeramente, y con un trapo muy fino, bastante usado y perfectamente limpio. Suélense tambien limpiar las partes descubiertas como son las que contienen las graduaciones etc., con una gamuza y tierra fina llamada *de Segovia*, obtenida por levigacion, ceniza reducida á polvos muy finos por el mismo medio, ó mejor con *creta*, pero debe evitarse en cuanto se pueda el empleo de toda sustancia, pues es difícil evitar el que con ella se raye la parte frotada. El cuidado en la limpieza de los instrumentos es de primordial importancia, pues sin él las graduaciones se alteran y se entorpecen los movimientos. Cuando se trasportan los aparatos, y aun cuando estén en su depósito, es conveniente tenerlos en cajas construidas á propósito para ellos, y en las que se procura que no cargue todo el peso del instrumento sobre un solo apoyo, sino en los mas que sea posible. No deben tampoco tener movimiento en dichas cajas, sino estar perfectamente asegurados en ellas por rebajos y taravillas, forrados unos y otras de bayeta. Se deben engrasar los tornillos y partes no barnizadas de los instrumentos nuevos, con el aceite que usan los relojeros, y por fin nunca se podrá encarecer bastante el cuidado que en los transportes necesitan los aparatos que para las operaciones debamos emplear, y de los cuales depende toda la exactitud de estas.

LECCION 9.ª

CORRECCIONES ANGULARES.

No son las correcciones de los instrumentos las únicas que hay que efectuar para que los ángulos queden determinados del modo mas exacto posible. La imperfeccion de las señales y los errores accidentales, que nunca se pueden evitar por completo, suelen producir defectos de alguna consideracion en el ángulo que se mide. Para conocer estos defectos y atenuarlos en lo posible, se podia adoptar el medio de medir directamente los tres ángulos de cada triángulo, comprobar si su suma en cada uno valía 180°, y caso de que esto no sucediese y la diferencia no fuera excesiva, podia repartirse el error entre dichos ángulos al trasladarlos al papel, con lo cual se obtendrian *corregidos*.

Pero para efectuar la medicion directa de cada ángulo, segun lo que hasta ahora hemos dicho, es necesario que nos coloquemos en su vértice, y esto no es practicable en muchos casos. Puede suceder en ellos que convenga ó sea de imprescindible necesidad el tomar como vértice un punto tal como la varilla eje de la veleta de una torre, el pico de una peña, ó una obra notable de una plaza sitiada, (*) etc. Entonces la estacion en imposible, siendo necesario para medir el ángulo, tomar como vértice un punto inmediato, y en el valor que resulte de esta medicion inexacta, hacer la correccion de que vamos á ocuparnos.

Reduccion al centro de estacion ó al eje de la señal.—Supóngase que al tratar de medir un ángulo AOB cuyo vértice es O, figura 1.ª (lámina 6.ª) nos encontramos en la imposibilidad absoluta de hacer estacion en dicho punto. Elijamos otro C lo más próximo posible al O, y tratemos de ver lo que hay que añadir ó quitar al ángulo C medido, para reducirle al valor del O.

Llamemos r á la distancia OC que existe entre los dos puntos, d á la distancia OB de la derecha, y á la distancia OA de la izquierda, y δ al ángulo ACO, de *direccion*.

Se tiene entonces $APB = o + A = c + B$, de modo que $o = c + B - A$, cuyo segundo miembro vamos á poner en funcion de cantidades que con facilidad se puedan conocer y determinar. Para ello se tiene

$$\frac{\text{sen. B}}{\text{sen.}(\delta + c)} = \frac{r}{d}\,; \ \text{sen. B} = \frac{r \,\text{sen.}\ (\delta + c)}{d}\,;$$

y como el ángulo B será siempre muy pequeño en

(*) Siendo generalmente el terreno objeto de los levantamientos militares de poca extension, no suele exigirse en ellos exactitud grande, por lo que este último caso es menos probable.

razon á la poca distancia que media entre O y C y á la considerable que los separa de B, se puede admitir

sen. $B = B = \frac{r \text{ sen. } (\delta + c)}{d}$. Este valor de B, es lineal, de modo que al reunirlo en ecuacion con los ángulos o y c, para que esta sea homogénea, es necesario encontrar su valor gradual, convirtiéndose así la anterior expresion en $B = \frac{r \text{ sen. } (\delta + c) \times 1''}{d \text{ sen. } 1''}$. Del mismo modo el triángulo A O C nos dá $A = \frac{r \text{ sen. } \delta \times 1''}{y \text{ sen. } 1''}$; y sustituyendo estos valores se obtiene $o = c + \frac{r \text{ sen. } (\delta + c) . 1''}{d \text{ sen. } 1''} - \frac{r \text{ sen. } \delta . 1''}{y \text{ sen. } 1''}$.

En esta espresion, la cantidad

$\frac{r \text{ sen. } (\delta + c) 1''}{d \text{ sen. } 1''} - \frac{r \text{ sen. } \delta . 1''}{y \text{ sen. } 1''}$, es la correccion que hay que efectuar. Observándola se nota, que los aumentos de valor de d y de y disminuyen ambos términos de la resta, llegando tambien á reducir á extrema pequeñez la recta misma; á la vez que los aumentos de r la hacen aumentar, lo cual nos dice: que *la correccion se hará tanto mas innecesaria cuanto mas lejanos estén los puntos que se observan, y cuanto mas próximos el punto vértice y el punto de estacion.*

Cuando los dos términos del error son iguales, se destruyen y se tiene $c = o$, lo que nos dice que los puntos A y B están en la misma circunferencia que los C y O, y que en este caso el error no existe.

::

La fórmula encontrada es general, lo cual comprobaremos viendo la identidad que en todos los casos resulta, entre los resultados analíticos deducidos de su discusion, y los obtenidos directamente en cada posicion del punto elegido por vértice auxiliar.

1.er *Caso.*—Consideremos siempre á la línea OC como orígen de los arcos, fijémonos en el punto C, y supongamos que se vá acercando sin cesar á uno de la direccion de la línea AO en su prolongacion. En cuanto esto suceda, el ángulo δ irá disminuyendo y el $c+\delta$ tenderá á ser igual á c. Cuando el punto C se haya confundido con la citada línea AO, $\delta=o$ y $c=c+\delta$, por lo cual la expresion del error se reduce á $o-c=\dfrac{r\,\text{sen.}\,c\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''}$,

lo que nos dá tambien la consideracion de la figura 2.ª (lámina 6.ª) en la que $o=c+\text{B}$, y el valor de B es, con las mismas consideraciones anteriormente efectuadas

$$\frac{r\,\text{sen.}\,c.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''}.$$

2.º *Caso.*—Si en vez de acercarse el punto C á la prolongacion de la AO, tendiese á colocarse en uno intermedio entre A y O, δ que es el ángulo formado por las visuales dirigidas desde C á los puntos O y A tenderá á ser igual á 180°, y cuando se haya efectuado dicha colocacion se tendrá

$\delta=180°$, $c+\delta=c+180°$, y la expresion del error

$$o-c=\frac{r\,\text{sen.}\,(180°+c).\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''}=-\frac{r\,\text{sen.}\,c.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''}.$$

Lo cual tambien se comprueba en la fig. 3.ª (lám. 3.ª) en donde se tiene

$$c = o + \mathrm{B};\ \text{y}\ \mathrm{B} = \frac{r\,\text{sen.}\,c\,.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''} \qquad o - c = -\frac{r\,\text{sen.}\,c\,.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''}.$$

3.er *Caso.*—Si C va á colocarse en la bisectriz del ángulo verdadero, y mas separado de los puntos A y B que el punto O, tendremos $\delta + c = \alpha$; $\delta = 360^\circ - \alpha'$; reduciéndose la fórmula á

$$o - c = \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha\,.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''} - \frac{r\,\text{sen.}\,(360^\circ - \alpha')\,1''}{y\,\text{sen.}\,1''} =$$

$$= \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha\,.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''} + \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha'\,.\,1''}{y\,\text{sen.}\,1''}.$$

Teniendo tambien en la fig. 4.ª (lám. 6.ª)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}o = \alpha' + \mathrm{A}; \\ \frac{1}{2}o = \alpha + \mathrm{B} \end{array}\right\} o = c + \mathrm{A} + \mathrm{B};\ o - c =$$

$$= \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha'\,.\,1''}{y\,\text{sen.}\,1''} + \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''}.$$

4.º *Caso.*—Supongamos por último, que se adopte el punto C en la bisectriz del ángulo verdadero y mas próximo de los puntos A y B que el punto O.

Entonces se tiene $c + \delta = 180^\circ + \alpha$; $\delta = 180^\circ - \alpha'$, y la fórmula se convierte en

$$o - c = -\frac{r\,\text{sen.}\,\alpha\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''} - \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha'\,.\,1''}{y\,\text{sen.}\,1''}.$$

Deduciéndose de la fig. 5.ª (lám. 6.ª)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha' = \frac{1}{2}o + A;\\ \alpha = \frac{1}{2}o + B:\end{array}\right\} \alpha + \alpha' = c = o + A + B;$$

$$o - c = -(A + B) = -\left(\frac{r\,\text{sen.}\,\alpha.\,1''}{d\,\text{sen.}\,1''} + \frac{r\,\text{sen.}\,\alpha'.\,1''}{y\,\text{sen.}\,1''}\right).$$

Demostrada la generalidad de esta fórmula, resta tan solo indicar la manera de encontrar las cantidades que en ella figuran.

El ángulo c se mide directamente. Los lados y y d se deducen de los ángulos no corregidos; es decir, se resuelve el triángulo ABO midiendo el lado AB y los ángulos A y B, y se deduce el valor de dichos y y d.

Resta, pues, encontrar los de las cantidades δ y r, para lo cual se emplean diversos procedimientos deducidos en cada caso de la forma especial del obstáculo en que el vértice esté contenido, de cuyos procedimientos indicaremos algunos que pueden facilitar el camino de los demás.

Sea en primer lugar fig. 6.ª (lám. 6.ª) el eje de una torre cilíndrica el que se toma como eje de la señal; sea tambien M la proyeccion de esta torre, y O la de su eje. Hemos tomado como vértice auxiliar el punto C, y necesitamos medir el ángulo $ACO = \delta$ y la distancia $CO = r$.

Para determinar δ pueden trazarse dos alineaciones en sentido de las tangentes CC', CC'' y observando los ángulos ACC' y ACC'', su semisuma es el ACO buscado. Tambien puede hacerse, tomando en la direccion de las dos alineaciones CC' y CC'' dos puntos N y N' equidistantes del C, se marca el punto medio H de la recta que los une y colocando en él una banderola, la direccion CH será la del segundo lado del ángulo δ.

El valor de r se encuentra, ó bien midiendo la circunferencia y deduciendo el valor del rádio oH′ el cual se añade al CH′ obtenido directamente, ó bien por el triángulo rectángulo OM′C, en el cual se tiene conocido el lado M′C medido directamente, el ángulo recto en M′, y el OCM′ obtenido anteriormente, de lo que se deduce OM′$=$M′C tang. OCM′, siendo OM′$+$CH′ igual al valor r pedido.

Cuando el obstáculo en cuya parte central está el eje de la señal colocado, sea una torre ó edificio cuadrado ó rectangular en su seccion horizontal, varía algo el método de obtencion de las cantidades pedidas. Sea MN la base de la torre, caso que sea cuadrada, ó la M′N′ caso que sea rectangular fig. 7.ª (lám. 6.ª). El ángulo δ que deseamos encontrar es el ACO. Tomemos el punto medio de la cara MQ ó M′Q′ y levantemos una perpendicular á dicha línea en el punto p así determinado. Tomemos en esta perpendicular una distancia pO′ igual á Mp en el primer caso ó á $\frac{N'Q'}{2}$ en el segundo, y trazemos las líneas Cp y CO′. En un punto cualquiera de esta, levántese una línea paralela á la pO′, y tómese sobre ella la distancia $bc=ab$.; márquese la alineacion Cc y este será el segundo lado del ángulo OCA$=\delta$ que hay que medir. La distancia CO$=r$ se encuentra, sumando la CD, medida en la direccion de la alineacion establecida con la DO′.

Cuando la seccion del obstáculo fuese un polígono regular cualquiera fig. 8.ª (lám. 6.ª) se puede formar el triángulo MNO′=MNO, teniendo de este modo determinado PO′=PO, y siguiendo ya los demás del procedimiento como en el caso anterior.

Cuando el sitio inaccesible en que la señal estuviese colocada fuese irregular, se vé si por medio de procedimientos geométricos se puede determinar el sitio correspondiente al eje de la señal, y caso de ser imposible de todo punto, es necesario tomar otra estacion.

Reduccion al horizonte.—Sea fig. 9.ª (lámina 6.ª) ACB el ángulo medido en C en el plano de los objetos, y se trata de encontrar su valor en proyeccion horizontal. Supongamos que sea $\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}$ la del triángulo ABC, y llamemos α, β, γ, los ángulos de inclinacion de los lados AB, AC y CB sobre el horizonte.

Tendremos entonces que

$$b=\bar{a}\,\bar{c}=AC\cos.\beta;\ c=\bar{a}\,\bar{b}=AB\cos.\alpha;\ \ a=\bar{b}\,\bar{c}=BC\cos.\gamma$$

y por las fórmulas $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\bar{c}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$

$$\text{tang.}\ \frac{1}{2}\bar{a}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}};$$

$$\text{tang.}\ \frac{1}{2}\bar{b}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

se determinan los valores de los ángulos horizontales buscados.

Coreccion de la excentricidad de los anteojos.—Sean A y B los extremos de los lados y O el vértice del ángulo que se desea fig. 10 (lám. 6.ª) Aunque por lo general los aparatos medidores no suelen tener mas que un anteojo excéntrico, consideraremos sin embargo el caso mas desfavorable de los que contienen dos, siendo ambos excéntricos.

Sea E el punto donde está fijo el anteojo superior, y D aquel donde se sujeta el inferior. Llamemos $OE=e$ la excentricidad del primero y $OD=e'$ la del segundo, indicando tambien por las letras y y d las distancias que existen desde el punto O, á los A y B.

Recordando la medicion de los ángulos y repitiéndolos de dos en dos, sabemos que hay que dirigir primeramente el anteojo superior al objeto A de la izquierda, tomando dicho anteojo por consiguiente la posicion EA, mientras que el inferior, dirigido al objeto de la derecha toma la posicion BD. Se hace girar en seguida todo el sistema alrededor de su eje vertical hasta que por el inferior se observe el punto A, tomando la posicion AD′, mientras que el punto E, apoyo del superior, recorriendo un arco EE′ del mismo valor gradual que el DD′, ha venido á colocarse en E′. Si se mueve en seguida el anteojo superior hasta tanto que por él se vea el objeto B de la derecha, tomará una posicion BE″ siendo $EE''=EE'$. Llamemos x al ángulo buscado y m el arco $E'E''=DD'+EE''$ en valor gradual. El $D'OE''$ será igual á $BOE''+AOD'+x=AOE+BOD+m-x$; y como por la gran distancia á que los puntos A y B se encuentran del punto O, y por la pequeñez de la excentricidad, se pueden considerar muy pequeños tambien los ángulos α, α', ε y ε', se tendrá:

$$BOE''=90°-\alpha=90°-\text{tang.}\,\alpha=90°-\frac{e}{d};$$

$$AOD'=90°-\varepsilon=90°-\text{tang.}\,\varepsilon=90°-\frac{e'}{y};$$

$$AOE=90°-\varepsilon'=90°-\text{tang.}\,\varepsilon'=90°-\frac{e}{y};$$

$$BOD=90°-\alpha'=90°-\text{tang.}\,\alpha'=90°-\frac{e'}{d}.$$

Si estos valores se sustituyen en la igualdad antes encontrada

$$90°-\frac{e}{d}+90°-\frac{e'}{y}+x=90°-\frac{e}{y}+90°-\frac{e'}{d}+m-x;$$

de donde $\quad \dfrac{e}{d}+\dfrac{e'}{y}-x=\dfrac{e}{y}+\dfrac{e'}{d}-m+x;$

$x-\dfrac{m}{2}=\dfrac{e-e'}{2d}-\dfrac{e-e'}{2y}$, y para hacer la expresion homogénea $x-\dfrac{m}{2}=\dfrac{(e-e')\,1''}{2d\,\text{sen.}\,1''}-\dfrac{(e-e')\,1''}{2y\,\text{sen.}\,1''}$.

Como esta es una fórmula deducida de supuestos completamente generales, podemos hacer en ella las suposiciones adecuadas á los diferentes casos que pueden ocurrir en la práctica:

1.º Supongamos $e=e'$ y sean además estas excentricidades opuestas, ó mas claro, que sean sus puntos de apoyo los dos extremos de un mismo diámetro de igual seccion del eje en que están montados. Entonces $x=\frac{m}{2}$, siendo en este caso nula la correccion, pues $\frac{m}{2}$ es la mitad del arco recorrido por el nonio sobre el limbo.

2.º Supongamos que $e=o$ ó $e'=o$, es decir que ó bien no existe mas que un anteojo, ó caso de existir dos, uno de ellos es concéntrico. Se reduce en estos casos la fórmula á $x-\frac{m}{2}=\frac{e.1''}{2\,d\,\text{sen.}\,1''}-\frac{e.1''}{2\,y\,\text{sen.}\,1''}$;

ó $x-\frac{m}{2}=\frac{e'.1''}{2\,y\,\text{sen.}\,1''}-\frac{e'.1''}{2\,d\,\text{sen.}\,1''}$; simplificándose mucho en este caso la general.

3.º Queremos ahora suponer que las excentricidades son iguales y del mismo lado, es decir $e=-e'$, supuesto que tomamos como positivas las de los dos anteojos, á contar desde el centro y hácia lados opuestos.

$$x-\frac{m}{2}=\frac{2e.1''}{2d\,\text{sen.}\,1''}-\frac{2e.1''}{2y\,\text{sen.}\,1''}=$$

$$=2\left(\frac{e.1''}{2d\,\text{sen.}\,1''}-\frac{e.1''}{2y\,\text{sen.}\,1''}\right).$$

Lo que nos dice que la excentricidad igual y del mismo lado en los dos anteojos nos obliga á hacer una correccion de valor doble que la que se efectuaba cuando el anteojo superior era concéntrico.

Correccion relativa á la fase de la señal.— Sea MNOP la señal que nos indica la posicion del punto B al cual se observa, fig. 11 (lám. 6.ª). Supongamos que solo la cara MN esté iluminada por el sol. A causa de la gran distancia á que la señal se encuentra, solo dicha MN será visible, y entonces el observador tomándola como señal completa, dirigiria su visual á C en vez de dirigirla á B, cometiendo en la medicion del ángulo un error representado por el COB. Pero este, á causa de su gran pequeñez tiene por valor $\frac{\text{sen. COB}.1''}{\text{sen. }1''}$, dándonos además el triángulo COB, $\frac{\text{sen. COB}}{\text{sen. CBO}} = \frac{\text{CB}}{\text{CO}}$; convirtiéndose el error en la cantidad:

$\text{error} = \frac{\text{CB sen. CBO }1''}{\text{CO sen. }1''}$; CO resulta de la resolucion con los ángulos no corregidos, y CB y el ángulo CBO se miden directamente.

Puede hacerse tambien esta correccion, por medio de muchas observaciones á distintas horas, de cuyas observaciones se encuentra el término medio.

Con el objeto de evitar la correccion de que acabamos de hablar, se colocan en las señales varillas bien rectas y de escaso diámetro en su seccion, poniéndose en su cúspide, conos rectos ó esferas, cuya forma visible en el momento de la observacion nos indica si la visual está bien ó mal dirigida.

LECCION 10.

CÁLCULO DE LA TRIANGULACION, Y MÉTODOS EMPLEADOS PARA TRASLADAR LOS PUNTOS AL PAPEL.

En la leccion anterior se indicó la necesidad de efectuar la medicion directa de cada ángulo, para comprobar despues la suma de sus valores en los triángulos que los contenian. Digimos que al obtener dichos valores, era necesario hacer ciertas correcciones, las cuales se mencionaron, y ya efectuadas se tienen unos ángulos que aun no son los verdaderos, á los que hay que sujetar á una alteracion sistemática en su valor para poder trasladarlos al papel.

De esto nos vamos á ocupar en la presente leccion. Con los ángulos obtenidos por medicion directa y aun no corregidos, se efectua una resolucion de los triángulos apoyándose en la base medida, y se obtienen de esta manera lados no corregidos tampoco. El valor de estos es el que se sustituye en las fórmulas de las correcciones que se acaban de indicar.

Efectuadas ya dichas correcciones se obtienen otros valores de los ángulos, y de estos últimos partimos para establecer el método de efectuar la correccion definitiva.

Dos son los procedimientos que para ello se emplean segun sean los triángulos del cánevas trigonométrico ó del topográfico.

En el primer caso, supongamos sean A, B, C, D, E, F, los puntos del contorno, fig. 12, (lám. 6.ª) que hayamos elegido y O el punto central. Nos colocamos en estacion en el primer punto A, y medimos los ángulos B A O y F A O. Colocándonos despues en B, medimos los A B O y C B O. Haciendo luego estacion en C se miden los B C O y D C O, y así se vá continuando en cada vértice del contorno, la medicion de los dos ángulos que apoyan en él. Hecho ya esto, seria necesario encontrar tambien desde O todos los ángulos que tienen su vértice en este punto, haciendo luego en cada triángulo la comprobacion de que la suma de los tres ángulos debe igualar á 180°. Pero existe en el caso de que nos ocupamos otro procedimiento que perfecciona al de correccion. En efecto, la suma de todos los ángulos en O debe valer 360°. Hallemos pues en cada uno de los triangulos, su ángulo del centro por diferencia entre 180° y la suma de los dos medidos en los vértices del contorno, y hallados de este modo todos los ángulos en O, compruébese si su suma vale 360°. Generalmente no sucederá así, por pocos errores que se hayan cometido. Se divide entonces la diferencia entre 360° y la suma que se haya encontrado por el número de ángulos en O que existan, y si este cociente no iguala ó sobrepuja á la apreciacion del instrumento con que se mide, se añade ó quita á cada uno de los ángulos, segun sea el error por defecto ó esceso, consiguiendo de este modo que los 360° se completen sin alterar los medidos en una cantidad mayor que la apreciacion.

Pero esta correccion efectuada, ya no igualan á 180°

la suma de los ángulos de cada triángulo, y para volver á este valor, se efectua esta suma con el O corregido, y la diferencia entre ella y 180° se reparte por partes iguales en los dos ángulos del contorno, añadiendo ó quitando, segun sea el error por defecto ó por esceso, pero teniendo siempre cuidado que lo que se añada ó quite, no debe nunca igualar ni sobrepujar la apreciacion del instrumento.

En este estado los ángulos, pudiera creerse que ya son los corregidos y que podemos trasladarlos al papel, y no es así. En efecto, las correcciones en los ángulos han implicado variaciones en los lados, debiéndonos asegurar antes de dibujar del plano, que el polígono cierra, lo cual no siempre sucederá.

Consideremos en la misma fig. 12, á AB como la base medida directamente. La resolucion del triángulo AOB conociendo sus ángulos y dicha base, nos dará á conocer los lados AO y BO. Apoyándonos en este lado, y conociendo tambien los ángulos del BOC lo resolvemos y encontramos los valores de BC y de CO. Por el tercer triángulo determinamos CD y DO, por el cuarto DE y OE, por el quinto EF y OF, y por el sexto FA y AO.

Ahora bien, para que el polígono cierre, es preciso que el valor de AO encontrado en este último triángulo, sea igual al del mismo AO, deducido de la resolucion del primero.

Si esta longitud resulta mayor que aquella, nos indica que la suma de los ángulos de la derecha d, d' d'' etc. de la base de los triángulos es muy pequeña con relacion á la suma de los y, y', y''... de la izquierda, y lo contrario en el caso de que el AO del primer triángulo fuese menor que el AO del último, lo que indica el polígono AB′C′D′E′F′A′ en la misma figura.

Es necesario pues que tengamos algun medio que nos asegure el cierre, por la comparacion entre las dos sumas citadas y para ello vamos á demostrar que: *en los ángulos del contorno de todo polígono cerrado, se verifica que la suma de logaritmos de los senos de los ángulos de la derecha iguala á la suma de logaritmos de los senos de los ángulos de la izquierda.*

En cada uno de los triángulos existe proporcionalidad entre los lados y los senos de los ángulos opuestos, pudiéndose pues establecer

$$\frac{FO}{AO}=\frac{\text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, d};\ \frac{AO}{BO}=\frac{\text{sen.}\, y'}{\text{sen.}\, d'};\ \frac{BO}{CO}=\frac{\text{sen.}\, y''}{\text{sen.}\, d''};$$

$$\frac{CO}{DO}=\frac{\text{sen.}\, y'''}{\text{sen.}\, d'''};\ \frac{DO}{EO}=\frac{\text{sen.}\, y^{\text{iv}}}{\text{sen.}\, d^{\text{iv}}};\ \frac{EO}{FO}=\frac{\text{sen.}\, y^{\text{v}}}{\text{sen.}\, d^{\text{v}}};$$

$$1=\frac{\text{sen.}\, y\,\text{sen.}\, y'\,\text{sen.}\, y''\,\text{sen.}\, y'''\,\text{sen.}\, y^{\text{iv}}\,\text{sen.}\, y^{\text{v}}}{\text{sen.}\, d\,\text{sen.}\, d'\,\text{sen.}\, d''\,\text{sen.}\, d'''\,\text{sen.}\, d^{\text{iv}}\,\text{sen.}\, d^{\text{v}}}$$ y en

consecuencia: $\text{log. sen. } y + \text{log. sen. } y' + \text{log. sen. } y'' +$

$+ \text{log. sen. } y''' + \text{log. sen. } y^{\text{iv}} + \text{log. sen. } y^{\text{v}} =$

$= \text{log. sen. } d + \text{log. sen. } d' + \text{log. sen. } d'' + \text{log. sen. } d''' +$

$+ \text{log. sen. } d^{\text{iv}} + \text{log. sen. } d^{\text{v}}$, con lo cual queda la proposicion demostrada.

Valiéndonos de ello, despues de tener los ángulos corregidos en el centro y en los vértices, se comprueba si existe la igualdad de sumas antes indicada, en cuyo caso el polígono cerraria y los ángulos serian ya los corregidos. Pero no existiendo dicha igualdad, hay que disminuir segundo á segundo los mayores, y aumentar del mismo modo los menores, hasta que por tanteos se llegue á la equivalencia entre las dos sumas logarítmicas, advirtiendo que lo que se tiene que añadir ó quitar unido á lo que en las correcciones del centro y los vértices se ha añadido ó quitado no iguale ni sobrepuje á la apreciacion del aparato que se emplee.

Obtenidos de este modo los ángulos verdaderos, y medida con perfeccion una base, se calculan los triángulos por las fórmulas correspondientes al caso de darse un lado y los dos ángulos adyacentes.

$180^\circ-(A+B)=C$; $c=\dfrac{a\,\text{sen. C}}{\text{sen. A}}$; $\log. c=\log. a+\log. \text{sen. C}-$
$-\log. \text{sen. A}$; $\log. b=\log. a+\log. \text{sen. B}-\log. \text{sen. A}$, donde vemos la facilidad que en la resolucion existe, pues en las igualdades que nos dan los valores de los lados, figuran las cantidades $\log. a$ y $\log. \text{sen. A}$, que buscadas una vez, sirven para las dos expresiones, las cuales difieren solo en el otro sumando.

El cálculo que con los ángulos no corregidos se hizo, se llama *cálculo provisional,* y el que se acaba de hacer *cálculo definitivo.*

Para auxiliar uno y otro, y evitar la confusion, introduciendo el órden en las operaciones, se hace uso de registros que pueden ser de la forma indicada en la página 179. En él se consignan los resultados del procedimiento que acabamos de indicar, teniendo mucho cuidado de mencionar perfectamente la posicion de los vértices, para lo cual algunas veces se consignan tambien en el registro las distancias que median desde cada uno de ellos á dos ó tres puntos notables de las inmediaciones. Algunas veces se emplean en vez de letras para indicar los vértices de la triángulacion principal, números romanos.

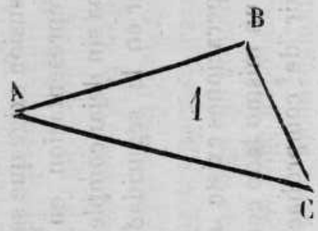
Otras, en vez de poner las columnas para que contengan los lados y ángulos medidos, se las hace contener los logaritmos de los lados y los de los senos de los ángulos, haciéndoles de este modo mas apropiados al cálculo.

En el espacio blanco que queda en el registro debajo de los datos de cada triángulo, se construye el triángulo mismo, lo que ayuda mucho á la formacion del polígono total.

Todo lo que hasta aquí hemos dicho respecto á cálculo provisional y definitivo, se refiere solamente á los triángulos de primer órden, pues no teniendo el cánevas topográfico vértice de sus ángulos central, no puede aplicarse dicho procedimiento.

No hay mas en este caso, que medir directamente los tres ángulos de cada triángulo, y hecho esto ver si su suma iguala á 180°. Si así no sucede, la diferencia que exista se divide por tres, y si el cociente es menor que la apreciacion del instrumento, se añade á cada uno de los ángulos dicho cociente, si el error es por defecto, ó se les quita si es por esceso.

Triángulos.	Vértices.	Angulos medidos directamente.	Primeras correcciones	Angulos de primera correccion.	Suma de todos los ángulos del centro =	Angulos corregidos.	Lados sin corregir.	Lados corregidos.	Observaciones.
		0 ' "	E C.E C.S	0 ' "		0 ' "			
1	A.... Torre.	... .	....	....		....	....	....	::
	B. Palomar.	....	....	....		....	....	....	
	C..... Peña.	....	... .	$180^{\circ} - (A+B)$		....	....	....	
2									



Hay que tener tambien en este caso mucho cuidado con fijar la posicion de los vértices, para cuyo efecto se procura que lo sean de dos ó más triángulos, y esta condicion es tanto mas necesaria, cuando el vértice sea inaccesible.

Un croquis del terreno ayuda mucho para la operacion provisional y para la definitiva.

Como generalmente, y segun indicaremos despues, un levantamiento de alguna extension exige que se subdividan las operaciones y la representacion en varias partes, no se debe pasar á la una sin dejar completamente concluida la anterior y estar en la seguridad de su exacto resultado.

En el trascurso de las operaciones existe algunas veces facilidad en encontrar un mismo lado con datos diferentes, lo cual puede servir de comprobacion, así como la medicion directa de algunos lados, ya encontrados por el cálculo.

Los ángulos y longitudes medidas sobre el terreno se suelen indicar con líneas negras sobre el papel de la primera representacion, miéntras se marcan con azul las distancias y ángulos corregidos.

Métodos empleados para trasladar los puntos al papel.—Varios son los que emplearse pudieran, pero sujetándolos á las condiciones de precision necesaria vienen á reducirse á tres que son los de *intersecciones,* por la *tabla de cuerdas* y *por el método de coordenadas.*

Método de intersecciones.—Consiste en fijar con exactitud en el papel un lado, y apoyándose en sus extremos y con radios iguales á la distancia que los separa del tercer vértice, trazar arcos de círculo que por su interseccion nos darán en el papel la posicion de él. Este método, por lo demás muy sencillo, adolece de varios inconvenientes, siendo los principales, 1.° Falta de seguridad en el verdadero punto de cruce de los arcos, cuanto los ángulos sean muy agudos ó muy obtusos. 2.° Que como cada triángulo tiene que apoyarse en un lado del precedentemente encontrado, los errores de este pasan á aquel, aumentados con los propios, y esta acumulacion de errores los puede producir de consideracion en la operacion total, y 3.° Que dividiéndose el plano en varias partes para su trazado en el papel, puede suceder que una hoja no contenga el triángulo entero, en cuyo caso se hace imposible el método.

Todos estos inconvenientes han obligado á desecharlo tambien en la triangulacion principal.

Imperfecto tambien, pero mas exacto es el sistema de la tabla de cuerdas, que vamos á mencionar.

Por la tabla de cuerdas.—Fijémonos en la figura 13 (lámina 6.ª) en la cual se verifica que

$AB = k = 2R \text{ sen. } \frac{1}{2} \alpha$. Por esta fórmula, se han encontrado los valores de k, correspondientes á los de α de minuto en minuto, de 0 á 90°, considerando trazados los arcos con un rádio supuesto dividido en 10000 partes, y obteniéndose los valores de k referidos tambien como unidad á la parte de radio. Se han formado de este modo tablas, de las cuales la mas sencilla es la de Francœur, cuya formacion y uso vamos á explicar, siendo las demás, modificaciones que en general solo á la forma afectan.

CUERDAS DE 0 Á 10 GRADOS.

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	M
0′	0	175	349	524	698	872	1047	1221	1395	1569	0
1	3	77	52	26	701	75	50	24	98	72	1
2	6	80	55	29	04	78	53	27	1401	75	2
3	9	83	58	32	07	81	55	30	04	78	3
4	12	86	61	35	10	84	58	33	07	81	4
5	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	5
6	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	6
7	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	7
8	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	8
9	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	9
10	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	10
11											11
.											.
.											.
60											60

Cada una de las hojas, está dividida en varias columnas, teniendo las de la derecha é izquierda una M, inicial de *minutos*, y las centrales los grados á partir de 0 en la primera hoja y terminando en 90° la última.

En el sitio correspondiente á la interseccion de la casilla vertical de los grados, con cada una de las líneas horizontales pertenecientes á los diferentes minutos están consignadas las cuerdas correspondientes á los ángulos marcados por las indicaciones de dichas columna y línea. Facilita el uso de estas tablas el no aparecer escritas las cifras comunes que tenga cada cuerda con la que sobre ella está indicada. Generalmente se escriben las dos últimas cifras de la derecha, y se suprimen las demás siempre que sean iguales. De diez en diez minutos, una línea horizontal separa unas partes de la hoja de la siguiente, con el objeto tambien de facilitar el uso.

Cuatro son las cuestiones que en el manejo de estas tablas pueden ocurrir.

1.ª *Encontrar la cuerda de un ángulo correspondiente á un número exacto de minutos.*—Siendo este arco $n^\circ\, m'$, no hay mas que buscar en la hoja correspondiente el número n° y bajar por la columna vertical que le corresponda, hasta la línea horizontal perteneciente á m', en cuyo caso el número que pertenezca á dichas columna y fila, será la cuerda pedida.

2.ª *Encontrar la cuerda de un ángulo de $m^\circ\, n'\, p''$.*—Como en la tabla no están consignadas las cuerdas mas que para los ángulos de un número exacto de minutos, tenemos ahora que emplear un cálculo, análogo al efectuado en las tablas logarítmicas, admitiéndose en la práctica, que *las diferencias de las cuerdas son proporcionales á las de los arcos correspondientes.* Vamos á las tablas, y por la columa de los m°, y línea de los n' hallamos un valor q para la cuerda $m^\circ\, n'$.

En la misma columna y línea siguiente determinamos el valor de la cuerda del ángulo $m^\circ (n+1)'$ y suponien-

do que fuese q' podriamos establecer $\frac{60''}{q'-q}=\frac{p''}{x}$;
siendo $60''$ la diferencia entre los dos arcos y $q'-q$ la que existe entre sus cuerdas. Deduciendo el valor de x y añadiéndolo á la cuerda q, se tendrá el buscado.

3.ª *Dada una cuerda encontrar su arco, siempre que dicha cuerda esté contenida en las tablas.*—Se busca en las diferentes hojas, y en la línea correspondiente á 0° el valor mas aproximado por defecto al dato de la cuestion, y bajando por la columna vertical en que dicho número se encuentre, hasta hallar el dado, las indicaciones de sus casillas horizontal y vertical nos dará á conocer los grados y minutos del ángulo.

4.ª *Determinar el ángulo de una cuerda dada, cuando el valor de esta no se halle en las tablas.*—Se empieza la operacion del mismo modo que en el caso anterior, pero en vez de encontrar en las tablas el número dado, se encuentran dos entre los cuales está comprendido. Sean estos los q y q' correspondientes á $m^\circ n'$ y $m^\circ(n+1)'$ pudiendo establecer $\frac{60''}{q'-q}=\frac{x}{r-q}$, representando por r el valor dado; y despejando x, este será el número de segundos que hay que añadir á $m^\circ n'$ para obtener el ángulo verdadero.

Resta ahora la cuestion gráfica de *dado un ángulo en valor gradual formarle en el plano por medio de su cuerda; y dado un ángulo formado en el papel, encontrar su valor gradual.*

La primera cuestion, que es la que ocurre al trasladar al papel los ángulos del registro, se resuelve, tomando desde el punto A fig. 14, (lám. 6.ª) que tiene que ser vértice de dicho ángulo y sobre el lado AB en que este tiene que apoyar, una longitud AC de 10000 partes reducida á escala, trazando el arco CM, y desde C con un radio igual á la cuerda que por las tablas encontremos, se describe otro arco de círculo que corte al primero; unido este punto de interseccion M con el vértice, se tendrá trazado el ángulo dado.

Para encontrar el valor gradual del MAB despues de trazado, no hay mas que con un radio AC=10000 partes, reducido á escala, trazar un arco MC que abrace su abertura, y midiendo con un compás la longitud MC, y encontrando su valor por aplicacion á dicha escala, hallaremos por las tablas el valor gradual del ángulo dado.

Para los mayores de 90°, se podian haber prolongado las tablas hasta 180, pero esta prolongacion es innecesaria.

En efecto, supongamos que se quiere trazar un ángulo de 100 grados. Busquemos el valor de la cuerda correspondiente á su suplemento 80°. Haciendo centro en el vértice A fig. 15, (lám. 6.ª) y con un radio AC igual á 10000 partes, reducidas á escala, tracemos una semicircunferencia que apoye por su dos extremos en la línea AB y su prolongacion, y haciendo centro en C′ con un radio igual á la cuerda de 80° describamos un arco que corte al M, y la union de este punto con A, nos dará el ángulo MAC de 100° trazado. Lo mismo se efectua para todos los comprendidos entre 90 y 180°.

Para la cuestion inversa, supongamos en la misma figura, que se tiene trazado el ángulo MAC y se trata de saber su valor gradual, para lo que no hay mas que prolongar la AC, y haciendo centro en A con el radio de 10000 partes, trazar el arco MC′. Se encuentra el valor de la recta C′ M, y por medio de las tablas su correspondiente arco, que en este caso será 80°, y su suplemento 100° es el pedido.

Excusado es decir que si la magnitud del papel no es la suficiente para contener el radio de 10000 partes de las menores que la escala contenga, se pueden tomar como radio 1000, 100, 10 de estas partes, con la precaucion de dividir tambien por 10, 100 ó 1000 las magnitudes dadas por la escala; fundando este procedimiento en la proporcionalidad que existe entre las cuerdas de arcos concéntricos abrazados por un mismo ángulo, y los radios con que dichos arcos están trazados.

El método de trasportar los ángulos al papel por medio de sus cuerdas que acabamos de indicar, á pesar de ser muy preferible al sistema de intersecciones, presenta aun el inconveniente de dejar que los errores se acumulen, pues cada ángulo debe apoyar en un lado de otro primitivamente formado.

Método de coordenadas.—Reune todas las ventajas posibles de exactitud en el dibujo de los planos, el *método de coordenadas*, que consiste en hallar en el terreno las de todos los puntos notables, referidos á un sistema rectangular, y reducidas á escala, trasladarlas á otro sistema tambien rectangular, establecido en el papel.

Este método, por los ejes que constituyen su sistema, se suele llamar tambien de dibujo de los puntos por *sus distancias á la meridiana* y *á la perpendicular*, y se emplea, no solo para los de la triangulacion principal, sino tambien para algunos vértices de la secundaria, bien sea porque la importancia de ellos haga necesaria su exacta determinacion, ó porque se quiera formar un plano que resulte idóneo para dividir ó rotular los terrenos representados.

Los ejes rectangulares que en el terreno se eligen son *la meridiana terrestre*, y su *perpendicular* que pase por un vértice principal.

Vamos á ocuparnos de encontrar las coordenadas de los diferentes puntos trigonométricos de una triangulacion, fig. 16 (lám. 6.ª). Supongamos que la línea OM es la direccion de la meridiana (cuya determinacion á su tiempo se explicará), y que se ha marcado una perpendicular á ella por el punto A, (*) que es uno de los trigonométricos. Supongamos conocido el *azimut* z del lado AB, es decir, *el ángulo que este lado*, que puede ser la base, *forma con la línea meridiana,* y téngase presente que están ya consignadas en el registro las magnitudes corregidas de los ángulos y lados, correspondientes al

(*) Puede tomarse por centro del sistema cualquiera de los vértices del polígono, ó el punto O central.

polígono ABCD... Hagamos el convenio de considerar positivas las ordenadas hácia el Norte y las abcisas hácia el Este.

Las correspondientes al punto B se encontrarán por las expresiones

$$p = \text{AP}' = \frac{\text{AB sen. } z}{10^{10}};\ m = \text{BP}' = \frac{\text{AB cos. } z}{10^{10}},\ \text{ó}$$

$$\log. p = \log. \text{AB} + \log. \text{sen. } z - 10;$$
$$\log. m = \log. \text{AB} + \log. \cos. z - 10$$

de segundos miembros conocidos, considerando 10^{10} el rádio del círculo en que están medidas las líneas trigonométricas, que es el mismo de las tablas logarítmicas.

Las coordenadas del punto C son:

$$\text{CQ} = m' = m + \text{CC}' = m + \text{BC cos. } z';$$
$$\text{AQ} = p' = p + \text{BC}' = p + \text{BC sen. } z';$$

pero el ángulo z' que forma el lado BC con la meridiana no es conocido, y aunque podriamos determinarlo directamente, además de ser operacion larga, seria expuesta á equivocaciones, por lo cual se tiene que recurrir á otro método.

Establezcamos la igualdad

$$\omega + \text{C}'\text{BP}' + \text{ABP}' + \text{ABO} + \text{OBC} = 360^\circ$$

en la cual C'BP' es igual á 90°, ABP' es igual á z, y ABO y OBC son ángulos ya obtenidos del polígono principal, de modo que podemos determinar ω, único desconocido, y por la relacion $z' = 90^\circ - \omega$, podemos tambien conocer z'.

Del mismo modo se efectúa la determinacion de coordenadas de los demás vértices, teniendo cuidado de deducir todos los azimut z'', z''', etc. de los precedentemente encontrados.

Los valores de dichas coordenadas se consignarán en un registro de la forma siguiente, para cuando se tenga que efectuar la traslacion al papel.

Encontradas las coordenadas de dos puntos, se puede calcular la distancia que los separa por medio de la fórmula $\delta^2 = (p - p')^2 + (m - m')^2$, y si esta distancia se puede medir directamente, se tiene un medio de comprobacion.

Designacion de los vértices.	DISTANCIAS á la meridiana.	DISTANCIAS á la perpendicular.	Observaciones.
A..........	$p = o$......	... $m = o$ ...	
B..........	$p = +$......	... $m = +$ ..	
C..........	$p = +$......	... $m = +$ ..	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
E..........	$p = -$......	... $m = +$ ..	

LECCION 11.

DIBUJO DE LOS PUNTOS EN EL PAPEL, Y ORIENTACION DE LOS PLANOS.

El método de dibujo de los puntos en el plano por las coordenadas, explicado en la anterior leccion, reuniendo las grandes ventajas de no acumular los errores que se puedan cometer, y de dar los puntos perfectamente determinados por la interseccion de dos líneas perpendiculares, es el generalmente adoptado para la colocacion en el papel de los puntos trigonométricos. Todas las operaciones, supuesto yá lleno el registro de coordenadas, están reducidas á tomar en el papel sobre un eje una de las dimensiones en la escala del plano, trazar por el punto extremo una perpendicular, y tomar sobre ella la otra dimension reducida tambien á la escala.

Este procedimiento, en sí muy sencillo, puede hacerse pesado, y tal vez no muy exacto, si el levantamiento es de bastante consideracion, es decir, si tiene gran extension el terreno representado.

Auxilia y facilita el trabajo, dándole evidente conveniencia la formacion en el papel destinado á contener el plano de un sistema de cuadrados iguales, apoyados los unos en los otros. Llámase á esta serie de cuadrados, *cuadrícula,* y vamos á explicar su formacion.

Sobre un tablero bien alisado se sujeta dicho papel por puntas de acero, dándole así invariabilidad de posicion con respecto á aquel. Sea AB el tablero figura 17, (lámina 6.ª) y representemos por C D el papel. Tomemos el punto medio M, M', de los bordes ED, CF y unámoslos por medio de una línea recta. Esta puede trazarse con una regla de acero perfectamente rectificada, y caso que su longitud no fuese suficiente para abarcar de una vez la MM', se sujetan en M y M' dos agujas, y con una seda fina y bien tirante, se marca la línea MM', en la que se fijan algunos puntos intermedios por medio de picadas hechas con otra aguja, con el objeto de poder trazar la M M' en varias partes. A la recta que acabamos de trazar se la eleva una perpendicular en un punto que próximamente es el medio, pero con el objeto que esta perpendicular tenga su direccion bien comprobada, se marca por la interseccion de cuatro pares de arcos. Se obtiene de este modo la NN'. Desde O, punto de encuentro de las dos rectas trazadas y con un rádio igual á la mitad de la mayor extension que el plano contenga, si dicha mitad es un número exacto de veces la magnitud que los lados de los cuadrados deben tener, ó con el número de veces inmediato superior si así no sucediese, se trazan arcos de círculo que cortan á MM' y NN' en puntos tales como a, a' a'' a'''. Desde estos puntos y con el mismo rádio se trazan arcos de círculo que se cortarán dos á dos en los p, p', p'', p''', siendo estos los vértices de un cuadrado en que el levantamiento está contenido. Si no existiese compás de bastante abertura para marcar los arcos que hemos mencionado, no hay mas medio que ir dividiendo los cuatro bordes del papel en partes iguales á los lados de los cuadrados, y unirlos por líneas rectas, cuyo método es de gran imperfeccion. En el caso de que se haya podido formar el cuadrado de que antes hablamos, se dividen sus lados en partes iguales á los de los cuadrados pequeños, y se unen los puntos de division con los correspondientes del lado opuesto por medio de líneas rectas. Para convencernos de que la cuadrícula está bien hecha no hay mas que trazar las diagonales del cuadrado total, las cuales tienen que pasar por todos los vértices de los parciales que en su camino encuentren. Formada ya y comprobada la cuadrícula, resta hacer notar sus ventajas como auxiliar del método de coordenadas.

Estando el papel cuadriculado, se conoce el límite que tienen que tener los valores de las abcisas y ordenadas, para que estén comprendidos los puntos en uno ú otro cuadrado. En efecto, supongamos que los lados de ellos sean de $0^m,1$, tomado para escala del plano la $\frac{1}{1000}$, y por vértice del sistema coordenado del papel, el punto p' extremo del levantamiento dibujado.

Cada longitud de $0^m,1$ en el papel, nos representará en el terreno 100^m, por lo cual si se nos da por ejemplo para un punto las coordenadas $309 = m$ y $477 = p$ ya sabremos que este punto está comprendido en el cuadrado que corresponde al quinto lugar en las columnas verticales, y el cuarto en las líneas horizontales, quedando reducida la operacion á tomar desde el vértice r de dicho cuadrado y en direccion de r á q una distancia igual á 77, y en direccion de rn otra igual á 9, y las perpendiculares á los ejes por los puntos extremos nos darán por su interseccion la posicion del buscado. (*)

Como esta operacion se ha hecho sin ligazon ninguna con las otras partes de la cuadrícula, no habria inconveniente en dividir la hoja del papel total en varias partes, cada una de las cuales contuviese un cierto número de cuadrados, con tal que estos estén numerados para adosarlos los unos á los otros del modo verdadero en tiempo oportuno. Para efectuar esta numeracion, basta colocar en los vértices de cada uno sus coordenadas, que tambien tenemos necesidad de conocer, y en el momento de la union haciendo que se adapten los que tengan las mismas, queda conseguido el objeto que se desea.

De esta manera se puede efectuar el dibujo de varias hojas parciales al mismo tiempo, lo mismo que la colocacion en ellas de los detalles, en la seguridad de que en caso de cometerse algun error, este quedará localizado en su cuadrado, y que la union de dichas hojas, al tratar de formar la *carta del conjunto*, nos dará á

(*) Nótese que esta operacion está reducida á marcar las coordenadas en otro sistema, en que el valor de las del orígen con respecto al antiguo son $\overline{p} = 400$, $\overline{m} = 300$.

conocer las inexactitudes que se hayan podido cometer en cualquiera de ellas.

Otra ventaja tiene la cuadrícula que aprovecha mas principalmente á los que se ocupan de la rotulacion de terrenos, ó de la medicion de las partes de ellos destinadas á objetos diversos, ya sea para valorar la riqueza pública ó para otros efectos. Comprendiendo cada cuadrado una cierta superficie, se concibe que la sola inspeccion del dibujo dará á conocer la extension que tiene cada clase de terreno, ó el empleado para cada especie de cultivo.

Evitada de este modo la medicion directa de las diversas porciones, y establecidos en el dibujo topográfico los signos convencionales que nos tienen que indicar los detalles, se puede acortar mucho, y aun suprimir la memoria descriptiva que en otro caso seria pesada y larga.

Orientacion de los planos.—No basta conocer mas ó menos perfectamente los diversos accidentes de un terreno, sino que es necesario tener el mismo conocimiento de la posicion relativa de él en la superficie terrestre, para que nos podamos formar idea de todas sus condiciones.

Bastará para conocer dicha posicion relativa, que se marque en los planos una línea de direccion constante y perfectamente determinada, y que se encuentre en cada caso el ángulo que en el terreno forma dicha línea con la base ú otro lado principal.

Como todo el levantamiento lo podemos considerar apoyado en esta línea, estaremos en la posibilidad de deducir en consecuencia los ángulos que con ella forman los otros lados de la triangulacion. En el papel se hace tambien un convenio para colocar siempre en la misma direccion, la línea orientadora del terreno.

Conocida en el curso de física la propiedad de la aguja imantada de tender á dirigir sus puntas á los polos magnéticos de la tierra, y enterados tambien de lo que por *declinacion* se entiende, no cabe duda alguna que la direccion de dicha aguja podia servir para línea fija, si la declinacion fuese constante, y en este caso tampoco habria dificultad en trazar otra direccion fija, cual es la N—S verdadera de la tierra, formando sobre la aguja un ángulo igual al de declinacion.

Pero esta es variable, no solo en grandes intérvalos de tiempo, sino en las diversas horas de un mismo dia, pudiendo además influir en la direccion de la aguja sustancias ferruginosas que á su inmediacion existan etc., por lo cual se ha desistido del empleo de este medio para la verdadera y uniforme colocacion de los terrenos en el papel.

La línea *meridiana terrestre*, de direccion constante en la superficie, y de fácil determinacion, es la que siempre se emplea. Su ángulo con la base, ó lado principal en que la triangulacion se apoya, se llama *azimut* como ya hemos dicho, y á la determinacion de este, despues de marcada la direccion de la meridiana, es á lo que se reduce la *orientacion* del plano.

En el papel se coloca casi siempre la meridiana en sentido vertical con el Norte hácia arriba, y desde él hácia la derecha se suponen sucesivamente el Este, Sur y Oeste.

Entre los varios medios que para la determinacion de la meridiana existen, indicaremos solamente dos, que son los en general adoptados.

1.º **Determinacion de la meridiana por el «gnomon.»**—Se llama así á un sencillo aparato destinado al trazado de dicha línea, que consiste en un apoyo circular AB de metal fig. 18 (lám. 6.ª) con una canal tambien circular A′B′, destinado á recibir los apoyos en que se sustente la parte superior del instrumento. La placa lleva unas puntas *r*, *r*, destinadas á fijarla al papel, y en *m* lleva tambien un fleje de hierro sujeto por un extremo y hendido por el otro, en cuya hendidura entra una garganta que tiene la parte inferior de la varilla CD del aparato. Esta varilla está sostenida perpendicularmente á la pequeña plataforma formada por la union de tres piés, atravesados por tornillos t, t', t''. En la CD, entra una abrazadera E con su tornillo de presion que puede girar y deslizarse sobre dicha varilla, y perpendicularmente á esta y en la parte superior de la abrazadera, existe una placa de hoja de lata ennegrecida F, que próximo á su borde, tiene un orificio G de pequeño diámetro.

Conocido ya el aparato, vamos por medio de él á encontrar la meridiana, para lo cual no es necesario sino un dia despejado, y operar en terreno descubierto.

Sobre cuatro piquetes sólidamente clavados en el suelo, ó mejor sobre cuatro pilares de mampostería, figura 19 (lámina 6.ª) perfectamente iguales, se coloca un tablero de bastante espesor, para que no lo encorve el calor por el sol producido, con cuatro tornillos ó grandes puntas en cada uno de sus vértices que le hacen formar cuerpo con sus apoyos á los que se fija invariablemente. Sobre este tablero se coloca sujeto por puntas metálicas el papel que tiene que contener la direccion de la meridiana, y sobre él el gnomon.

Por medio de un nivel, se consigue la horizontalidad perfecta del tablero, y despues se obtiene por movimientos de los tornillos del pié del gnomon, y colocacion de dicho nivel sobre la placa F, la horizontalidad de esta. Tambien puede marcarse esta horizontalidad, teniendo en la parte central y base inferior de la varilla CD un gancho, de donde se colgará una plomada, que por la coincidencia de su direccion con el centro de la pieza AB, nos indicaria la posicion deseada.

Teniendo el aparato así dispuesto, se hace pasar por el pequeño agujero G de la placa, el cordon M de una plomada, marcando en el papel con un punto hecho con un lapiz muy fino el verdadero O de la direccion del expresado hilo. Se quita la plomada, y haciendo centro en el punto marcado y con radios cualesquiera, se describen varios arcos de círculo MN, M'N', M''N'', debiendo estar terminadas todas las operaciones que hemos indicado antes de las nueve de la mañana. A partir de esta hora, se observa sobre el papel la posicion del pequeño disco luminoso formado por los rayos solares que pasan por el orificio de la placa del gnomon, marcando con un punto de lápiz el centro de dicho disco cada vez que coincida con uno de los arcos señalados. Continuando sin interrupcion las observaciones hasta las tres de la tarde, nos quedarán puntos a, b, c, c', b', a' que por su union darán lugar á una curva, interseccion del cono descrito por los rayos solares con el plano de la plancheta.

La observacion de esta curva hace conocer que antes de mediodia el disco luminoso se aproxima al centro, separándose de él pasadas las doce, y que á intérvalos de tiempo iguales antes y despues de mediodia los discos luminosos están igualmente separados de dicho centro. Corresponden, pues, á estos intérvalos iguales los puntos a y a', b y b', c y c'.

Esta observacion no es mas que una consecuencia de la marcha aparente del sol, que está igualmente elevado sobre el horizonte á tiempos iguales antes y despues de las doce.

Si encontramos y trazamos la bisectriz de cualquiera de los ángulos formados por los radios de igual longitud, correspondientes á los puntos marcados, se tendrá la traza del plano vertical en el cual el sol se encontraba al llegar á su mayor altura aparente, es decir, á las doce del dia. Este plano es el meridiano, y su traza pq la meridiana que buscabamos.

Fácil es efectuar la materialidad del trazado, pues si de los puntos a y a' con radios iguales á aG describimos dos arcos que se corten; si desde b y b' con radios bG, hacemos la misma construccion, y lo mismo desde los c y c' etc. todos los puntos de interseccion que hayamos determinado pertenecerán á dicha recta. Para prolongarla en el terreno, se ponen en los dos extremos de la línea marcada en el papel agujas muy finas y bien verticales, que sirven de pínulas, y por ellas se establece en el terreno una alineacion.

Marcada ya la direccion de la meridiana en el terreno, ninguna dificultad presenta determinar por medio de un goniómetro y directamente el ángulo que dicha direcion forma con un lado principal que pase por el punto de estacion, con lo cual se tiene el azimut de este lado, y el plano queda orientado.

Se puede encontrar tambien el azimut, trazando sobre el papel en donde la meridiana se ha marcado y con una alidada, la direccion del lado principal, cortando las dos rectas dibujadas por otra cualquiera, y del triángulo gráfico que así resulte se encuentra por el cálculo el valor deseado.

El método que para determinar la meridiana acabamos de expresar, sufre algunas veces una ligera modificacion en sus procedimientos. Consiste esta en sustituir á las posiciones del pequeño disco luminoso que se marcaban, las que tambien se marcan del centro de la elipse de sombra, producida por la detencion de los rayos solares en una esferita de metal que se coloca pendiente de un hilo fijo por su parte superior en el taladro G del gnomon.

Esta operacion cuyo fundamento es el mismo de la anteriormente explicada, tiene sobre esta la ventaja de no exigir posicion horizontal en la placa F, y que se puede efectuar con solo tener una varilla que al azar se encuentre, un clavo para sujetarla al tablero, un hilo y una pequeña piedra.

En todo lo que acabamos de explicar, referente á la determinacion de la meridiana, hacemos abstraccion del movimiento diurno aparente del sol, recorriendo la *eclíptica* y si se quieren disminuir los errores que de esto pueden resultar, se deben hacer las observaciones en Junio y en Diciembre, época de los *solsticios* (*) en que este movimiento nos parece menos pronunciado.

2.° **Determinacion de la meridiana, por la posicion de las estrellas.**—Este método, mas perfecto que el anteriormente dicho, está fundado en que la *estrella polar* que es la del extremo de la *osa menor* está solo separada del polo por un arco de 1.° 36'. y que este radio tiene la órbita que alrededor del *polo* describe dicha estrella.

El procedimiento mas sencillo para deducir la direccion de la meridiana, es colocar una plomada fija en el punto de estacion, y lo suficientemente próxima para que su hilo se distinga; se vá moviendo otra plomada, hasta que entre en el plano determinado por la primera y la estrella polar, y colocando en cada punto correspondiente al extremo del hilo de cada plomada un jalon,

(*) Aunque aquellos para quien mas especialmente se han escrito estas lecciones deben estar versados en las nociones de geografía astronómica, indicaremos algo á ella correspondiente, en las de Geodesia que mas adelante explicámos.

determinarán los dos una recta en direccion de la línea buscada.

Esta determinacion no es exacta porque la *polar* no está confundida con el polo, sino colocada á cierta distancia de él, por lo cual tenemos que esperar como momento oportuno para hacer la observacion, aquel en que dicha estrella entre en el meridiano del lugar, que es próximamente cuando lo efectuan tambien la γ de la *casiopea* fig. 20 (lám. 6.ª) y la Σ de la *osa mayor*. De modo que poniendo como antes una plomada en el punto de estacion, y haciendo variar de posicion otra, de modo que la polar esté siempre contenida en el plano de las dos, si se espera el momento en que el hilo de dicha plomada cubra tambien las γ y Σ y en este momento se marca con piquetes la posicion de los dos extremos de los hilos; estos piquetes dirigirán la alineacion.

Tampoco es exacto este método, pues la polar entra exactamente en el meridiano 13′ despues de verificarlo las γ y Σ, y aun estas no entran al mismo tiempo, pues existe una diferencia de 2″, de modo que el sistema que se sigue es considerar solo la entrada en el hilo de las plomadas de la polar, y de una de las Σ ó γ, y contando 13′ despues de esta coincidencia, se tiene el momento oportuno para hacer la determinacion exacta por medio de las dos plomadas y la polar sola, como se indicó en el método antes explicado.

La determinacion del azimut se efectua del mismo modo que se indicó al encontrar la meridiana por las alturas del sol.

LEVANTAMIENTO DE LOS DETALLES.

LECCION 12.

NATURALEZA DE LOS INSTRUMENTOS EMPLEADOS EN EL LEVANTAMIENTO DEL CÁNEVAS TOPOGRÁFICO, Y MEDIOS DE EFECTUARLO.

Conocidas ya por completo en el terreno y en el papel las posiciones de los puntos vértices del cánevas trigonométrico, tócanos ahora ocuparnos de la representacion de las sinuosidades y accidentes del terreno, para lo cual tenemos que determinar la posicion de gran número de puntos notables contenidos en él. Si para esta determinacion empleásemos tan minuciosos y exactos métodos, como en la triangulacion principal, las operaciones serian interminables, por lo que se usan medios de menos precision pero de mas rapidez en su práctica.

Si no existiesen puntos de comprobacion exactamente determinados sobre el terreno, y establecidos con la

::

misma exactitud sobre el papel, seria de dificultad suma que la aglomeracion de errores, debidos á operaciones defectuosas, no deformaran la representacion. ¡Pero aquí se hacen notar las ventajas de la triangulacion fundamental. Los puntos vértices de ella, son los que comprueban la posicion de los secundarios que á su alrededor se agrupan; y siendo generalmente independientes las determinaciones de posicion de estos, los errores no se pueden acumular, reconociendo los que en cada operacion se cometan por las ligazones que se establecen ó suponen establecidas con aquellos.

Partiendo del punto de vista mas general, de los de primer órden se hacen salir las líneas poligonales que por su reunion forman el cánevas topográfico, y que contienen en la direccion de sus lados ó en sus vértices, los puntos secundarios de cuya posicion queremos formar idea.

En los casos en que la salida y terminacion de la línea poligonal no esté en los vértices, estará por precision en puntos relacionados con ellos de un modo exacto.

Los instrumentos para estas operaciones empleados no deben ser de precision. En efecto, los destinados á exactas observaciones, necesitan mucho tiempo para la medicion y bastante práctica en el que la ejecuta, mientras los menos precisos son de mas sencilla construccion, de mayor facilidad en su trasporte y uso, y gran rapidez en la obtencion de los resultados.

Debe tenerse mucho cuidado en emplear cada aparato para la operacion á que su forma y la apreciacion le destine, pues si quisiéramos valernos de un teodolito para las operaciones del cánevas topográfico, que se tienen que efectuar con rapidez, no podriamos rectificarlo, obteniendo así los resultados aun mas imperfectos que con un instrumento cualquiera de detalle.

Regnault dice ocupándose del asunto «*que se cometería un error grosero en Topografía si se quisiesen emplear indiferentemente y para toda especie de operaciones, instrumentos que tienen cada uno su objeto particular.*»

La marcha que se tiene que seguir para la formacion del cánevas topográfico, no está sujeta á reglas, y se puede efectuar por muchos procedimientos que solo la naturaleza del terreno, y la inteligencia y práctica del topógrafo, pueden determinar. Solo se debe tener en cuenta la rapidez con que hay que operar, huyendo de los tanteos, y refiriendo y comprobando cuando sea necesario los puntos que se obtengan, por medio de la posicion de los principales ya determinados.

Al empezar la operacion de llenar con los accidentes representacion de los del terreno, el papel del plano, expresamos la conveniencia de dividir la carta del conjunto en hojas parciales, cuyo sistema además de las ventajas de comodidad, nos proporciona la del simultáneo de las operaciones, y como consecuencia, mayor rapidez en la marcha del trabajo. Ahora bien, por perfectamente numerados que estén los extremos de las hojas, lo cual produce su conveniente union, necesitamos además en cada una de ellas puntos de referencia exacta, que son los trigonométricos, viendo por esta condicion que debe existir por lo menos uno de estos en cada hoja parcial. Pero siendo único el punto de comprobacion en ella, podiamos dar al levantamiento representado un movimiento de giro alrededor de él, con lo cual la posicion relativa de todos los secundarios con el principal no variaría produciéndose en cambio errores que podian ser considerables en el conjunto.

Hace falta pues, para que la orientacion sea perfecta, que existan por lo menos dos puntos en cada hoja. De esta manera el giro es imposible, y tenemos una línea de segura referencia. Tambien estamos en este caso si se tiene un punto y marcadas las direcciones á otros dos, ó á uno de ellos siempre que se conozca además el ángulo que una de las líneas del terreno forme con estas direcciones.

Supuesta ya cada hoja con estas condiciones, vamos á hablar de una de las marchas que se pueden seguir en la operacion del trazado del cánevas topográfico, que se hace separadamente en las distintas en que la carta total se ha dividido.

Partiendo de un punto trigonométrico del terreno correspondiente á la hoja, se envuelve la parte central del levantamiento por un primer polígono cerrado. Partiendo tambien del punto ó puntos trigonométricos conocidos, se marcan otros polígonos que envuelven la parte exterior al primero y cierran sobre los lados de este, ó los de otro ya marcado. Se subdividen en seguida en polígonos menores por medio de trasversales rectas ó poligonales que les cruzan en todos sentidos.

Tanto los contornos de los polígonos como las trasversales deben abrazar los puntos notables del terreno, comprobando la posicion de cada una de dichas líneas por su cruzamiento con otras, y multiplicando su número, en la inteligencia de que cuanto mayor sea este, y quede en consecuencia dividido en mas partes el terreno que se tiene que representar, mas fáciles serán las operaciones que deban ejecutarse, y el plano resultará mas detallado y mas exacto.

Es de absoluta necesidad que el método que se adopte para marcar estas líneas en el terreno, y trasladarlas despues al papel sea muy ordenado, y aunque ya dijimos que no se sujetaba á reglas, se pueden indicar algunos principios generales.

Sobre el terreno se forma un croquis de él, y en este croquis se elijen los puntos por donde tienen que pasar los polígonos y trasversales, dándoles en consecuencia á unos y otros la forma correspondiente, y asignándoles números de órden, lo mismo que á los vértices en cada uno de ellos.

Así se llaman 1.º, 2.º, 3.er...., polígonos y 1.ª, 2.ª, 3.ª...., trasversal, lo mismo que vértice n.º 1, 2, 3..., del 1.er 2.º..., polígono ó de la 1.ª 2.ª..., trasversal. Las líneas que sirven de enlace á dos vértices marcados, se indican por el nombre de aquel donde empiezan y el de aquel donde terminan.

Los trabajos deben hacerse con escrupulosidad por lo mismo que se opera con instrumentos imperfectos, y no se debe pasar á una parte del levantamiento, sin que se tenga perfectamente concluida y comprobada la anterior, pues de lo contrario la acumulacion de errores puede dar lugar á alteraciones tales en el resultado, que obliguen á desechar trabajos cuya obtencion ha necesitado mucho tiempo.

Suelen elegirse puntos de los bordes del papel de la hoja para vértices del cánevas topográfico, que correspondientes tambien á la adyacente y en ella determinados, sirven para comprobar la exactitud de procedimientos de ambas.

La condicion que determina los puntos topográficos es, que de cada uno de ellos se vean distintamente todos aquellos con quienes esté ligado por líneas topográficas.

Para determinar invariablemente la posicion de los puntos, se encuentran sus distancias á otros dos ó tres fijos de las inmediaciones, y estas distancias y su valor se inscriben en el croquis.

Cada línea del cánevas se mide dos veces, y es necesario que su diferencia no sobrepuje á un decímetro.

Cuando sobre el terreno exista un vértice trigonométrico O conocido, pero inaccesible, si por medio de él se quiere comprobar la posicion de una recta ya trazada en el papel, se toma en el terreno y sobre la línea AB figura 1.ª (lám. 7.ª) cuya representacion se vá á comprobar, un punto C, y se dirigen desde A, B y C, visuales al O, tomando el C, con la única condicion de que no formen dichas visuales á O ángulos muy agudos. Trasladando ahora al papel el punto C, desde el que resulte y los correspondientes á A y B se forman los ángulos α, β y γ

y si las direcciones de las líneas ván á concurrir al punto correspondiente á O, está la representacion de la AB convenientemente colocada.

Tomando ahora la cuestion inversa, supongamos que se tiene el punto O trigonométrico en el terreno y perfectamente determinada su posicion en el papel, figura 2.ª (lámina 7.ª) Supongamos tambien que se conoce en el terreno la direccion de la línea AB, y queremos trasladarla referida al punto O.

Para ello, nos colocamos en el terreno, en estacion en O, y señalamos en la direccion de la AB un punto c con la única condicion de que los ángulos α y β que desde O se observan no sean muy agudos. Se miden en el terreno las longitudes Ac y Bc, y yendo despues al papel, se trazan desde la representacion del punto O, las rectas OM, OR y OM′, convenientemente orientadas, y que formen entre sí los ángulos α y β pedidos, quedando reducida la cuestion á trazar la recta que cortando á las tres tenga por partes interceptadas las Ac y Bc, reducidas á la escala del plano.

Para efectuar esta operacion no hay mas que trazar una línea MM′ en direccion cualquiera y tomar sobre ella, á contar de la línea OR, cantidades m y n iguales á las Ac y Bc, ó que guarden la misma razon que ellas. Trazando por los extremos N, N′, paralelas á dicha OR, las porciones $A'c'$, $c'B'$, que resulten en la recta A′B′, guardarán aun la misma razon. Estableciendo la proporcion $\frac{A'c'}{O\,c'} = \frac{A\,c}{x}$, se determina el punto c, y trazando por él una paralela á $A'c'$, esta es la recta deseada.

Sobre la línea AB de este modo marcada, se puede apoyar un polígono ó continuar una transversal.

Durante todas las operaciones, se debe llevar un registro detallado, donde se consignen ordinariamente los datos que se recojan, para poder detenerlas cuando se quiera, sin perjuicio alguno para cuando se vuelvan á emprender.

Varios métodos existen para ligar los puntos trigonométricos con los secundarios, ó lo que es lo mismo, para trasladar con exactitud al papel los polígonos del terreno, que sucesivamente vamos á dar á conocer.

Método de intersecciones.—Consiste esta figura 3.ª (lámina 7.ª) en colocarse en el terreno en estacion en los puntos trigonométricos A y B, correspondientes á la hoja con un goniómetro de detalle, y desde cada una de las estaciones dichas, se observan los ángulos aAB, bAB, cAB..... que forman las visuales dirigidas á los vértices secundarios a, b, c..... elegidos, con la línea AB del cánevas trigonométrico, lo mismo que los aBA, bBA, cBA...., trasladando las observaciones efectuadas á un registro de la siguiente forma:

Estaciones.	Vértices observados.	Angulos medidos.	Observaciones.
A........	a	$a\,AB = \alpha$	Base = A B.
	b	$b\,AB = \alpha'$	
	c	$c\,AB = \alpha''$	
	⋮	⋮	
B........	a	$a\,BA = \beta$	
	b	$b\,BA = \beta'$	
	c	$c\,BA = \beta''$	
	⋮	⋮	
O........	a	a O A	
	b	b O A	
	c	c O A	
	⋮	⋮	

en el que al lado de la letra que indica cada señal se pone la indicacion de la forma ó clase que le corresponde en el terreno, y en el croquis.

Para dibujar en el papel el polígono, teniendo formados croquis y registro, no hay mas que trasladar con un trasportador á los extremos de la representacion de la línea AB del terreno como vértices, los ángulos respectivamente hallados en A y B, y las intersecciones de sus lados, nos darán las posiciones de los puntos a, b, c...., en el papel. Algunas veces y como comprobacion, se elige un punto O, perfectamente determinado por su distancia á A, en direccion de la AB. Se dirigen en el terreno visuales desde O á los vértices secundarios, y se encuentran los ángulos que estas visuales forman con la AO, cuyos ángulos trasportados, con su vértice en el punto del papel correspondiente al O, deben producir lados que pasen por las representaciones ya marcadas de los puntos *a*, *b*, *c*......

Este método, sobre todo con la comprobacion que acabamos de indicar, es lo suficientemente exacto para la operacion que nos ocupa, cuando los ángulos observados no son muy agudos ú obtusos, y permite operar con comodidad y rapidez, pero necesita que el terreno que se trata de representar sea lo bastante despejado, para poder desde los puntos A y B dirigir visuales á todos los topográficos.

Método de alineaciones.—Para este es conveniente que el terreno correspondiente á la hoja tenga tres puntos trigonométricos para mayor exactitud. Sean estos los A, B, C fig. 4 (lám. 7.ª) En el terreno, se miden con perfeccion las distancias que desde A existen á dos puntos tales como *a* y *b*, de la direccion de las líneas AC y AB, y entre los puntos *b* y *a* se establece una alineacion en cuya direccion se puede medir, y conocer las distancias de *a* y *b* á otros puntos topográficos tales como *c* y *d* que convenga representar. Desde B y desde C se pueden marcar con exactitud puntos tales como *e*, *f*, *g*, *h*...., y establecer entre ellos alineaciones en cuya direccion existirán otros topográficos que se determinarán por sus distancias á los extremos de aquella en que se encuentren, y siguiendo asi y estableciendo otras entre los puntos topográficos ya marcados, se tendrá cruzado el terreno por un gran número de líneas rectas que contendrán todos los detalles del levantamiento que deseemos conocer.

Los resultados se ván consignando en un registro de la siguiente forma:

Origen de la medicion.	Direccion en que se mide.	Sentido	Distancia medida.	Punto determinado.	Observaciones.
A.....	AC...	de A á C	m^{metros}..	a.....	
A.....	AB...	de A á B	n	b.....	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮	
a	ab..	de a á b	p....	d.....	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Para trasladar al papel el resultado consignado en el registro y dibujado á la ligera en el croquis, no hay mas que tomar á partir de la representacion de A, la distancia m^{metros} consignada en el registro, y reducida á escala trasladarla en la direccion AC y en sentido de A á C, obteniendo así la posicion en el papel del punto a; se hace la misma construccion con todos los datos del registro, y se tienen así los puntos representados.

Tiene este método las ventajas de no necesitar más instrumentos que una cuerda, cadena ó cinta, y prestarse á la comprobacion por los puntos de cruce de dos alineaciones, que se determinan por una medicion en cada una de ellas; y el inconveniente de necesitar un terreno muy descubierto para poder marcar las alineaciones entre los puntos determinados.

Aunque no existan en el terreno correspondiente á la hoja en que se está operando, más que un punto trigonométrico y las direcciones á otros dos, puede aplicarse el método, aunque las comprobaciones son menos fáciles, y menos probable la exactitud del resultado.

Método de medicion.—Cuando el terreno sea accidentado, siendo de imposible aplicacion los métodos que antes expresamos, tenemos que acudir al que nos ocupa. Consiste este en colocarse en estacion en el punto A figura 5.ª (lám. 7.ª) y medir primeramente el ángulo A, para lo cual una de las visuales se dirige al punto *c*; se mide el lado A*c*, y colocándose despues en estacion en *c*, se mide el ángulo de este vértice, siguiendo con las mediciones del lado *cd*, ángulo *d*, etc., consignando los datos en un registro, que puede ser el á continuacion inserto.

Estaciones.	Vértices observados.	Lados.	Angulos.	Observaciones.
A......	... *c* ...	A*c* =	*c*AB =	
c......	... *d*...	*cd* =	*dc*A =	
⋮	⋮	⋮	⋮	

Si cruzando el polígono que acabamos de marcar, existiesen senderos, veredas, cauces de arroyo etc., tambien se efectua su levantamiento por el mismo sistema, lo cual además de hacer el plano mas detallado, tiene la ventaja de proporcionar un método para localizar los errores, como muy pronto indicaremos.

Para trasladar al papel, ayudados del croquis, los datos del registro, no hay mas que marcar en dicho papel la línea AB, formar en el punto correspondiente á A el ángulo A B c; se mide en direccion del lado encontrado la distancia A c reducida á escala, se forma un ángulo en c igual al d c A, y se mide sobre el lado que resulte la distancia dc reducida, siguiendo el mismo procedimiento hasta llegar al punto B.

Tiene este método la ventaja de poder operar en terrenos muy accidentados, bosques etc. pero el gran inconveniente de ir acumulando todos los errores que en la medicion de lados y ángulos se cometan.

Método de radiacion.—fig. 6.ª (lám. 7.ª) Para este medio no es de necesidad mas que un punto trigonométrico y la direccion á otro para que sirva de línea orientadora. Se hace estacion en el A trigonométrico, y se ván observando los ángulos que forman las visuales dirigidas á a, b, c, d, etc. con la direccion de la línea de orientacion AB, al mismo tiempo que se miden las distancias Aa, Ab, Ac...., trasladando los datos á un registro.

Estacion.	Puntos observados.	Angulos con la AB.	Distancias.	Observaciones.
A......	a......	BAa =	Aa =	
	b......	BAb =	Ab =	
	⋮	⋮	⋮	

Por medio de los números consignados en este, se trasporta el levantamiento al papel, tomando desde la línea orientadora los ángulos indicados, y midiendo sobre los lados que resulten las distancias indicadas tambien y reducidas á escala.

Este sistema no acumula los errores, y permite operar con rapidez con el instrumento, sin variar la estacion.

Método de coordenadas.—Tambien por el método de coordenadas se pueden levantar los polígonos del cánevas topográfico, bastando para ello tomar la línea que une los dos puntos trigonométricos como eje de abcisas y á un punto trigonométrico, A por ejemplo, figura 7.ª (lám. 7.ª) como orígen, estableciendo el convenio de que las ordenadas hacia un lado de la recta AB son positivas y hacia el contrario negativas. Marchando en el terreno en direccion de AB, se ván levantando perpendiculares á ella que pasen por todos los vértices que se desee determinar, y midiendo por continuidad las distancias A*a*′, A*h*′, A*b*′, A*f*′...., lo mismo que las *a a*′ *b b*′..., se tendrán determinadas las abcisas y ordenadas de dichos vértices que se anotan del modo que se vé á continuacion.

Orígen.	Vértices.	Abcisas.	Ordenadas.	Observaciones.
	a......	A *a*′=..	*aa*′=...	
	b......	A*b*′=..	*bb*′=...	
	⋮	⋮	⋮	
A......	*h*......	A*h*′=...	*hh*′=—	
	g......	A*g*′=..	*gg*′=—	
	⋮	⋮	⋮	

En cuanto al traslado por medio de este procedimiento al papel, se reduce á encontrar los valores de las abcisas y ordenadas reducidas á escala, y trasladarlas al dibujo donde con anterioridad están ya marcadas la línea AB, y su perpendicular AF trazada por A.

En todos los sistemas explicados, se ha indicado la traslacion al papel, los ángulos por el trasportador, cuerdas etc., y las distancias reducidas á escalas por el compás, siendo este el medio que mas generalmente se emplea; pero si se quieren trasladar las coordenadas, se pueden determinar estas como en la triangulacion principal, pues para ello, como ya sabemos, no hace falta mas que una línea orientadora, y el ángulo que forma esta, con una de las del levantamiento.

Cuando el terreno que se tenga que representar sea de pequeña extension, no será necesario establecer vértices trigonométricos, sino que bastará fundar las operaciones en una, efectuada con mayor precision, que puede ser la medicion de una línea poligonal, y aun en casos dados la de una recta.

Sobre esta línea poligonal ó recta, se apoyan las operaciones del cánevas topográfico del mismo modo y por iguales métodos, que lo que se efectuaba sobre la línea, union de los dos puntos trigonométricos contenidos en una misma hoja.

En el caso que el plano sea el de un pequeño contorno, se rodea este de un polígono trazado por el método de medicion y teniendo como vértices, jalones fijos en puntos convenientemente elegidos, sustituyendo de este modo al contorno verdadero uno ficticio poligonal, alguno de cuyos lados pueden cortar á aquel por cualquiera de sus sitios transitables inmediatos al perímetro, trazando este por medio de perpendiculares que partiendo de los lados del polígono, tengan su otro extremo en el contorno verdadero, y midiendo la longitud de estas perpendiculares, que se trasladan al papel, pudiendo dar idea de esta operacion la fig. 8.ª (lám. 7.ª) Tanto en este caso como en cualquier otro en que por medicion se traza un contorno poligonal, puede suceder muy bien que el polígono no cierre, y en este caso ignorando donde está el error, debiamos repetir toda la operacion efectuada, para evitar lo cual es conveniente por medicion tambien, encontrar las direcciones de trasversales en sentido de los caminos, cauces de arroyos, veredas, etc. que crucen el contorno, el cual queda de este modo dividido en varios polígonos, tales como los A, B, y C. Al efectuar el levantamiento es necesario que cada uno de dichos polígonos cierre, y esta condicion cumplida por todos, produce el cierre del total.

Cuando esta condicion no se cumpla, se vé en cual de los polígonos parciales está el defecto, y este solo se corrige; por lo que vemos que la division citada, nos puede abreviar las operaciones, y nos sirve para verificar y localizar los errores.

LECCION 13.

ESCUADRA Y SU USO.—CÁLCULO DE LAS ÁREAS.

Para aplicar al levantamiento de los detalles, los procedimientos que en general acabamos de explicar, necesario es conocer alguno de los instrumentos que para ello se emplean.

Pueden ser estos goniómetros ó goniográfos, y su apreciacion por lo anteriormente expresado, es mucho menor que la de los empleados en la triangulacion principal.

Escuadra de Agrimensor ó cartabon.—Consistia la antigua en dos reglas A B y C D figura 9.ª (lámina 7.ª) dispuestas perpendicularmente la una á la otra, con pínulas en sus extremos, y unidas á un mango hueco M por el intermedio de un eje P, perpendicular al plano de las reglas en el punto central de su union. El giro del eje P sobre la parte superior del mango hueco, imprime movimiento á la escuadra. El sosten del instrumento es un chuzo que se pone vertical por medio de una plomada, lo cual produce la horizontalidad de las reglas. Para dar mayor estabilidad al chuzo, se le suele rellenar de plomo en su parte inferior, y algunas veces por medio de una rosca y un tornillo, se puede dividir en dos partes para facilitar su trasporte, sirviendo tambien la inferior para abrir en el terreno los agujeros donde los jalones deben entrar.

Es necesario comprobar si las trazas de los planos vérticales determinados por las pínulas de las reglas, son exactamente perpendiculares, para lo cual no hay mas que fijar la escuadra y marcar por medio de alineaciones la direccion de las visuales NR y ST, y despues, imprimir al sistema un giro hasta que la alineacion ST, se vea por la pínula de la regla CD, en cuyo caso es necesario que por las de la AB se enfile la otra alineacion. En el contrario, la escuadra es falsa, y hay que corregirla, lo cual se pudiera hacer por tanteos si el extremo de las cerdas estuviese fijo á un tornillo que permitiese un pequeño movimiento lateral. Tambien se podría hacer en el caso de que las reglas no estuviesen invariablemente unidas, aflojando el tornillo que entónces existirá en O, y dando á una de ellas un pequeño movimiento con respecto á la otra.

Para apreciar la magnitud de este movimiento, es decir, para conocer el ángulo de error, dirijamos las pínulas AB de la escuadra, á los jalones marcados en el terreno en sentido de una alineacion MM′ fig. 10 (lámina 7.ª) y marquemos tambien como hemos hecho antes por medio de jalones NN′ la direccion de la visual CD, por las otras pínulas. Hagamos girar el instrumento hasta que por las CD se vean los MM', tomando entonces la AB la posicion PP' en cuya direccion se planta un jalon, próximamente á la misma distancia que el de N, y uniéndole con este por medio de una recta, se coloca otro jalon R en su punto medio, el que unido con el céntro de la escuadra nos da la direccion de la verdadera perpendicular, siendo ROP el ángulo de error.

La misma figura 10 nos indica el medio de levantar una perpendicular á una recta por medio de una escuadra falsa. Se efectuan las mismas operaciones que para encontrar el ángulo de error, y se establece la alineacion que marque la perpendicular en direccion del jalon R.

Para bajar de un punto dado una perpendicular á una recta por medio de una escuadra falsa, lo que se hace es recorrer la direccion de la recta, que suponemos sea la AB, fig. 11 (lám. 7.ª) de modo que el plano de colimacion de las pínulas mm' tenga por traza dicha recta sobre la superficie del terreno, hasta tanto que por la otra pínula nn', se vea el punto Q desde donde se quiere bajar la perpendicular. Hecho esto, se da un giro al instrumento hasta que por las pínulas nn' se mire en sentido de la recta AB, quedando entonces las mm' en la posicion $\overline{m}\overline{m}'$. Se recorre ahora otra vez la AB hasta que por las $\overline{m}\overline{m}'$ se vea el punto Q, y tomando el medio O de la distancia que separa las dos estaciones C y C', y alineándole con el Q, tenemos marcada la perpendicular, por ser isósceles el triángulo CQC'.

La escuadra antigüa ha sufrido modificaciones en su forma. Algunas veces para dar mayor estabilidad á las reglas en su posicion de perpendicularidad respectiva, se las liga por un círculo que forma cuerpo con ellas, figura 12 (lámina 7.ª).

Otras, con el objeto que la visual tenga mas movimiento en el plano de colimacion, toman la forma de un cilindro hueco de metal, fig. 13, que en sentido de dos diámetros perpendiculares tiene las aberturas correspondientes á dos pínulas, y con el objeto de poder imprimir con facilidad giros al instrumento, tiene su sosten como indica la figura, en que A es la parte inferior de la escuadra que en su interior está trabajado á rosca. El mango hueco M tiene un eje de mayor grueso en la parte superior, rodeado por una abrazadera P, que tiene el tornillo en que la rosca se sujeta.

Algunas veces es la escuadra prismática octogonal, figura 14 (lámina 7.ª) llevando aberturas en sentidos perpendiculares correspondientes á las pínulas, y en las otras caras se ponen unas ranuras, dirigiendo visuales por las cuales se forman con las direcciones principales ángulos de 45 grados. Como en las que podemos llamar secundarias no existen mas que ranuras, para mayor facilidad en la observacion llevan estas en su parte superior un orificio tronco-cónico por el cual se mira mejor, y se fija el punto antes de rectificar la visual por la ranura.

Tanto en esta escuadra como en la cilíndrica, caso de que esta tenga ocho aberturas, es necesario al efectuar la verificacion, cerciorarse tambien de que las direcciones secundarias, formen con las principales, ángulos exactos de 45°, para lo que al dirigir las dos visuales que allí se indicaron y establecer alineaciones en sus sentidos, se establece otra en el de una visual secundaria, y es necesario que en todos los giros de 45°, quede uno de los planos de colimacion en sentido de la alineacion ultimamente marcada.

La fig. 14 (lám. 7.ª) representa la escuadra poligonal que suele tener en su parte superior una brujula, cuyo diámetro 0—180°, corresponde á la direccion de una de las pínulas principales.

Para efectuar el levantamiento de los vértices topográficos con la escuadra, no hay mas que tomar y marcar en el terreno una línea directriz que suele ser la AB figura 15 (lám. 7.ª) que une los dos puntos trigonométricos, y partiendo de uno de ellos A se vá operando por el método de coordenadas, bajando perpendiculares de todos los puntos notables del contorno tales como los a', b', c', y los resultados se ván consignando en el correspondiente registro, teniendo cuidado para obtener las abcisas con mas precision, de medirlas por continuidad desde el orígen A. En puntos convenientes de la línea AB y perpendicularmente á su direccion, se establecen alineaciones que á su vez sirven de directrices, tales como la CD, y á ellas se refieren por medio de perpendiculares trazadas con la escuadra y medidas por la cadena, los puntos notables próximos tales como el e', apuntando los datos en otro registro de la misma forma, y que encabeza con la distancia que media entre los puntos

A y C. Estas directrices auxiliares pueden servir de apoyo á otras, teniendo cuidado de elegir su número de manera tal, que siendo lo mas pequeño posible, sea el suficiente para que el levantamiento abrace todos los puntos notables. El croquis, que aquí es de primera necesidad, marca las direcciones de las líneas que se tracen, teniendo bien distintas las letras y señales de todos los puntos cuyos datos están contenidos en el registro que le acompaña y que con él sirve para dibujar el levantamiento efectuado.

En el croquis debe ir tambien indicado, y con toda claridad, el sentido en que, con respecto á cada generatriz se toman las ordenadas positivas y negativas.

En la casilla del registro destinada á observaciones, se deben consignar las distancias del orígen á que cortan las directrices á las direcciones de los caminos, cauces de rios ó arroyos, ancho de unos y otros, distancia á que se encuentran los árboles de la alameda que bordea el camino, caso de que exista, etc.

En cuanto á la operacion material de trazar las perpendiculares, que exije alguna práctica en el que la efectua, consiste en marchar con la escuadra por la directriz, de modo que uno de sus pares de pínulas tenga su plano de colimacion confundido con la alineacion de esta línea, hasta tanto que por el otro par de pínulas se observe el punto desde donde la perpendicular se tiene que bajar, estableciendo en este caso la alineacion entre la estacion y dicho punto.

Ahora bien, pueden ocurrir algunos casos especiales, tanto en los levantamientos, como en su parte correspondiente á la medicion de ordenadas.

Supongamos primeramente que se desea representar una isla, claro de un bosque etc., los cuales podemos recorrer en todas direcciones, pero mas allá de cuyos contornos no podemos penetrar. Este caso, representado en R de la fig. 15 (lám. 7.ª) se resuelve marcando una línea *mn* en sentido de la mayor longitud, cuyos extremos *m* y *n* están completamente determinados por referencia á una de las directrices que puede ser la AB, y marchando sobre *mn* se ván marcando los puntos del contorno como la figura indica.

Otras veces, si es posible tener determinadas las posiciones de tres puntos del contorno se efectua su ligacion por medio de líneas rectas, y estas, lados del triángulo resultante, sirven sucesivamente de directrices; tal operacion es la indicada en el levantamiento del cercado Σ en la misma figura.

Puede suceder tambien que se desee representar el contorno de un bosque ó lugar cerrado en cuyo interior no se pueda operar. En este caso se circunscribe al contorno una línea poligonal, cuyos ángulos sean de 90 ó 45°, y uno de cuyos lados esté determinado de posicion por referencia á una directriz. Los lados de dicho polígono circunscrito sirven á su vez de directrices, para formar por medio de la escuadra el contorno verdadero, método indicado en S de la tantas veces citada figura.

En la misma, y en el sendero M se indica el sistema que hay que seguir para efectuar el levantamiento de esta clase de detalles, lo mismo que los arroyos, límites que separan dos campos, ó las partes de cada uno destinadas á distinto género de cultivos. CD es una directriz, y en el punto α de ella, de donde el camino parte ó es cortado, se eleva una perpendicular que se marca por una alineacion. Sirviendo esta ahora de directriz, se determina con relacion á ella la posicion del primer vértice ϵ; desde este se eleva una perpendicular á la ordenada $\epsilon\epsilon'$ que ahora es directriz, y marchando por esta perpendicular se determina el segundo vértice γ, etc.

Este procedimiento exige que haya terreno practicable á derecha é izquierda de la línea poligonal sobre la cual se opera, y caso de no suceder así, habrá que recurrir á la *pantómetra*, ó la *brújula*, que en breve explicaremos.

En cuanto á la medicion de ordenadas, pueden tambien encontrarse dificultades, siendo la primera el existir un rio, barranco ó accidente impracticable entre la directriz y el punto observado, como sucede con el d' de la figura. La escuadra, dando los ángulos de 45° resuelve la cuestion. La alineacion dd' se establece y mide hasta llegar al obstáculo, marchando en seguida con la escuadra en direccion de la AB hasta llegar á un punto de ella tal como k, en el cual estando la visual dirigida por un par de pínulas principales segun la directriz, se vea por las secundarias el punto d', en cuyo caso $dd' = dk$, cuya longitud dk se puede medir.

Dedúcese de lo expresado, el modo de medir el ancho de un rio ú otro obstáculo, pues restando de dk, dd'', se obtiene dicho ancho $d'd''$.

Puede tambien acontecer que al efectuar el levantamiento de perpendiculares se haya elevado la correspondiente al campanario de una aldea, que esté rodeado de casas, ó á otro objeto cualquiera existiendo árboles, peñas ó cualquier accidente elevado que impida llegar á él, y en este caso hay que servirse de líneas ausiliares.

Supongamos que se quiere prolongar la alineacion empezada correspondiente á la ordenada, y que se quiere medir despues la longitud de esta: sea PQ figura 15, 2.ª (lámina 7.ª) el principio de la alineacion dirigida á O que se quiere prolongar mas allá de un obstáculo R. Marquemos una alineacion auxiliar PT, y marchando por ella tracemos perpendiculares una de las cuales pase por Q, banderola establecida, y las otras sean las aA', bB'..... del otro lado del obstáculo. Midamos las longitudes Pq, Qq, Pa, Pb..... y por la proporcion $\frac{Pq}{Qq} = \frac{Pa}{x} = \frac{Pb}{z}$....., se obtiene la posicion de todos los puntos que se quieran en direccion de la alineacion PO. Para medir la distancia que entre P y O existe, no hay mas que seguir marchando por la PT hasta llegar al punto o pié de la perpendicular bajada de O. Se mide la oP, y por la proporcion $\frac{PQ}{Pq} = \frac{x}{Po}$, se deduce el valor de $PO = x$.

::

Con la escuadra se puede tambien establecer una alineacion entre dos puntos invisibles el uno desde el otro.

Sean estos puntos los A y B′, y se trata de marcar puntos intermedios pertenecientes á su alineacion figura 15, 3.ª (lámina 3.ª)

Establezcamos una alineacion AB auxiliar, lo mas aproximada que se pueda á AB′ y marchando por ella se levanta la perpendicular BB′ correspondiente al punto B′ cuya perpendicular se mide (*). Se elevan en seguida desde los puntos F, E, D, C...., cuyas distancias al A se determinan, perpendiculares á dicha línea, y por las proporciones $\frac{AB}{BB'} = \frac{AC}{x} = \frac{AD}{z} = \frac{AE}{y}$...., se encuentra la posicion de los puntos *c, d, e*...., que son de la alineacion.

Sirve además la escuadra para establecer una entre dos puntos separados por una convexidad del terreno para lo cual no hay mas que colocarse en la parte mas elevada, y hacer por tanteos que el plano de colimacion de un par de pínulas, esté dirigido á los puntos que se quieren alinear, en cuyo caso el de estacion pertenece tambien á la alineacion deseada, y colocando en él una banderola, se puede ya operar por los métodos ordinarios.

Vamos á indicar la resolucion de los siguientes pro-

(*) En el caso en que desde B no se viese B′, se eleva en este punto una banderola, sobre un mastil atado á la copa de un árbol; se dispara un tiro para marcar la perpendicular sobre el punto en que el humo se eleva; ó se enciende una hoguera con el mismo objeto.

blemas que se resuelven por procedimientos análogos á los acabados de expresar, con solo el auxilio de la escuadra y la cadena.

1.º *Por un punto, trazar una paralela á una recta dada.*—Marchando por esta recta como directriz, se eleva á ella una perpendicular que pase por el punto, y marchando por esta perpendicular hasta llegar á él, se marca otra perpendicular, que será la paralela buscada.

2.º *Medir una distancia inaccesible.*—Sea AB la que se quiera medir fig. 16 (lám. 7.ª) Marquemos en el terreno y en posicion conveniente, una alineacion cualquiera CD, y en ella los puntos C y D, pies de las perpendiculares bajadas de A y B, las que se prolongan. Marquemos tambien por una banderola el punto O, medio de CD, y establezcamos alineaciones entre este punto y los A y B. Los puntos A′ y B′ en que estas alineaciones cortan á las perpendiculares antes levantadas, son los extremos de una línea A′B′, igual y paralela AB. En efecto, los triángulos ACO=ODB′ y BOD=COA′ nos dán la igualdad de las líneas AA′ y BB′, y por consiguiente la figura ABB′A′ es un paralelógramo. La línea A′B′ se mide. Si el terreno no fuese lo suficientemente despejado para poder marcar la línea A′B′, se levantarian perpendiculares en los puntos *c* y *d*, medios de CO y OD, y la línea *ab* que resultase de la union de las intersecciones seria mitad de la pedida. Lo mismo se puede hacer levantando las perpendiculares en otros puntos de la CD que sean tercera, cuarta etc. partes de las distancias

CO, OD, siendo entonces las líneas que resultaren tercera, cuarta etc. partes de la distancia pedida.

Es consecuencia de la cuestion que acabamos de resolver el trazar por un punto del terreno una paralela á una recta inaccesible, pues efectuando la construccion anterior, queda reducida la cuestion actual á trazar una paralela á las líneas accesibles A′B′ ó *ab*.

La orientacion de los trabajos hechos con la escuadra se consigue, ligando por triángulos cuyos ángulos sean rectos y de 45°, una línea principal, con otra de las del levantamiento que se está efectuando, y como dicha línea principal estará ya orientada, no habrá inconveniente en marcar en el dibujo una flecha, que nos indique la direccion de las meridianas magnética ó verdadera.

Cálculo de las áreas.—De dos modos puede efectuarse la determinacion de la superficie que un terreno contiene: ó con los datos adquiridos sobre él, ó dibujando el plano.

Para el primer modo, se rodea el terreno de un rectángulo, como el ABCD, fig. 17 (lám. 7.ª) ó en caso que no convenga ó no sea posible, de una línea poligonal cuyos ángulos sean de 90°.

En los dos se procura encontrar la superficie del polígono envolvente, y restando de esta la suma de las de los triángulos y trapecios que se hayan formado en el contorno, lo que resulte será el área buscada.

Cuando es fácil marcar un paralelógramo envolvente, es sencillísima la operacion, pues no hay mas que encontrar su superficie por el producto de las longitudes

$AB = Aa + ab + bc + cB$ y $BC = Bd + dC$, conocidas al efectuar el levantamiento con la escuadra, y restar del valor encontrado la suma de superficies $Aha + abb' + bb'c + \ldots.$, todas de lados conocidos.

Pero si el contorno fuese tan redondeado que hiciese necesaria la colocacion de un polígono envolvente de muchos lados, ó que la disposicion de estos no fuese la conveniente para encontrar con facilidad el valor de la superficie, la operacion indicada seria por demás pesada, y entonces hay que acudir al segundo medio.

Consiste este en levantar un plano en una escala bastante grande del terreno que se quiere medir, dibujándolo en papel cuadriculado, teniendo cuidado de marcar en este plano los detalles que pueden servir para la mas exacta apreciacion. Por la cuadrícula, se vé el número de unidades superficiales contenidas en cada clase de terreno ó en el dedicado á cada especie de cultivo, y por sumas y restas se obtiene el área total. Se comprende que el plano debe ser bastante exacto, pues de lo contrario, una pequeña diferencia en las líneas nos podria producir una considerable en la superficie.

Los agrimensores, al medir las tierras para su tasacion ó para el equitativo reparto de los impuestos, pueden hacerlo de dos modos. 1.º Medir la tierra por su proyeccion horizontal. 2.º Medirla por desarrollo.

El primero empleado siempre para el segundo de los objetos citados, está fundado en lo menos productores que son los terrenos inclinados á igualdad de superficie á causa de las lluvias que arrastran la capa vegetal de ellos, llevándola á los inmediatos valles, y además porque estando los vástagos de las plantas en sentido vértical, las mismas pueden crecer en un terreno inclinado que en su proyeccion horizontal.

El segundo medio consiste en medir en sentido de las pendientes, lo cual tiene el inconveniente de no poder con exactitud dibujar sobre un plano la representacion del terreno medido, por lo que este método está poco en uso, empleándose casi siempre el primero.

LECCION 14.

PANTÓMETRA.—PANTÓMETRO DE FOUQUIER.—GRAFÓMETRO DE DETALLE Y LEVANTAMIENTOS CON CUERDAS Y PIQUETES.

La escuadra, además de los inconvenientes inherentes á su poca precision, tiene el de no poder formar más que los ángulos de 90 y 45.°, por lo cual, se usa otro aparato que con la misma falta de exactitud en sus medios para observar los puntos del terreno, la tiene algo mayor en su apreciacion, y permite operar bajo todos los ángulos.

Es este el llamado «*Pantómetra*».

Pantómetra.—Consiste, fig. 1.ª (lám. 8.ª) en un cilindro de metal AB, dividido en dos partes por un plano MN perpendicular al eje. Las bases resultantes de la seccion en cada una de las dos mitades, están obligadas á apoyarse exactamente una sobre otra por un pivote central que sostiene á ambas. La parte inferior MB, vá unida á un mango hueco por el cual se la fija á un chuzo. En la superficie lateral de esta mitad y en el sitio en que se verifica el contacto con la otra base, existe una cinta de plata MP, dividida en 360 partes, numeradas de diez en diez. Lleva además en los extremos de un diámetro, practicadas en uno una ranura H con su pequeño orifico tronco-cónico en la parte superior, y en otro una ventanilla H′ con su cerda, cuya direccion corresponde al cero de la graduacion.

La mitad superior del cilindro lleva tambien en la parte inferior de su superficie lateral una cinta de plata, de la cual no está graduada mas que una pequeña porcion que sirve de nonio, y que conteniendo 29 divisiones está repartido en 30, apreciando por consiguiente de 2 en 2′. Existen en dicha parte superior dos ranuras X, y dos ventanillas con sus cerdas X′, las que constituyen un par de pínulas, situadas en direccion de diámetros perpendiculares, y correspondiendo la direccion de una de las cerdas al cero del nonio marcado.

Un boton acordonado, cuyo eje penetra por la base fija de la pantómetra y que tiene un piñon montado en él por su parte mas alta, hace por su giro que engranando dicho piñon con una cremallera interior que lleva la AM, se produzca un movimiento en cierto modo regularizado. Los giros de todo el sistema no pueden darse sino alrededor de la espiga del chuzo.

La conveniente colocacion de este sencillo aparato, se reduce á poner el chuzo vertical, lo que lleva consigo la horizontalidad del limbo. Esta se consigue por medio de una plomada.

Grandes modificaciones se han hecho en la pantómetra con el objeto de convertirla en un aparato general, que pudiera servir tanto para las grandes operaciones como para las de detalle.

El aparato modificado que vamos á describir, tomó el nombre de «*pantómetro de Fouquier.*» fig.ª 2 (lám. 8.ª)

Pantómetro de Fouquier.—Es una pantómetra MN, completamente igual á la anterior descrita, y graduada del mismo modo, con las adiciones siguientes: Lleva en lugar de mango hueco una rodilla de nuez, y para permitir ó impedir el movimiento de todo el sistema alrededor de su eje, la parte *r* tiene una garganta que queda abrazada por la base inferior del cilindro, que puede girar sobre dicha garganta como eje, mientras se lo permita un tornillo Q, que teniendo su tuerca en la base N, aprieta contra ella cuando es necesario la pieza R. En la parte superior del aparato está fija invariablemente una pieza K unida á un arco HH′. De los extremos de este parten dos varillas rígidas en direccion de los radios, y en su punto de union se forma el coginete O en donde se apoya un eje, perpendicularmente al cual está sujeto un anteojo T, provisto de su correspondiente retícula.

La longitud del eje O es tal, que la proyeccion del óptico del anteojo sobre la base del cilindro se confunde con un diámetro, ó de otro modo, estando el limbo horizontal, la traza del plano vértical que el eje óptico del anteojo describa, pasa por el centro. (*)

(*) En la porcion del eje O que sobresale de los coginetes, existe fija invariablemente una varilla L cuya parte inferior lleva un nonio. El arco HH′ está graduado de 30 en 30′ con el cero en su punto medio, comprendiendo el nonio 29 divisiones para repartirlas en 30, apreciando por consiguiente de 1 en 1′.
Tiene tambien la base superior una brújula, cuyo diámetro 0—180, corresponde al plano de la cerda del O y su correspondiente ranura.

::

Posée además el aparato dos niveles de aire, fijos á la parte superior y perpendiculares sus dos direcciones.

Estos no tienen rectificacion.

Recientemente se han introducido convenientes reformas en el pantómetro, que consisten en la adopcion de una plataforma de tres tornillos en lugar de la rodilla de nuez; en adaptar al aparato un tornillo de coincidencia para cada uno de sus movimientos, y en elevar dos sostenes para el anteojo superior, que del otro modo falseaba á la larga por su peso la posicion del eje.

Pero aun así, el aparato modificado no ha sido acogido con aplauso por los topógrafos. El poco diámetro de la base de los cilindros, (de $0^m,05$ á $0^m,1$), no permite que la apreciacion sea muy grande, y siendo así, es verdaderamente incomprensible que se hayan dado tantas pretensiones á un aparato imperfecto, que por su graduacion no puede servir para las operaciones fundamentales, y que no exige tanta complicacion para el levantamiento de detalle.

Verdad es que este instrumento es útil para darnos los ángulos horizontales, bien por las pínulas bien por el anteojo; que es orientador; que sirve de escuadra, y que es eclímetro al mismo tiempo; pero todas estas ventajas teóricas, no perfectamente conseguidas en la práctica con el pantómetro, pueden obtenerse con dos ó tres instrumentos distintos muy sencillos y de mas precision.

En cuanto á sus rectificaciones consisten. 1.ª En poner vertical el eje, y en consecuencia horizontal el limbo, para observar lo cual están los dos niveles, y para conseguirlo la rodilla ó los tornillos de la plataforma. 2.ª El eje de rotacion del anteojo debe ser perpendicular á su eje óptico, y 3.ª Dicho eje de rotacion debe ser horizontal; cuyas dos últimas se hacen juntas por el método ya conocido y efectuado en general.

El modo de hacer las mediciones de ángulos, sea con la pantómetra, sea con el aparato de Fouquier, es establecer la coincidencia entre los ceros de nonio y limbo, lo cual estará efectuado si las visuales dirigidas por la pínula de la parte inferior del cilindro, y por una de las de la superior van á parar al mismo punto del terreno; dar en seguida á todo el sistema un giro alrededor de su eje hasta que por dichas pínulas se vea el objeto de la izquierda, suponiendo que la graduacion vaya de este lado á la derecha, y dando despues por medio del boton inferior movimiento á la parte del nonio sola hasta que por su pínula nos marque la direccion del punto de la derecha, el cero de dicho nonio habrá recorrido un arco medida del ángulo buscado, y la lectura del limbo que coincida con dicho cero en la actual posicion, nos dará á conocer su valor.

Con el pantómetro de Fouquier, se pueden tambien dirigir las visuales con el anteojo, sirviéndose estas y las dirigidas por las pínulas de comprobacion mútua, procurando en algunos casos comprobar la lectura del limbo con la que en el de brújula se efectue del ángulo recorrido.

Con el mismo aparato se puede hacer la repeticion de los ángulos de uno en uno, pero esta operacion será imperfecta si no existen tornillos de presion y coincidencia convenientemente dispuestos para limitar y regularizar los movimientos.

Ambos aparatos sirven para la ejecucion de cualquiera de los métodos de levantamiento indicados, pero es mas propio de ellos el de medicion, pues al propio tiempo que se efectua el trazado de las líneas poligonales, se pueden ir recogiendo por perpendiculares á ellas marcadas con la escuadra de la parte superior, los detalles de todo el terreno cercano.

El croquis se debe hacer lo mas exacto que se pueda, sin escasear en él las indicaciones de las señales, ni los números que expresen datos del levantamiento.

El registro es el apropiado al método que se emplee.

Para orientar un plano levantado con cualquiera de los dos instrumentos indicados ó con el *grafómetro*, cuyo conocimiento vamos á ampliar, no hay mas que ligar una línea del terreno perfectamente determinada de posicion, que suele ser la que una los dos puntos trigonométricos que la hoja contiene, con otra línea perteneciente al levantamiento parcial que se está efectuando, por medio de triángulos de fácil resolucion.

Grafómetro de detalle.—Al hablar de los instrumentos de precision, indicamos las modificaciones que los primitivos habian sufrido hasta llegar á ser idóneos para las operaciones fundamentales.

Ahora que tratamos del levantamiento del cánevas secundario ó topográfico, conseguimos buenos resultados con aparatos mas imperfectos, siendo este el motivo de emplear para esta operacion, algunas veces, muy pocas, el grafómetro de anteojo que en su lugar explicamos, y las mas, *el de pínulas.*

Consiste este en un semilimbo ABC fig. 3.ª (lám. 8.ª) que en los extremos de su diámetro lleva dos pínulas, y giratoria alrededor del centro existe otra alidada, tambien con sus pínulas correspondientes. Del centro y perpendicularmente al plano del limbo, sale el eje de sustentacion del aparato que termina generalmente en una rodilla de nuez.

Sus verificaciones son las de los limbos y alidadas de pínulas que en general indicamos, y su uso el mismo que el que las tiene de anteojo.

Puédese por consiguiente emplear para todos los sistemas de levantamiento indicados, siendo sin embargo mas apropiado al de intersecciones, formando el croquis y llevando el registro del modo en dicho sistema expuesto.

Puédese medir por medio del grafómetro de pínulas el ancho de un foso, rio, barranco ú otro obstáculo que no se puede franquear, aunque se hace mejor la operacion con el de anteojo, y para efectuarla se coloca el aparato en sitio conveniente, y se dirige la visual á un punto del borde opuesto. Se le hace girar en seguida alrededor de su eje vertical hasta que dicha visual termine en un punto de la misma orilla que el observador, y próximamente de nivel con el antes observado, y entónces la distancia entre el aparato y el primer punto, es igual á la que existe entre aquel y el segundo, por ser ambos rádios del círculo, seccion perpendicular al eje del cono engendrado por el movimiento de la línea direccion de la visual primitiva. (*)

Levantamientos por medio de alineaciones y medidas.—Hasta aquí hemos empleado en todos los levantamientos, instrumentos medidores de ángulos que unidos á los que nos daban la medida de las bases, producian el completo conocimiento de los terrenos que queriamos representar.

Pero el levantamiento efectuado con la escuadra, nos indica ya que el del cánevas topográfico puede hacerse con la cuerda ó cadena sola.

En efecto, todos los procedimientos se reducen á levantar y bajar perpendiculares y medir distancias, lo cual no exige goniómetros.

Supongamos que en el punto *o*, de la recta AB, se quiere levantar una perpendicular á su direccion figura 4.ª (lámina 8.ª) Tómense á derecha é izquierda de *o* dos puntos con la única condicion $oa=ob$. Fijénse en *a* y *b* los extremos de una cuerda, y tirando de su punto medio M hasta tanto que las mitades *a*M y *b*M estén en perfecta tension, dicho punto M será uno de la perpendicular, cuya union con *o* nos determinará su direccion. En el caso de que desde un punto C se quisiera bajar una perpendicular á una recta AB fig. 5.ª (lám. 8.ª) no hay mas que tomar dos pedazos de cuerda iguales CA y CB, y fijándolos por un extremo en C, se ponen en tension

(*) Generalmente se trasladan al papel los ángulos medidos con el grafómetro por medio de la tabla de cuerdas.

perfecta y se ve el punto de la AB, donde van á parar sus extremos A y B. En estos puntos se fija la cuerda, llevando luego sus extremos C á la parte inferior, donde se determina el punto C′ que unido con el C nos da la línea buscada.

Este procedimiento es muy imperfecto, é impracticable las mas de las veces su segundo caso, por lo cual recurrimos á otros razonamientos para obtener el levantamiento por la medicion sola de distancias.

El conocimiento de los tres lados de un triángulo, nos permite determinar sus restantes elementos, de modo que siempre que sea posible efectuar dicha medicion sobre los triángulos del terreno, teniendo además determinados de posicion dos de sus vértices, la cuestion quedará resuelta.

Tambien puede determinarse el valor de los ángulos de un polígono por medio de las direcciones de los lados, cuando la longitud de estos no puede medirse por completo, como puede verse en la fig. 6.ª (lám. 8.ª) en que AB y AC son los lados del ángulo que se quiere determinar. Tómense desde A longitudes A*b* y A*c* que se miden, establézcase la alineacion *bc*, cuya línea medida, nos dará el tercer lado del triángulo A*bc*, y su resolucion nos hará conocer el ángulo A. En el caso que existiera algun obstáculo que impidiese la medicion en los sentidos indicados ó en alguno de ellos, se pueden prolongar las líneas por el otro lado del vértice, formándose entonces tambien por medicion los triángulos ABC′ ó C′AB′, de lados conocidos, que nos conducen siempre á la determinacion del valor del ángulo A.

Todas estas consideraciones han dado lugar á los procedimientos siguientes:

Supongamos primeramente que se desea levantar el plano del polígono ABCDE..... fig. 7.ª (lám. 8.ª) en cuyo interior se puede penetrar. Se miden todos los lados del polígono y las diagonales AC, AD, AF....., y para trasladarlo al papel, se empieza por establecer una línea tal como CB fija de posicion y de longitud reducida á escala. Se hace centro en sus dos extremos, y con radios iguales á los lados CA y BA despues de reducidos, se trazan arcos de círculo, y el punto de su interseccion será la verdadera representacion del vértice A. Sobre el lado AC que haya resultado, se hace la misma construccion con radios iguales á las distancias CD y AD reducidas, obteniendo de esta manera el punto D, y se continúa el mismo procedimiento hasta que quede formado el polígono total. No hay inconveniente alguno en que la division se haga en triángulos mas pequeños, con tal que los lados de todos se puedan determinar en el terreno, y que al trasladarlos al papel, se pueda formar cada uno sobre un lado del anterior de posicion ya perfectamente conocida.

Cuando la línea fija de posicion en el papel no corresponde en el terreno á una perteneciente al contorno que se vá á levantar, sino exterior á él, el procedimiento varia algo.

Sea la línea AB fig. 8.ª (lám. 8.ª) perteneciente al cánevas, ó completamente determinada de posicion en el terreno y en el papel, aquella á la cual vamos á referir e. levantamiento del contorno poligonal MNPQRS.

Marquemos en direccion de la AB puntos situados á una distancia cualquiera unos de otros. Midamos por continuidad desde A estas distancias mn, np, pq, etc.

Dirijamos y midamos tambien las alineaciones, mM, nM, Pm, Pn, Qm, Qp.... Podremos trasladar al papel el vértice M, cuando apoyados en los puntos m y n de él, en direccion de la AB reducida á escala, y con radios iguales á mM, nM tambien reducidos, tracemos arcos de círculo que por su interseccion nos marcarán la posicion del punto M en el dibujo; lo mismo se hace para los puntos Q, R, etc.

Pero existen algunos, tales como los N y S, que no se pueden obtener con facilidad por el método expresado, y entonces lo que se hace es prolongar la alineacion NP hasta que corte en un punto tal como x á la línea AB; se mide la distancia á que el punto x está de uno de los determinados antes, tales como m y n, por lo cual se puede trazar la recta xP en el dibujo, por ser ya P conocido, y contando desde este la distancia NP reducida á escala, se conoce el punto N. Lo mismo se efectua con el S.

Puede suceder tambien que se tenga que levantar el plano de un lago, casa ú otro accidente del terreno cuyo contorno podamos recorrer pero sin penetrar en su interior, y en este caso, debemos formar el polígono envolvente por medio de la medicion de sus lados y determinacion de sus ángulos por el método antes expresado. Sea el contorno ABCEF... Y fig. 9.ª (lám. 8.ª) el que se quiere representar. Los ángulos exteriores como se vé en la figura se encuentran por las prolongaciones medidas de sus lados, y los interiores como se indica en la misma en *mnp* tambien por medicion de los mismos lados y diagonales.

Uno de los lados del contorno debe ser de posicion bien determinada en el papel. Cuando en el levantamiento hay algun accesorio, se refiere su representacion á la del detalle principal á que está unido. Si tenemos que representar la escalinata DE, unida al edificio M, tomaremos las distancias DA, CE y DH, y sobre la representacion ya establecida de AC, se formará la figura DHKE reducida.

Cuando sea el contorno muy ondulado se levantará por medio de puntos sucesivos de él, que se fijan por triángulos de lados conocidos á una línea del cánevas fundamental, ó á otra de posicion completamente determinada.

Hay además otro método para efectuar el levantamiento solamente con medidas y alineaciones, que dá mejores resultados que los anteriores pero que exige la determinacion exacta de posicion de dos líneas rectas. Pueden ser estas las que marquen las direcciones Norte Sur y Este Oeste. En estos sentidos se establecen dos sistemas de paralelas cuya equidistancia en el terreno sea de 100^m, y á las cuales se refieren las líneas del levantamiento del modo que vamos á explicar.

Sean fig. 10 (lám. 8.ª) AB y CD dos de estas paralelas, que pasan por puntos A, B, C, D, perfectamente determinados. Supongamos se quiere conocer de posicion la línea MN. Para esto se prolonga la alineacion MN, y se marcan los puntos M′ y N′ en que corta á las líneas establecidas. Se miden las distancias AN′ y CM′, y trasladándolas al dibujo reducidas á escala, queda la línea N′M′ determinada de posicion. Se miden en seguida NN′ y MM′ las cuales tambien reducidas nos dán en el dibujo los puntos M y N. Lo mismo se hace con cualquier otra línea, pues cualquiera de ellas cortará, ó bien á las dos líneas establecidas, bien á sus paralelas, al otro sistema de las primitivas perpendiculares, ó á alguna de las rectas ya determinadas. Por el mismo medio se puede hallar la posicion de un punto aislado tal como O, dirigiendo por él una recta arbitraria PQ.

Este método que se llama de «*prolongaciones*» y que exige un terreno bastante despejado, es notable por su exactitud, y solo tiene el inconveniente el mucho tiempo que se emplea en seguirlo.

Se puede tambien tan solo con alineaciones medir el ancho de un obstáculo cualquiera.

Sea este el ABCD de la fig. 11 (lám. 8.ª) Se marca un punto en cada orilla, en la propia con un jalon y en la opuesta en un accidente del terreno, y se establece entre ellos una alineacion MN, que se prolonga hasta un punto cualquiera tal como P. Por este, tracemos en cualquier direccion la línea PQ y tomemos en ella un punto Q arbitrario. Dirijamos una alineacion á M y otra á N. Tomemos QP′=QP y QN′=QN, unamos los puntos P′ y N′, y el M′ en que la recta determinada corta á la alineacion

QM prolongada, está separado de N′ la misma cantidad que M de N, por la identidad de los triángulos QMN y M′N′Q.

LECCION 15.

BRÚJULA.—SU DESCRIPCION, RECTIFICACIONES Y USO.

El principio en que la brújula se funda es: *que una aguja imantada suspendida de modo que pueda girar libremente, toma despues de algunas oscilaciones una posicion constante en todos los casos, dirigiendo sus extremos á dos puntos próximos á los polos de la tierra, que toman el nombre de polos magnéticos.*

Al plano vertical que pasa por el eje de figura de la aguja, se le dá el nombre de *meridiano magnético*, y el ángulo que forma este con el terrestre toma el nombre de *declinacion*. Este ángulo es el mismo que forma la direccion de la aguja con la línea meridiana. Si la declinacion fuese constante en todo tiempo en una cierta extension de terreno, la direccion de la aguja nos marcaría una buena línea orientadora. Pero no sucede así: existen variaciones en la declinacion que se dividen en *regulares* y *accidentales*, subdividiéndose á su vez las primeras en *seculares*, *anuales* y *diurnas*.

Las seculares, que se efectuan en intérvalos de tiempo muy considerables, producen en la direccion de la aguja cambios notables, pero comparando el tiempo en que tiene lugar la variacion con el que se tarda en hacer el levantamiento, se comprende que dicha variacion no se hará notable en el curso de las operaciones.

La declinacion es *oriental* si la punta N de la aguja, esto es, la que contiene el fluido austral, se inclina hácia el E del meridiano verdadero, y es *occidental,* si dicha punta se inclina hácia el Oeste.

La actual declinacion en nuestro suelo es occidental y vale unos 19°. La variacion secular que se está efectuando, va disminuyendo dicho ángulo.

Las variaciones anuales son el término medio de las efectuadas en un año, y tampoco se toman en cuenta por lo antes indicado, y las diurnas se verifican con cierta regularidad, no siendo su amplitud mayor de 8′, por lo cual no son notables sino en limbos de gran diámetro, graduacion muy detallada y aguja larga, lo cual constituye las brújulas llamadas de *declinacion,* que están destinadas á medirla, y de las cuales no nos ocuparemos ahora. Siendo las *brújulas topográficas* de limbo pequeño y aguja corta, como vamos á ver inmediatamente, claro está que no serán sensibles en ellas las desviaciones que hasta ahora hemos tomado en consideracion.

Resta hacerlo de las accidentales, que toman tambien el nombre de *perturbaciones.*

Estas, que hacen variar irregularmente la posicion de la aguja, y que obligan á su punta Norte á recorrer ángulos muy grandes, que algunas veces han sido hasta de 180°, nos impiden tomar su direccion como línea de orientacion verdadera en las operaciones importantes. Causan las perturbaciones los fenómenos eléctricos de la atmósfera, como son la caida del rayo, aurora boreal, etc., la aproximacion de imanes, y la presencia de sustancias magnéticas como el hierro, niquel, etc. Se conocen estas perturbaciones ó por una completa fijeza en la aguja, ó por la distinta velocidad con que efectua sus oscilaciones para volver á su posicion, cuando forzosamente se le ha separado de ella.

Al dirigirse las puntas de la aguja imantada á los polos magnéticos de la tierra, por efecto de la fuerza directriz de estos, no se quedan en la misma horizontal, sino que es natural tienda á buscar la direccion del polo la punta de la aguja atraida por el mas cercano. Este es el motivo de inclinarse en nuestro hemisferio la punta N de la aguja hácia la parte inferior de la horizontal trazada por el punto de suspension. El ángulo que con esta horizontal forma la direccion de la aguja se llama *inclinacion*, y existen aparatos destinados á medirla, de los cuales no nos ocuparemos tampoco.

Con el objeto de que las agujas imantadas queden horizontales en los instrumentos en que las usemos, se lima lo necesario la punta N ó se pone un pequeño contrapeso en la S. Esta se pulimenta para que quede blanca, y la N se deja con el color azul que le resulta de su fabricacion, para que en ningun caso se puedan confundir. (*)

Conocidas las propiedades de la aguja imantada que ligeramente acabamos de reseñar, vamos á hacer mencion de la forma y uso del aparato en que se emplea.

Brújula topográfica.—Componen esta brújula una caja rectángular de madera ABCD (fig. 12 (lám. 8.ª) en el centro de cuyo fondo se eleva un pivote *c* de acero terminado en una punta muy fina, en la cual entra un orificio cónico que está practicado en una piedra ágata que constituye el centro de una aguja imantada NS—*ab*. A la misma altura que la aguja, existe un limbo *pq*, dividido en 360 ó 400°, segun sea la division sexagesimal ó centesimal, generalmente de izquierda á derecha. Sobre la aguja y apoyado en un rebajo *rs* que tiene en la caja, está un cristal destinado á preservar á aquella de los movimientos que el viento la pudiera comunicar, y con el objeto de evitar el uso de tornillos, cuya oxidacion por causa de la humedad pudiera entorpecerlos, está sujeto el cristal por un aro de laton *rs*.

Para que la gravitacion contínua de la aguja sobre su pivote no tuerza este, existe una palanca recodada *of*, por cuyo extremo *f* se levanta el *o*, quedando por él sostenida la aguja contra el cristal, dejándola caer sobre el pivote cuando se vá á operar por medio del movimiento contrario de *f*. Para que al efectuar dicho

(*) Aunque en el curso de física se han tratado estos asuntos con mayor extension, nos ha parecido necesario insertar aquí estas ligeras nociones.

movimiento no se caiga la aguja, tiene esta en su parte superior central, un suplemento cilíndrico.

La graduacion está marcada de 30 en 30′, y el diámetro 0—180° es paralelo á uno de los lados de la caja, y paralelo tambien al eje de figura de un anteojo x giratorio alrededor del z prolongacion del diámetro 90—270°. Del centro de la caja por su parte inferior sale un eje perpendicular al fondo y por consiguiente al limbo, terminado en la esfera de una rodilla de nuez, ó en una plataforma de tres tornillos vérticales.

En las brújulas mas inexactas, está sustituido el anteojo por una alidada formada por una sola regla, por cuyo canto se dirigen las visuales.

Aunque, como hemos dicho, no estén marcadas las graduaciones mas que de treinta en treinta minutos, el aparato aprecia de cinco en cinco. Efectivamente, los limbos son lo suficientemente grandes para que el error quede limitado al que se cometa tomando media division por un tercio de ella ó vice versa, y como dicha mitad y tercio son respectivamente 15 y 10′, el error que por exceso ó defecto podamos cometer es su diferencia 5′.

Conocidos el aparato y su apreciacion, vamos á ver el modo de usarlo.

Empezamos para ello efectuando por medio de un giro de todo el sistema la coincidencia del cero de la graduacion con la punta azul de la aguja. Para dirigir despues las visuales á los puntos dados de una manera sistemática, se dan giros á todo el aparato en sentido contrario al de la graduacion, midiéndose en todos los casos el valor de los ángulos que las visuales forman con la direccion constante de la aguja por la separacion que existe entre el cero de la graduacion, que se ha movido con el aparato y la lectura que marque la punta azul.

Si queremos encontrar el ángulo que dos puntos cualquiera forman con el de estacion, se parte de la coincidencia del cero con la punta, y por el movimiento que hemos dicho se dirige la visual al objeto de la derecha, indicando entonces la punta azul una graduacion n^o. Continuando el mismo movimiento, se dirige la visual al punto de la izquierda, y dicha punta coincide con la division m^o, $m-n$ será el valor del ángulo pedido; pero raras veces se encuentra este bastando para la colocacion de las líneas en el dibujo, como veremos despues, el conocimiento aislado de m y n.

Debe tenerse cuidado para leer las graduaciones, de colocarse en la direccion de la aguja, pues de lo contrario las visuales de lectura pudieran ser inexactas.

La colocacion perfecta de la brújula está conseguida desde el momento en que su limbo sea horizontal. En el caso que lleve nivel, se consigue dicha posicion por el método indicado en general para obtener la horizontalidad de un plano, pero de no ser así, se consigue la del limbo, haciendo que los dos extremos de la aguja enrasen con él que está á su misma altura, en una vuelta completa.

En todo lo que llevamos expresado, las visuales se dirigen desde el ocular del anteojo, punto que se considera comprendido en la vertical del de estacion, pero como los ángulos se miden con el centro del limbo como vértice, existiria un error de excentricidad en cada observacion.

Además, como al verificarlas, se tienen que dar giros al sistema, y no existe medio regular alguno para darlo alrededor de la vertical del ocular, es lo más probable que al dirigir cada visual, se observase desde estacion distinta, lo cual daria errores de alguna importancia considerándolos aislados, y que pudieran ser muy notables en el conjunto, por cuyos motivos se establece siempre la estacion en la vertical del centro del limbo, pudiéndose en este caso dar de una manera segura los giros sin variar la estacion, cometiéndose entonces un error causado por la escentricidad que existe en el anteojo, que es la distancia que hay desde el centro del limbo al eje de dicho anteojo, y vamos á encontrar dicho error en los ángulos observados.

Si el eje óptico del anteojo pasase por el centro, el ángulo que se midiese en el punto **A** seria el verdadero, figura 13 (lám. 8.ª) y tendria por medida el arco **MNPQ**, pero á causa de la excentricidad, el que se mide es el **MNOPQ**r, cometiéndose un error por esceso $\alpha = \alpha'$, de modo que podemos decir que el producido por la excentricidad en los ángulos medidos, tiene por valor aquel bajo el cual desde el punto observado se abraza dicha excentricidad.

Para encontrar el valor de α, tenemos que la excentricidad que podemos llamar δ, se puede ligar con aquel por la relacion $c\mathrm{S} = \delta = \mathrm{SA}$ tang. α;

de donde tang. $\alpha = \alpha = \frac{\delta}{SA} = \frac{\delta}{\sqrt{cA^2 - \delta^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cA}{\delta}\right)^2 - 1}} = \frac{1''}{\sqrt{\left(\left(\frac{CA}{\delta}\right)^2 - 1\right)}\text{sen. }1''}$$

á causa de ser α muy pequeño, y habérsele reducido á segundos.

Sustituyendo los datos convenientes en esta fórmula se encuentra que para una excentricidad de $0^m,1$, el error es en segundos centesimales $12,75''$ á 50^m, $6,37''$ á 100^m, de $4,24''$ á 150^m..., cuyas diferencias son despreciables por entrar en los límites de la aproximacion del aparato.

Como vemos, este error es tanto mayor, cuanto menos distante está el punto que se observa, por lo cual puede ser que se cometiese uno de consideracion al efectuar el levantamiento con la brújula, de una línea poligonal de cortos lados. Fácil seria formar una tabla que para cada distancia nos diese el error correspondiente, pero es mucho mas sencillo hacer la correccion sobre el terreno por un método práctico.

En efecto, si en vez de dirigir por el anteojo la visual al punto A como hemos hecho anteriormente, lo dirigimos á un punto A′, situado á la derecha del A, figura 14 (lámina 8.ª) de modo que se verifique $AA' = cS$ quedará disminuido el ángulo que antes se midió en una cantidad $ASA' = HCA$, que es precisamente el error por exceso que antes se cometió, quedando en consecuencia corregida la medicion inexacta que se habia hecho.

Para obtener en el terreno el punto A′, se usa un jalon de la forma de la fig. 15 (lám. 8.ª) en el cual la parte MN perpendicular á la direccion principal tiene una longitud $AA' = cS$ á contar desde el eje. Existen sin embargo distancias en las cuales se puede operar con la brújula sin efectuar correccion por estar el error que la excentricidad produce, comprendido en los límites de apreciacion del aparato. Determinaremos la máxima y la mínima de estas distancias y conoceremos la parte comprendida.

Consideremos para la primera investigacion la figura 16 (lám. 8.ª) En ella O, es la representacion en el papel del punto que ha servido de estacion. Como el límite de error es de 5′, formemos en O un ángulo de este valor. Se podrá operar en el terreno sin correccion, es decir, siendo inapreciable la diferencia de 5′, hasta tanto que la perpendicular trazada de uno de los lados del ángulo error al otro lado, reducida á escala, sea igual al error gráfico tolerado que suponemos sea de $0^m,0005$. Consideremos que ha llegado este caso en BB′. Establezcamos la relacion

$$\frac{OB}{1} = \frac{BB'}{\text{sen. } 5'} = \frac{0{,}0005}{0{,}0014544} = \frac{5}{14{,}544} = 0{,}3438 \text{ por}$$

ser sen. $5' = 0{,}0014544$; y suponiendo que estamos dibujando el plano en la escala $\frac{1}{1000}$, el valor encontrado en el papel pertenecerá en el terreno á una longitud de $343^m,8$ mas allá de la cual no se podrá operar sin correccion.

Para determinar la mínima distancia á que se puede operar tambien sin correccion, consideremos que el ángulo de error que no puede pasar de 5′, es aquel bajo el cual desde el punto observado se mira la excentridad. Cuando el punto A fig. 13 (lám. 8.ª) esté lo suficientemente próximo para que el ángulo en A sea de 5′, está en su alejamiento mínimo, pues si se aproximase mas, el ángulo seria mayor de 5′ y la correccion se haria ya necesaria. Tomando pues dicha posicion límite, se tiene

$\delta = c\text{A sen. } 5'$; y $c\text{A} = \dfrac{\delta}{\text{sen. } 5'}$. Regularmente la excentricidad δ suele ser de $0^{m},1$ á $0^{m},11$ por lo cual las distancias mínimas serán

$$c\text{A} = \frac{0^{m},1}{0,0014544} = \frac{1000000}{14544} = 68^{m},7 \quad \text{ó bien}$$

$$c\text{A} = \frac{0,11}{0,0014544} = 75^{m},5.$$

De modo que se puede operar con las brújulas sin hacer correccion desde los $68^{m},7$ ó los $75^{m},5$ segun los casos hasta pasar de los $343^{m},8$ contándose ambas distancias desde el punto observado al centro de estacion.

Para que las operaciones se efectuen como hemos dicho, debe suceder que el eje óptico del anteojo coincida con el de figura ó lo que es lo mismo, que dicho eje óptico sea perpendicular al de rotacion. Para comprobar si esta condicion se verifica, dirijamos fig. 17 (lám. 8.ª) una visual por el anteojo á un punto lejano B. Se imprime en seguida un giro de 180° al sistema, lo cual se efectua exactamente por la graduacion del limbo, tomando la línea AB supuesta material la posicion A′B′, y el anteojo la M′N′. Damos ahora una vuelta al anteojo solo, hasta tanto que el ocular vaya al lado del observador, en cuyo caso se habrá colocado en M″N″, y la línea A′B′ en A″B″. Si el eje está como deseamos, la A″B″ será paralela á la AB, y desde N″ se verá el mismo punto B, porque la distancia RS es insignificante con relacion á la SB y las dos visuales estarán casi confundidas. Si así no sucede, las prolongaciones de las visuales A″B″ y AB, formarán un ángulo O, doble del α de error, y para corregir este, se marcan dos puntos B y B″ próximamente á la misma distancia de la estacion. Se marca el punto medio de la recta que los une, y por un movimiento de las cerdas del retículo, producido por sus tornillos de rectificacion se lleva el eje óptico en direccion de dicho punto medio.

Puede tambien suceder que el centro del pivote que contiene la aguja no corresponda al centro del limbo, en cuyo caso las graduaciones leidas al medir los ángulos serán falsas. Pero la fig. 18 (lám. 8.ª) demuestra, que siendo MN la direccion del diámetro del limbo de la brújula y c su centro, lo mismo que M′ N′ la posicion de la aguja girando alrededor de su pivote c'; el ángulo observado por la punta azul tiene un error por exceso MM′, mientras que la lectura marcada por la punta blanca tendrá uno por defecto NN′, y si de la últimamente observada se restan 180°, obtendremos el grado resultante en un punto M″ colocado á una distancia de M, M″M = MM′. De modo que si sumamos la observacion hecha con la punta azul, y la efectuada con la blanca disminuida en 180°, y dividimos la suma por dos, obtendremos el ángulo verdadero, pues se tiene

$$\frac{o\mathrm{M}'' + o\mathrm{M}'}{2} = o\mathrm{M}.$$

Si ambos sumandos resultasen iguales, seria un indicio de que el pivote ocupaba el centro, pero para tener una seguridad, es de absoluta precision hacer dos pares de observaciones, pues el error varía segun la posicion que el pivote ocupa con relacion al centro como se puede ver en la fig. 19, en la cual, estando aquel á la misma distancia de este, produce tres errores distintos MM', $\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}$ y cero, para las tres posiciones c', c'', c'''.

En el caso que el eje de figura de la aguja, no sea una perfecta línea recta que pase por el centro y por las dos puntas, se vuelve sobre el pivote lo de arriba abajo y vice versa, para lo cual las agujas suelen tener el cono hueco que se introduce en el pivote, por uno y otro lado de su superficie. Si las lecturas despues del cambio de la aguja son iguales á las que antes se habian hecho, esta es perfecta, sino se toma la semisuma de las dos observaciones.

Algunas veces se trata de obtener los ángulos referidos á la meridiana verdadera, en cuyo caso tenemos que tomar en cuenta el ángulo 19° de declinacion. Todo se reduce á imprimir un giro al limbo hácia el E hasta tanto que la punta de la aguja marque 19° al principio de todas las observaciones, resultando todos los ángulos medidos aumentados en dicha cantidad.

LECCION 16.

MÉTODOS QUE PUEDEN SEGUIRSE PARA LOS LEVANTAMIENTOS CON LA BRÚJULA, Y EN SU TRASLACION AL PAPEL.

En los levantamientos con la brújula pueden usarse los métodos de medicion, intersecciones y radiacion, y como quiera que ahora se encuentran todos los ángulos con relacion á una misma línea orientadora, debemos mencionar aunque ligeramente dichos procedimientos, en lo que se apartan del método general.

Debemos antes advertir, que á causa de la misma rapidez de estos procedimientos, se hace mas necesario que nunca, para evitar confusiones, el numerar los polígonos, lo mismo que los vértices de ellos y las transversales, distinguiéndose así perfectamente las distintas operaciones de un misma dia.

Método de medicion.—Sea el polígono ABCDEF figura 20 (lám.ª 8.ª) convenientemente numerado, aquel cuyo levantamiento nos va á ocupar. Sean A y F dos vértices que son puntos trigonométricos ú otros perfectamente determinados. Coloquémonos en estacion en 1 y

::

midamos el azimut del lado 1-2, es decir el ángulo α que este lado forma con la direccion de la aguja.

Midamos el lado AB — 1-2 y trasladándonos á B — 2 se encuentra el azimut β del lado 2 — 3 cuya longitud se mide. Haciendo estacion en 3 se hace la misma observacion con respecto al 4, y así se va siguiendo hasta concluir las operaciones por las de la estacion 6. Puede suceder que en esta última observacion se note que el polígono no cierra, en cuyo caso se han cometido errores, bien sea en el levantamiento, bien en la construccion sobre el papel.

Aun cerrando el polígono pueden haberse producido estos errores, que compensados despues unos con otros, hayan logrado producir el cierre.

Para conocer en que ángulo del terreno se ha cometido el error, ó cual de los del papel está mal construido, proporciona medios la brújula.

Para lo primero, la sola consideracion de la figura 21 (lámina 8.ª) nos indica que si desde A como estacion se mide el azimut de AB, y haciendo luego estacion en B, se mide el de BA, las dos observaciones se diferencian en 180°, sucediendo lo mismo con las de los azimut de CD, tomados desde D y C y así de los demás. A las observaciones hechas en el sentido de la medicion se las llama *directas* y á las efectuadas en sentido contrario *inversas*.

De modo que podemos decir que el azimut de un lado estará bien encontrado, desde el momento en que haciendo desde el otro extremo de él la observacion inversa, se diferencien las dos en 180°. Si así no sucede, alguno de los dos ángulos está mal medido y hay que rectificar, volviendo á repetir las dos operaciones.

Para comprobar la exactitud en la traslacion de los datos al papel, se usa otro método, fundado en la observacion desde todos los vértices de ciertos puntos principales que se llaman de *verificacion* ó *referencia*, y que pueden ser interiores ó exteriores al polígono.

Sea uno de estos el O, en la figura 20. Se encuentran desde cada uno de los vértices los azimut de las visuales dirigidas desde ellos al O, cuyos datos se trasladan al registro. Al marcar el polígono en el papel, se forman los ángulos antes encontrados, siendo necesario que las direcciones de los lados vayan á cortarse en un punto único para que la construccion esté bien hecha.

En el caso en que no se exige mucha exactitud en un levantamiento, proporciona el uso de la brújula por el sistema de medicion, un medio para abreviar las operaciones. Consiste este en no hacer estacion en todos los vértices, sino en alternados, como son los 1, 3, 5, etc., haciendo en estos las observaciones directa é inversa, y como la directa de un vértice es la inversa del siguiente con diferencia de 180°, obtendremos las observaciones directas de los vértices 2, 4...., restando 180° de las inversas de los 3, 5...., si estas son mayores de dos ángulos rectos, ó sumando 180 si son menores.

El croquis es muy importante en este levantamiento y en todos los efectuados con la brújula, tanto para marcar en él las señales y numeracion de los distintos lados, como para indicar por medio de arcos la magnitud de los azimut medidos.

El registro se dispone como sigue; refiriéndose á la figura 20.

Estaciones	Puntos observados.	OBSERVACIONES.		Angulos.	Lados.	Angulos de comprobacion.	Tomados sobre	Observaciones.
		Directa.	Inversa					
1..	2..	10.	190.	10	1-2=.	el que forma AO con la aguja.	0	
2.	3..	292.	112	292.	2-3=.	el que forma BO con la aguja.		
....	....	....	....	....	......	....		
....	....	....	....	....	......	....		

Método de intersecciones.—El procedimiento es el mismo que el indicado en la marcha general que se indicó en la leccion 12, con la única diferencia de que en vez de tomarse los ángulos con el vértice en cada estacion y formados por la recta que las unia con las visuales dirigidas á los demás vértices, se encuentran los formados por estas, con la direccion de la aguja, soliéndose tambien tomar para que sirva de comprobacion un punto intermedio de la recta que liga las indicadas estaciones, y encontrar desde él los azimut de las visuales de los vértices, siendo necesario que al trasladar los datos al papel los azimut de cada uno de aquellos encontrados desde las tres estaciones, estén en tal disposicion que sus lados se vayan á reunir en un mismo punto, que será la representacion de dicho vértice observado.

En el croquis se marcan tambien, aunque á la ligera los arcos medida de los azimut como se puede observar en la figura 22.

El registro es de forma igual al del procedimiento general indicado para este método.

Cada uno de los sistemas que acabamos de espresar se aplican segun la clase del terreno, y muchas veces se hace uso de una combinacion de los dos, cuando se trate de levantar con la línea poligonal algun detalle del terreno, como suele ocurrir á los oficiales encargados de formar un itinerario, en el que además del camino que se tiene que recorrer, es de necesidad absoluta la representacion de cierta extension de terreno á derecha é izquierda de él (*).

Sea, fig. 1.ª (lám. 9.ª) ABCD..., el camino que se tiene que seguir y M, N, P, Q, puntos de los alrededores que se tengan que representar. Se vá levantando el camino por el método de medicion, y los otros puntos se encuentran por intersecciones tomando como bases los vértices convenientes del camino y como puntos de comprobacion, algunos intermedios de las bases elegidas. Es necesario en este caso que al registro vaya acompañado de una hoja en que existan varios pequeños de la siguiente forma:

(*) Volveremos á este asunto en las lecciones destinadas á reconocimientos militares.

Levantamiento sobre AB—1-2 *como base.*

Estaciones.	Puntos observados.	Angulos.	Observaciones.
1.....	... M ...	.. α	El punto O se encuentra á n^m de A.
	... Q ...	.. α'	
2.....	... M .	.. β	
	... Q ..	.. β'	
0.....	... M ...	.. γ	
	... Q ...	.. γ'	

Método de radiacion.—Tambien ofrece ventajas su empleo valiéndose de la brújula. No se necesita mas que la posicion de un punto trigonométrico que sirva de estacion, y la direccion de la aguja sirve de línea orientadora.

La marcha, registro y croquis son los mismos del caso general, teniendo cuidado en el último de marcar los arcos correspondientes á los ángulos meridianos de las visuales.

Se emplea comunmente en las representaciones de islotes, colinas, plazoletas de bosques ó terrenos accidentados etc.

Ventajas de la brújula.—No son solo las muchas comprobaciones que en los levantamientos con la brújula y sobre todo en el método de medicion se pueden efectuar, las ventajas que este instrumento ofrece. La mucha rapidez en los procedimientos, la sencillez y fácil trasporte del aparato, sus casi insignificantes verificaciones la convexidad á la derecha, y haciendo deslizar en esta disposicion el transportador sobre dicha *mn* hasta que el diámetro libre pase por A, podemos trazar por dicho diámetro libre la recta NM de la inclinacion pedida, pues $\alpha = \alpha' = 43°$.

2.° El mismo procedimiento se emplea para trazar el ángulo de 112 grados como indica la fig. 7.ª (lám. 9.ª) siendo $\beta = \beta' = 112°$.

3.° En los ángulos desde el tercer cuadrante, como por ejemplo el de 202 grados se emplea ya la graduacion interior, viendo por el sentido de ella que es lo mismo que si existiese el limbo entero y se hubiese continuado el giro del transportador, como nos lo demuestra la figura 8.ª (lámina 9.ª) verificándose $\gamma = \gamma' = 202°$.

4.° Refiriendo la construccion á un ángulo del cuarto cuadrante, al de 315 grados por ejemplo, la marcha de la operacion es igual completamente á la anteriormente seguida, pudiéndose notar en la fig. 9.ª (lám. 9.ª) en la cual se verifica $\Sigma = \Sigma' = 350°$.

Ningun inconveniente habria en el uso del transportador, si siempre la dimension de su diámetro libre alcanzase al punto por donde la recta deba pasar, pero en el caso en que el ángulo difiera poco de cero, ó cuando se aproxime mucho á 360°, puede suceder que dicho punto esté fuera del alcance del aparato, en cuyo caso, lo primero que á la imaginacion se presenta es trazar por el punto dado una paralela á las directrices, y sobre ella trazar el ángulo buscado.

Pero los inconvenientes que presentan estas paralelas que pueden ser en gran número, por la falta de limpieza que en el papel produce, ha hecho conocer la necesidad del *transportador complementario* y de las directrices perpendiculares *pq*, fig. 5.ª

Transportador complementario.—Es este de la misma forma que el antes explicado, y le diferencia de él la adicion de otras dos graduaciones, colocadas en arcos concéntricos á los de las dos primeras, pero de menor radio. Para ver el modo con que está dispuesta dicha graduacion, consideremos la fig. 10 (lám. 9.ª)

Se marca el radio O A, perpendicular al diámetro libre, y en los puntos en que corta á los círculos nuevos se ponen los grados 0—180 correspondientes á su diámetro perpendicular. En los puntos en que el diámetro libre corta á los dos arcos nuevos, se inscriben las cifras 90—270 de la numeracion de su perpendicular O A en los arcos antiguos. Se traza un radio cuya direccion sea cualquiera OM y su perpendicular ON, y en cada una de ellas se marca los grados de los arcos nuevos, correspondientes á los de los antiguos en su perpendicular, y así se vá siguiendo hasta marcar la graduacion completa de los arcos recientemente trazados.

Por lo dicho y lo que en la figura se observa, notamos que los dos arcos interiores que forman el transportador complementario, no son mas que uno ordinario cuya graduacion se ha corrido un cuadrante.

Expliquemos su uso. Tiene este lugar en el caso excepcional que hemos citado, de no alcanzar el ordinario al punto por donde la direccion de la recta nueva debe pasar.

Entonces se siguen los mismos pasos de lo indicado en el caso general, con la única diferencia de apoyarse en las directrices perpendiculares, en vez de hacerlo en las magnéticas, considerando como cero del transportador el del complementario, y midiendo por su graduacion.

El resultado es el mismo, pudiendo producir el convencimiento de ello la fig. 11 (lám. 9.ª) en la cual *mn* es la directriz magnética, y *pq* la perpendicular, AO la línea orígen de los ángulos, y O*q* el radio cuya graduacion en el transportador complementario es la del valor del ángulo que se quiere formar, teniéndose entonces que α', ángulo marcado con el complementario es igual á α por tener sus lados perpendiculares y á α'' por tenerlos así medidos, y como $o\,\overline{m}$ la hemos trazado paralela á *mn*, tiene que ser la MN paralela á M′ N′, y en consecuencia esta paralela á ST, posicion de MN, despues de haberse deslizado el transportador por *pq*, que es lo que deseábamos demostrar.

Para que la práctica ayude al perfecto conocimiento de lo que acabamos de decir, nos proponemos resolver las siguientes cuestiones.

1.ª Sobre la directriz perpendicular *pq*, transportar un ángulo de 10°, correspondiente al punto A, figura 12 (lám. 9.ª)

Ponemos el transportador sobre la *pq* de tal manera que coincida con dicha línea el radio que pasa por el grado 10 de la division complementaria y haciendo deslizar en seguida el transportador sobre *pq* sin perder dicha coincidencia, se traza al llegar á A la línea ST que es la pedida.

2.ª Formar sobre la misma directriz el ángulo del registro 100°, fig. 13 (lám. 9.ª)

Se coloca del mismo modo que antes el radio correspondiente á la division 100 del complementario, y ya el trazado de la línea no ofrece dificultad.

3.ª Figura 14. Formar con las mismas condiciones el ángulo del registro 190°. Siendo el procedimiento completamente igual excusamos explicarlo, sucediendo lo mismo con la 4.ª cuestion que consiste en marcar un ángulo del cuarto cuadrante, 290° por ejemplo, cuya ejecucion representa la fig. 15.

Hemos sido tal vez prolijos en la materia acabada de tratar, á causa de su mucho uso y gran importancia, pues por lo demás, el solo exámen de las figuras 10 y 11 con la explicacion á ellas referente, bastaba para el empleo conveniente del sencillo aparato que nos ocupa.

El objeto ha sido tambien poner de manifiesto, que para recorrer los cuatro cuadrantes con el transportador complementario, no hemos hecho mas que dar el mismo giro y seguir paso á paso la misma marcha que en el ordinario ó simple.

Lo que acabamos de decir, nos permite disminuir considerablemente el número de directrices.

Se pueden suprimir todas ellas, si al encontrar cada ángulo le sujetamos á la correccion de declinacion, refiriéndolos á la meridiana verdadera, en cuyo caso las y correcciones, vienen á hacerle aun mas precioso en los procedimientos que nos ocupan.

Su apreciacion es grande con relacion á los demás de detalle, por mas que sea forzoso confesar que no se acerca á la categoría de los de precision.

En los levantamientos por medicion con el grafómetro y otros instrumentos angulares, los errores se ván acumulando, por tener que formar el ángulo de cada lado con el anterior, mientras que con la brújula si se ha medido mal un ángulo, que se haya tenido la inadvertencia de no comprobar, solo produce una subida ó bajada al lado siguiente proporcionada al error, pero conservándole paralelo á su posicion verdadera, pues continúa en la misma direccion la línea orientadora, como se puede notar en la fig. 2.ª (lám. 9.ª)

Cuando se opera sobre un polígono cerrado, existe en el uso de los otros aparatos la comprobacion que *los ángulos interiores del contorno poligonal valen tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos,* lo cual no les dá ninguna ventaja sobre la brújula, pues la diferencia de los dos ángulos magnéticos, observaciones directas, en los extremos de un mismo lado, puede producir el conocimiento del ángulo de este con el siguiente, como se puede comprobar en la fig. 3.ª (lám. 9.ª) en la cual $\varepsilon = mn - pq$ y $180^\circ - \varepsilon = ABC$, y así los demás.

En los casos de operar por medicion en grandes contornos, se suelen marcar puntos intermedios, si existen algunos bien determinados, y se toman estos como de partida de cada uno de los levantamientos parciales en que el total se divide, para que de este modo queden localizados en cada uno de aquellos, los errores que pudieran resultar. De ventaja grande es tambien el empleo de la brújula en las representaciones de líneas poligonales de lados cortos, como son: desfiladeros, sendas ó veredas, en los bosques, etc.

Necesitamos ahora únicamente conocer los medios de trasladar al papel los datos sobre el terreno obtenidos.

Usase para esto el *transportador,* que puede ser de talco, metal ó papel.

Transportador.—Consistian los primitivos fuese cualquiera la sustancia de que estuviesen formados en un círculo, dividido en igual número de partes y en la misma direccion que el limbo de la brújula. Los de metal se desecharon porque ensuciaban el papel, y los de esta materia por su fácil rotura é incómodo uso.

Notóse además lo poco conveniente del círculo entero, por el uso que se tenia que hacer de un punzon para marcar las direcciones de los lados y de una regla para trazarlos, por lo cual se redujo el transportador á un semicírculo.

Es, como hemos dicho de talco, materia sobre la cual tienen poca accion las influencias atmosféricas, es traslucido, y al par que esta propiedad hace que de un modo exacto se pueda fijar el centro, las graduaciones, mas opacas, son perfectamente perceptibles.

Estas graduaciones son dos: la exterior de 0 á 180°, y la interior en el mismo sentido y de 180° á 360 fig. 4.ª (lám. 9.ª)

Estando el transportador graduado como el limbo de la brújula, y recordando el modo de operar con esta, no existiria dificultad en el empleo de aquel, si en cada uno de los puntos que se debieran tomar como vértices de los ángulos contenidos en el registro, existiera la línea direccion de la meridiana magnética.

En efecto, todo quedaba reducido á apoyar en dicha línea el diámetro O O, el punto O en el vértice, operacion equivalente á la coincidencia del cero de la brújula con la direccion de su aguja, y hacer girar en seguida el transportador en sentido contrario á su graduacion hasta que la lectura marcada en el registro como valor del ángulo, viniese á coincidir con la línea directriz, en cuyo caso el canto del diámetro libre AB, nos podrá servir de regla para trazar la direccion deseada, cuyo procedimiento en nada se separa tampoco de lo efectuado con la brújula. Pero las muchas directrices que habria que marcar han hecho que la operacion se simplifique por medio del trazado de directrices magnéticas.

Se hace en todos los planos, para mayor facilidad en su comprension, que el Norte verdadero esté en la parte superior, el Sur en la inferior, y respectivamente el Este y Oeste á derecha é izquierda.

Si trazamos, pues, una línea cuya parte superior forme un ángulo de 19° á la izquierda ó al Oeste de la verdadera del papel, tendremos en aquella una directriz magnética, por ser de 19° al Oeste la declinacion.

Marcando ahora paralelas á la directriz trazada, á una equidistancia en armonía con la naturaleza del

::

terreno y la escala del plano, tendremos indicadas todas las *mn* de la fig. 5.ª (lám. 9.ª) La equidistancia suele ser de un decímetro.

Establécese además otro sistema de directrices *pq*, perpendicularmente á las *mn*, y con su misma equidistancia cuyo objeto despues veremos.

Ninguna dificultad ofrece ya el trazado de los ángulos inscritos en el registro, para cuya operacion no hay mas que elegir la directriz de las *mn*, que pase mas cerca del punto por donde el lado del ángulo que se forme debe pasar, hacer coincidir con dicha directriz el radio del transportador que vaya á la graduacion deseada, empezando con la convexidad del dicho aparato á la derecha, y hacerle deslizar en seguida sobre la directriz hasta que el diámetro libre pase por el punto marcado, en cuyo caso, sirviendo de regla dicho diámetro, se traza la recta que tendrá la inclinacion pedida.

Hay que advertir que en el papel se cuentan los ángulos en sentido de la graduacion, del cero á la directriz por su parte superior, como análogamente se efectuó en la brújula.

Para mejor inteligencia de lo que acabamos de decir vamos á formar desde un punto y sobre las directrices magnéticas, ángulos pertenecientes á los diversos cuadrantes.

1.º Sea el de 43 grados el que queremos trasladar al papel, y A el punto por donde la direccion del lado debe pasar, fig. 6.ª (lám. 9.ª) siendo *mn* la directriz. Efectuamos la coincidencia del radio 0—43 con la *mn*, teniendo abcisas y ordenadas de los distintos puntos, serán las verdaderas directrices.

Cuando el limbo de la brújula es sexagesimal siendo centesimal el transportador de que se dispone, ó vice versa, hay que hacer la reduccion de unos grados á otros por medio de las siguientes relaciones

$$100^c = 90^s;\ 1^c = \frac{9^s}{10};\ 1^s = \frac{10^c}{9};\ n^c = \frac{9}{10} n^s;$$

$n^s = \frac{10}{9} n^c$ y las fracciones que en el cambio pueden resultar, se toman aproximadas á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ....., de grado de las divisiones nuevas.

Transportador de Troughton, con nonios.— Es un aparato que tanto puede servir en los levantamientos con la brújula, para efectuar la traslacion al papel, como en los efectuados con el grafómetro ó con otro instrumento cualquiera de detalle.

Lo componen un círculo ó limbo de laton AB fig. 16 (lám. 9.ª) en cuyo centro gira una alidada MN con nonios en sus extremos, que suelen apreciar de minuto en minuto.

Forma la parte central del aparato un círculo de talco O, cuyo centro determinan dos rectas perpendiculares. Rodea á este círculo un pequeño cilindro hueco RS, del cual parte la alidada MN y la varilla SZ. Termina esta en un boton *n* cuyo eje atraviesa la varilla, y en su parte inferior lleva un piñon que engrana en los dientes exteriores del limbo, con lo cual se facilita el movimiento de las alidadas sobre él.

Lleva dicho limbo unas puntas por su parte inferior, destinadas á fijar el transportador al papel, y en la superior cuatro chaflanes $\underline{t}$ con una raya en su parte media, indicando así la direccion del diámetro, 0—180, y de su perpendicular.

En los extremos M y N de las alidadas existen unas pequeñas bisagras *c*, por medio de las cuales giran sobre dichas alidadas unas piezas C, C′, construidas con la condicion de que la línea que une sus extremos X, X′ pase por los dos ceros de los nonios y por el centro. En dichos puntos X, X′ existen pequeñas puntas, con botones en su parte superior para marcar la direccion de la alidada.

Las pequeñas bisagras *c* llevan tornillos de rectificacion que permiten un ligero cambio de posicion á las puntas.

El manejo de este instrumento es muy sencillo, consistiendo solo en colocar sobre la recta en que debe apoyar el ángulo, el radio correspondiente al cero del limbo, de manera que el centro de este esté en el vértice, fijando en seguida por medio de las puntas el limbo al papel, y por medio del boton Z se hace marchar la alidada hasta que el cero de su nonio indique la lectura del ángulo que se vá á transportar, en cuyo caso apretando el boton de la punta X se marca un punto, que reunido con el centro ya marcado, dará el trazado del ángulo que se queria transportar.

Además de las verificaciones correspondientes á los nonios y limbos de las cuales en su lugar nos ocupamos, debemos cerciorarnos de que el centro y las dos puntas están en línea recta, para lo cual se traza una de estas por el canto de una regla, y haciendo coincidir con ella el centro y una de las puntas, la otra debe coincidir tambien. En el caso de que así no suceda, los pequeños tornillos de las bisagras *c* hacen tomar á la punta la posicion necesaria.

Proporciona la brújula el medio de referir puntos aislados M, M'....., etc. á dos visibles, dibujados ya. Puede tener esta operacion por objeto, el referir al levantamiento un detalle levantado separadamente, ó la representacion de ciertos puntos accesibles en la cresta de unas rocas, en varios islotes, y en general en parajes separados entre sí por barrancos ú otro sitio cuya profundidad los haga impracticables. Se hace estacion en M para tomar los azimut que con relacion á las meridianas magnética ó terrestre formen las líneas MA y MB, suponiendo que A y B son los puntos conocidos fig. 17 (lám. 9.ª), y siendo estas las observaciones inversas de las que se hubieran tenido que efectuar desde A y B hácia M, tomando desde estos puntos sobre la correspondiente meridiana ángulos que se diferencien de los medidos en 180°, la interseccion de sus lados nos dará el punto M, pudiendo hacer lo mismo con el M' y demás que en su caso estén.

Uso de la brújula en las minas.—Sabemos ya, que puede usarse este aparato como un goniómetro ordinario, midiendo el ángulo formado por los dos lados que en la estacion concurran, pero lo que le caracteriza separándole del grupo de los demás, es su propiedad de podernos dar la direccion de una línea desde una estacion aislada, mientras los otros goniómetros necesitan una que sea comun á la estacion en que se opera y á la anterior ó á la siguiente.

Su fácil medio de comprobacion por las observaciones directas ó inversas, lo hace irreemplazable en los trabajos subterráneos, ya pertenezcan estos á minas en explotacion, ó á minas militares, objetos ambos de preferente atencion para el artillero.

Sin entrar en terreno ajeno á este lugar y á nuestro propósito, diremos que generalmente se efectúa el levantamiento del terreno exterior sobre papel trasparente y el de los trabajos subterráneos efectuados, ó proyectos de los que se tengan que efectuar con trazos fuertes, y estableciendo un punto de coincidencia de los dos dibujos, que muy bien puede ser la entrada ó pozo de la mina, y haciendo sea la orientacion de los dos la verdadera, se puede formar idea perfecta del trabajo efectuado y del que queda para efectuar.

Cuando el levantamiento de la parte subterránea se haga en las condiciones ordinarias, nada varía en los procedimientos empleados, haciéndose como en ellos las observaciones directas é inversas para estar en la seguridad de seguir una marcha conveniente.

Escusado es decir, que para marcar la direccion de galerías nuevas y perseverar en ellas durante el trabajo, no hay mas que dar el giro suficiente al aparato para que su punta azul marque la graduacion igual al azimut correspondiente en el plano, debiendo seguir el trabajo en direccion del radio del limbo que pasa por cero.

Cuando las operaciones tengan lugar en minas de hierro, ó cuando existan próximos grandes depósitos de sustancias magnéticas, sufrirá la aguja perturbaciones que aumentarán el ángulo si la punta azul se inclina al Este y lo disminuirá si se inclina al Oeste.

Necesario es pues, que operemos con mas cuidado, haciendo todas las comprobaciones, corrigiendo en cada vértice la perturbacion, y refiriendo los ángulos á la meridiana terrestre.

Consideremos la fig. 18 (lám. 9.ª) como el traslado del levantamiento.

Sea el punto 1 el pozo de la mina ú otro en el cual no se notan aun las influencias de la sustancia magnética. Tomemos el ángulo que con la meridiana magnética forma el lado 1—2, y supongamos sea de 210 grados, cuyo ángulo es verdadero. Traslademonos á 2, y hagamos la observacion inversa y supongamos que notando ya la perturbacion, nos resulte un valor de 35°, cuya diferencia del anteriormente encontrado es de 175°, lo que nos indica que la punta azul de la aguja se ha desviado al Este 5°. Hagamos ahora la observacion directa de 2 á 3, y supongamos que se obtiene un valor 200°; como la aguja está desviada 5°, solo se le marca en el registro como de 195. Se hace luego desde 3 la observacion inversa, resultando 12°, cuya diferencia con el anterior es 183, lo que nos indica que en esta estacion la aguja se ha inclinado hácia el O 3°, cuya desviacion se tiene que aumentar á la observacion directa de 3 á 4, y así sucesivamente.

Añadiendo 19° á cada uno de los ángulos hallados se tiene su declinacion corregida, y con referencia á la meridiana terrestre.

El registro se lleva como á continuacion expresamos.

Estaciones.	Vértices observados.	Lados.	Observaciones directas.	Observaciones. Inversas observadas.	Observaciones. Inversas deducidas.	Variaciones de la aguja. E.	Variaciones de la aguja. O.	Azimut con la meridiana terrestre.	Observaciones.
1	2	1—2	210	35	30	5	»	229	
2	3	2—3	195	12	15	»	3	214	

Ayudada la brújula por la escuadra, puede servir para efectuar todos los levantamientos de detalle, sirviendo la primera para marcar largas directrices y la segunda para levantar sobre ellas por perpendiculares las pequeñas sinuosidades, y los demás puntos cercanos de poca importancia.

Réstanos solo explicar el procedimiento que debemos seguir, cuando por consecuencia de los pequeños errores que hemos ido cometiendo, no cerrase la línea poligonal sobre los puntos trigonométricos, ó bien determinados, que la limitan.

Usanse dos medios de reparticion de las diferencias que puedan resultar, advirtiendo que si las correcciones que hacerse deban pasan de los límites tolerados en el dibujo, lo que procede es emprender de nuevo las operaciones.

Concluido el levantamiento y trazado en el papel, se puede notar si el polígono cierra ó no sobre los puntos trigonométricos extremos, lo que tambien se puede advertir por medio de sus coordenadas.

En efecto, por lo que dijimos al ocuparnos del sistema de estas, para conocer las coordenadas de un punto cualquiera no se necesitaba mas que las de otro con quien estuviese ligado por medio de una recta conocida, y el azimut con respecto á la meridiana, ya sea magnética ó terrestre.

Las coordenadas de los puntos A y B, ya determinados de posicion fig. 19 (lám. 9.ª) son completamente conocidas, por lo cual se pueden tambien hallar las del punto 2, ligado con el A por la recta 1-2, y cuyo azimut se conoce por haber efectuado el levantamiento con la brújula.

Conocidas las coordenadas del punto 2, se pueden hallar las del 3 con las mismas condiciones y llegar así al extremo de la línea poligonal.

Si resultan para este los mismos valores de coordenadas, que los con anterioridad conocidos del punto B, el polígono cerrará, pero en caso contrario, quedará su extremo en un punto tal como B′, siendo necesario que hagamos correcciones en los ángulos y en los lados para reducir al punto B′ á juntarse con B.

Para esto, conocidas las coordenadas de A, B, y B′, se pueden hallar por el cálculo las distancias B′A y BA, lo mismo que el ángulo que forman. Si este ángulo no iguala ó sobrepuja al error máximo tolerado, se puede dar un giro igual á dicho ángulo á toda la línea poligonal, alrededor del punto A, con lo cual la AB′ se confundirá con la AB, pudiendo caer B′ sobre B ó nó. En el primer caso la correccion estaria efectuada, debiendo notarse que todos los azimut de los lados han aumentado ó disminuido una misma cantidad, por pertenecer á un sistema invariable animado de una rotacion alrededor de uno de sus puntos, describiendo todos los del sistema ángulos iguales; siendo por lo demás muy lógico el igual giro por haberse usado en todas las operaciones el mismo aparato, y ser regular que en todas las observaciones se haya cometido el mismo error, procedente de la poca apreciacion.

Cuando por el giro B′ no se sobreponga á B, hay que seguir aun la correccion. La línea poligonal habrá tomado la posicion 1, 2, 3, $\overline{B}'$ de la figura 20 (lám. 9.ª) en que $\overline{B}'$ estará algo separado de B.

Dividamos B$\overline{B}'$ en tantas partes como vértices haya, y si cada una de estas partes no iguala al error tolerado tomémoslas á la derecha ó á la izquierda de las perpendiculares bajadas desde los vértices á la línea AB, segun la posicion de B con relacion á $\overline{B}'$, desde los piés, y en el órden siguiente: desde el pié *a* de la perpendicular bajada del vértice mas próximo á A se toma una parte $a\,\overline{a}$; desde el pié de la perpendicular de 3 se toman dos $b\,\overline{b}$; desde el pié *c* de la del 4 se toman tres $c\,\overline{c}$ y así sucesivamente. Por los puntos $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, se levantan perpendiculares á la AB: $\overline{a}\,\overline{2}$, $\overline{b}\,\overline{3}$, $\overline{c}\,\overline{4}$ etc., y se unen los puntos A, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ y B, teniendo cuidado de ver siempre si la variacion de cualquier dimension, produce una diferencia mayor que el error tolerado, en cuyo caso no se puede seguir el procedimiento.

La línea poligonal corregida cierra tomando la posicion y forma A $\overline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ B.

Hay otro procedimiento, que en la fig. 21 se indica de reparticion de diferencias.

Con un radio AB′ se traza el arco B′$\overline{B}'$ el cual se divide en tantas partes iguales como vértices haya, efectuando igual division en la distancia B$\overline{B}'$. Se disminuye á la perpendicular 1 *a* desde 1, una de las partes de arco y á la distancia A*a* desde *a*, una de las divisiones de B$\overline{B}'$, y sobre $\overline{a}\,\overline{1}$ se toma la distancia de la perpendicular disminuida. Se hace en la perpendicular de 2 la disminucion de dos partes de arco, y desde su pié la de dos de distancia, tomando la longitud $\overline{b}\ \overline{2}$ igual á la perpendicular disminuida y así sucesivamente, despues de lo cual se unen los puntos A, $\overline{2}$, $\overline{3}$, y B, comprobando como es natural, si ha habido alguna variacion de ángulo mayor de 5′, ó alguna de longitud mayor en el papel de $0^m,0005$, en cuyos casos habria que repetir con mas cuidado el levantamiento.

LECCION 17.

PLANCHETA Y SU USO.

Pertenece la plancheta á la clase de los goniógrafos y podia consistir solamente en un tablero sostenido por un trípode que permitiese poner dicho tablero horizontal y una regla cuyo canto sirviera para dirigir y trazar con lapiz las visuales dirigidas á los distintos puntos, sobre un papel unido por cualquier medio á la madera, ó mejor enrollado en dos cilindros que existan en la parte inferior del citado plano horizontal, cuyo segundo sistema proporcionaria la ventaja de poder enrollar el papel que contuviese el levantamiento ya efectuado, y desarrollar el que tuviese que recibir el nuevo dibujo.

Tal sencillez en la plancheta debia producir una imperfeccion grande en las operaciones, por lo cual la que acabamos de indicar no es en realidad mas que un medio para efectuar de una manera cómoda y sobre el mismo campo, los dibujos de levantamientos hechos por medio de la brújula.

Pero para usar la plancheta como instrumento medi-

::

dor, se emplea un aparato de composicion mas complicado pero que se presta á mayor exactitud, y toma el nombre de *plancheta perfeccionada*. Las partes que constituyen su conjunto, son la *plancheta* propiamente dicha, *la alidada, la brújula, el nivel y el compás de doble escuadra*, que sucesivamente vamos á ir dando á conocer.

Plancheta.—La componen un trípode, un apoyo y el tablero, fig. 1.ª y 1.ª bis. (lám. 10). El trípode es de los mas sencillos, y en su primer período de modificacion, como en su lugar indicamos. El apoyo es una plataforma de cuatro tornillos verticales, que tienen sus tuercas en el platillo E, fijo al trípode por una pieza B y un tornillo inferior H, y sus cabezas apoyan en el platillo G superior, sosten de todo el tablero. Del centro de G sale, perpendicular á su plano un pivote *t*, terminado en una esfera, que introducida en la pieza hueca de metal *e*, completa la plataforma. El tablero se compone de una pieza plana y bien alisada de madera MN, del grueso suficiente para que la humedad y el calor no la encorven; en direccion de una de las dos dimensiones principales de dicha pieza que es rectangular, existen girando sobre los correspondientes ejes en coginetes colocados en los extremos, los cilindros ó rodillos *c* y *c'*, destinados á recibir el papel, antes y despues de efectuados los dibujos.

Lleva el MN por su parte inferior unas correderas *n* en las cuales entra un bastidor formado por piezas *m*, que á su vez son correderas, donde entra y resbala la pieza H' que es la que va unida al platillo G, y por él se une á la plataforma y trípode.

Con su tuerca fija en un saliente que en el mismo MN existe, hay un tornillo O', cuya punta empuja al introducirse al bastidor *m*, haciendo que las correderas *n* se muevan sobre él, y para imprimir el movimiento á las *n* y por consecuencia al tablero en sentido contrario, existe un muelle *p* que obra, cuando deja el tornillo de hacerlo. Para limitar el movimiento del tablero sobre los extremos del bastidor *m*, llevan las correderas *n* unos salientes *z*, lográndose así que nunca la vertical del centro de gravedad del aparato pueda caer fuera del polígono de los apoyos, lo cual destruiria la estabilidad.

En una de las correderas *n* existe otra tuerca, en la cual penetra otro tornillo O, cuya punta empuja á la pieza H, dando movimiento sobre esta pieza al bastidor *m* y á toda la parte superior de la plancheta, habiendo en el lado opuesto un muelle *r* para dar el movimiento en sentido contrario.

Por todo lo cual vemos, que el tablero tiene movimiento en dos sentidos por su plataforma, uno de rotacion alrededor del vástago de la esferilla de la misma, y dos de traslacion en sentidos perpendiculares por la parte inferior é inmediata al mismo tablero, por lo cual podemos colocarlo en la inclinacion mas conveniente para operar, que es la de horizontalidad perfecta. Los movimientos producidos por las correderas sirven para corregir la estacion, cuando no se ha establecido con completa exactitud.

Con el objeto de que el papel en que se dibuja no sufra por las dilataciones y contracciones producidas por las influencias atmosféricas, se le pega una muselina que resiste á las contracciones y se opone á las dilataciones. Se debe cuidar siempre de cubrir con otro papel el que tenga que contener el levantamiento para evitar que se ensucien las partes en que no se está dibujando.

Alidada.—La alidada es el complemento de la plancheta que sin ella no puede usarse. Podia ser una de las ordinarias de pínulas ó de anteojo, pero la que acompaña á la plancheta perfeccionada que acabamos de describir es de forma especial, y de lo mas preciso que en su clase existe. La fig. 2.ª (lám. 10.) la representa vista por sus dos lados. Forma su apoyo una regla de laton sobre la cual y mantenida á cierta distancia por medio de tornillos *t*, está una placa TV tambien metálica. Pueden variar su inclinacion con respecto á la XY los tornillos *t*, y pueden imprimirle un pequeño cambio de posicion los pequeños *r*, que tienen sus tuercas en las piezas *s*, en que los *t* entran un poco holgados. Se eleva sobre la TV, y perpendicular por construccion á su plano una columna P, en cuya parte superior existe un eje giratorio horizontal E, tambien perpendicular por construccion á un anteojo AB á quien vá unido por medio de una pieza α bien calibrada, y que se puede dividir en dos partes, permitiendo la salida de aquel, por medio de orejetas *h* en las cuales entran las clavijas *k*.

Unido al eje E, y girando con él, existe un arco metálico KZ graduado, con el cero en su punto medio. Una pieza Q, sujeta á la columna y con una raya vertical en medio, sirve por su coincidencia con el cero, para indicar la posicion horizontal del anteojo.

Como este es astronómico y en consecuencia de poco campo, existen en su parte superior dos salientes x é y, teniendo el x un pequeño orificio que sirve de ocular, y el y un marco con dos cerdas cruzadas, constituyendo el todo una pínula, por la cual se buscan los objetos antes de hacerlo con aquel.

La alidada queda de hecho convertida en *eclímetro*.

Para regularizar los movimientos del anteojo, existe en el extremo de su eje un tornillo de presion F, que aprieta una abrazadera, la que impide el movimiento á dicho eje, mientras que una varilla G, empujada en sentidos contrarios por un tornillo H y un muelle L, le puede comunicar movimientos lentos. Sobre el anteojo está situado un nivel J que sirve para hacer correcciones que no son de este lugar, y que en el suyo explicaremos.

Deben hacerse con esta alidada las rectificaciones siguientes. 1.ª La traza del plano que en su movimiento describa el anteojo debe ser la línea de fé trazada por el canto de la regla. 2.ª El eje óptico debe coincidir con el eje de figura del anteojo, ó lo que es lo mismo, dicho eje óptico debe ser perpendicular al de rotacion; y 3.ª Este eje de rotacion debe ser horizontal; cuyas tres correcciones en general se han explicado.

Nivel.—Es el que contiene el aparato de aire, y de los ordinarios, con la única diferencia de que como indica la fig. 3.ª (lám. 10) uno de sus apoyos es el mismo extremo de su tornillo de rectificacion. La de este accesorio de la plancheta, se hace del modo que tambien se explicó.

Brújula -La de declinacion que para orientar la plancheta se usa, consiste fig. 4.ª (lám. 10.) en una caja rectangular AB en cuyo fondo se eleva el pivote de la aguja, y esta, en vez de poder recorrer un limbo entero, no puede hacer mas que oscilaciones limitadas por las paredes de la caja, recorriendo dos pequeños arcos *ab* y *a' b'*, en cuyas partes medias están los extremos del diámetro 0—180, siendo este por consiguiente paralelo á los lados mayores de la caja, los cuales terminan en unas reglas metálicas bien pulimentadas, para poder trazar por ellas líneas rectas.

Compás de doble escuadra.—Está formado por tres reglas AB, BC y CD, fig. 5.ª (lám. 10) que pueden girar unas sobre otras en los puntos B y C, pero sin pasar del ángulo recto, para lo cual hay unos topes, trabajados en las mismas reglas. Las longitudes AB y DC son iguales, de manera que si sobre un plano horizontal ajustamos la regla AB, el punto A estará en la vertical del punto D y en el extremo de una plomada cuyo hilo se sujete en él.

Uso de la plancheta.—Para operar con el aparato que nos ocupa hay que colocarlo en estacion y orientarlo. Para lo primero, es necesario que el tablero sea horizontal y que el punto de estacion trazado con anterioridad en el papel, corresponda con exactitud á la misma vertical del correspondiente en el terreno. La horizontalidad se consigue por los medios indicados para poner horizontal un plano, facilitando la operacion los tornillos de la plataforma; y la colocacion de los dos puntos en una misma vertical por el compas de doble escuadra.

Se concibe la dificultad de colocar el trípode en la posicion necesaria para satisfacer á la segunda condicion, y para disminuirla y efectuar la coincidencia exacta, sirven los pequeños movimientos de traslacion por los tornillos 0, 0′ de las figs. 1 y 1 bis.

Para conseguir que la plancheta esté orientada, despues de colocados en estacion no hay mas que situar una línea bien determinada en el papel en el mismo plano vertical de su correspondiente en el terreno, para conseguir lo cual, se coloca en el punto del papel correspondiente á la estacion una aguja del mismo espesor que los trazos de lapiz que se marcan, y apoyando en ella el canto de la alidada de manera que coincida en toda su longitud con él la línea marcada, se hace girar todo el aparato hasta que por el anteojo se vea un punto lejano del terreno perteneciente á la misma alineacion, teniendo cuidado que en todo el movimiento no se salga la direccion de la plomada del compás de doble escuadra del punto estacion.

La brújula unida al aparato sirve para simplificar este procedimiento. En la primera estacion se orienta la plancheta del modo que acabamos de decir, y en la situacion en que quede, se coloca encima del tablero la caja de la pequeña brújula, y se le dán vueltas á ella sola hasta tanto que la direccion de la aguja marque el diámetro N—S ó lo que es lo mismo el 0—180, en cuyo caso, por el lado mayor de la caja que le es paralelo se traza una línea de lápiz que es la direccion de la meridiana magnética. En las otras estaciones, despues de colocar en ellas el aparato, no hay mas que ajustar el lado mayor de la caja á la línea antes marcada, y haciendo girar el tablero hasta tanto que la aguja marque el diámetro N—S, tendremos la seguridad de que la plancheta es paralela á su posicion primitiva y por consiguiente está perfectamente orientada.

Se puede operar con la plancheta por los métodos de medicion, intersecciones y radiacion.

Método de medicion.—Para seguirle, figura 6.ª (lámina 10) es necesario, como hemos dicho, tener determinados sobre el papel dos puntos tales como 1, 2 y en consecuencia la línea 1—2 que los une. Además se procura tener un punto trigonométrico ó bien determinado H, exterior ó interior que nos sirva de referencia ó comprobacion.

Se pone primeramente la plancheta en estacion en el punto 1, y se orienta con relacion al 2, dirigiendo á este la visual de la alidada y trazando por el canto de su regla la direccion 1—2 sobre el tablero. Con el objeto que el canto de la regla no se separe nunca de la estacion, se clava en ella verticalmente una aguja del mismo grueso que los trazos del lapiz, y se tiene siempre cuidado de que toque á ella dicho canto. Haciendo girar la alidada sobre el punto 1, se marca la direccion del punto H, y sobre las dos direcciones marcadas en el tablero se toman las distancias 1—H, 1—2, reducidas á escala. Se traslada la plancheta al punto 2 como estacion y se orienta, con lo cual la línea 2—1 quedará en la direccion de la correspondiente del terreno. Se pone una aguja en el punto 2 y se hace apoyar en ella el canto de la regla, haciéndola girar en seguida hasta ver los puntos 3 y luego H, cuyas direcciones 2—3, y 2—H se trazan sobre la plancheta, y se toman sus dimensiones desde 2 reducidas á escala. Teniendo ya determinado así en el papel el punto 3, se transporta á su correspondiente del terreno la plancheta, y orientándola por el movimiento de todo el tablero sobre el punto 2, ó bien por medio de la brújula, se marcan las direcciones 3—4 y 3—H, las cuales se miden, y reducidas á escala se transportan desde el punto 3, y así se va siguiendo estacionando en todos los vértices, orientando con relacion al anterior, y marcando las direcciones y distancias al siguiente y al punto de referencia. Si la operacion está bien efectuada es necesario que la direccion del lado 5—1 encontrado por la última estacion pase por el 1 de estacion primera, que la magnitud 5—1 medida en el papel sea la reduccion á escala de la 5—1 del terreno medida directamente, y que vayan á concurrir en el mismo punto del papel todas las visuales dirigidas desde los diferentes vértices al H del terreno.

Método de intersecciones.—Sea la línea 1—2 la marcada en el papel por sus puntos extremos 1 y 2 trigonométricos ó perfectamente determinados, figura 7.ª (lámina 10).

Hacemos primero estacion en el punto 1, y orientamos con relacion al 2, marcando ya en esta situacion la meridiana magnética por medio de la brújula. Colocamos una aguja en el punto 1 del tablero, y haciendo girar la alidada sola, de manera que su canto apoye siempre en dicha aguja, se van dirigiendo visuales á todos los vértices, cuyas direcciones se trazan.

Se traslada la plancheta al punto 2 como estacion y se orienta con relacion á 1 ó por medio de la brújula, haciendo las mismas observaciones y dibujo que en el caso anterior, resultando ya así determinado cada vértice por la interseccion de dos rectas, y uniendo cada uno con los inmediatos queda formado el dibujo de la línea poligonal que deseabamos representar.

En caso de que se quiera una comprobacion de la bondad de los procedimientos seguidos, se elige en la línea 1—2 otro punto bien determinado, que puede ser el medio, y colocando el aparato en estacion en él y haciendo las operaciones que acabamos de indicar es necesario, que las visuales dirigidas á los vértices pasen por el mismo punto en que se han cortado las dirigidas desde los 1 y 2.

Método de radiacion.—En él se hace estacion en un punto único tal como 0 de la fig. 8.ª (lám. 10) que puede estar dentro de la línea poligonal, fuera de ella ó en su contorno, siendo necesario en cualquiera de los casos que dicho punto sea trigonométrico ó bien determinado de posicion. Se orienta la plancheta con relacion á la meridiana magnética que se traza, y se van dirigiendo con la alidada apoyada en el punto de estacion, visuales á todos los vértices, y se marcan sus direcciones.

Midiendo despues las distancias que existen entre la estacion y dichos vértices, y trasladándolas reducidas á escala sobre las direcciones correspondientes á contar de la estacion, sus extremos nos indicarán las representaciones de los vértices de la línea poligonal, los cuales unidos por rectas, nos darán la línea misma.

Consideraciones sobre el empleo de la plancheta.—Aunque es indiscutible el que la plancheta proporciona grandes ventajas, estas no son tantas como las que ofrece la brújula para operar en terrenos accidentados. Verdad es que con la plancheta se puede levantar una vereda, un desfiladero etc. por el método de medicion, ó una plazoleta, un islote ó la meseta de una montaña por los de intersecciones y radiacion, pero no es menos cierto, que la mayor dimension y uso más incómodo de ella, la facilidad con que las ramas pueden desgarrar el papel, la no menor de que se moje la hoja por la humedad natural del terreno, por la lluvia ó por la parte de agua que haya quedado en los árboles y se desprenda al sacudirlos, son inconvenientes graves y dignos siempre de ser tomados en consideracion.

Júntase á esto, el que la hoja que sirve para obtener el dibujo ha estado expuesta á los efectos de la atmósfera, y ha sufrido á causa de ello dilataciones y contracciones, mientras las que en el gabinete reciben las copias no están sujetas á semejantes causas.

Existe todavía un inconveniente mayor aun, y es la dificultad en que se está de comprobar las operaciones hechas.

En efecto, careciendo estas por su modo especial de ser, de croquis y de registro, se encuentra el que las ejecuta en la imposibilidad de analizar los datos encontrados, de investigar los errores y de reducirlos á su menor valor. El único medio de comprobacion que hay, es volver á efectuar todas las operaciones, con lo cual perderia la plancheta su principal ventaja que es la rápidez.

Dando desde luego el levantamiento con la plancheta una figura en el papel semejante á la del terreno, puede servir para establecer una alineacion entre dos puntos invisibles, y para medir la distancia que entre ellos exista.

Sean los dos puntos A y B, separados por un obstáculo cualquiera que impida su vision recíproca, fig. 9.ª (lám. 10).

Colóquese la plancheta en A y orientémosla con relacion á un punto *a* elegido arbitrariamente fuera del obstáculo. Se marca la direccion A*a* y desde A en el papel, se toma la distancia A*a* reducida á escala. Se traslada la estacion á *a* y se orienta con relacion á A, marcando la direccion de la visual dirigida desde *a* á otro punto *b* tambien elegido arbitrariamente; se continúa levantando la línea poligonal auxiliar que vamos estableciendo, hasta que de uno de sus vértices se vea el punto B que por el mismo procedimiento se marca en el papel. Si colocamos una aguja en A y otra en B del papel, la alineacion que por ellas se marque será la que vá de A á B en el terreno.

En cuanto á su distancia, se obtiene midiendo con un compás la AB del papel, y viendo en la escala lo que en el terreno le corresponde.

El procedimiento se simplifica mucho, cuando exista un punto tal como el C de la figura 10, desde el cual se vean los dos A y B, pues no hay que hacer mas que dos estaciones.

En cuanto á su distancia, se obtiene midiendo con un compás la del papel, y viendo en la escala lo que en el terreno le corresponde.

El procedimiento se simplifica mucho, cuando exista un punto tal como el C de la figura 10, desde el cual se vean los dos A y B, pues no hay que hacer mas que dos estaciones.

LECCION 18.

INSTRUMENTOS DE REFLEXION.

Además de los goniómetros de detalle que acabamos de describir, existen otros fundados en las propiedades que en su reflexion presenta la luz.

Son estas propiedades: 1.ª Que la luz al chocar en una superficie pulimentada forma un ángulo de incidencia igual al de reflexion. 2.ª El ángulo incidente y el reflejado están en un mismo plano, que es perpendicular á la superficie reflejante. Y 3.ª Que si sobre un espejo incide un rayo de luz, y el rayo reflejado choca en otro espejo, el ángulo que forma el doblemente reflejado con el de la primera incidencia, es doble del que entre sí forman los espejos.

Las dos primeras quedaron demostradas en el estudio de la Física, debiendo solo ocuparnos de la demostracion de la tercera.

Sean para ello M y N los dos espejos fig. 11 (lám. 10), B el punto de donde parte el rayo luminoso que despues de formar sobre N ángulos de incidencia y reflexion α, choca sobre M, formando los β, saliendo despues en la direccion de B'.

Prolonguemos las normales trazadas en M y N hasta el punto H de su concurrencia, y tendremos que $O=O'$ por tener sus lados perpendiculares, siendo al mismo tiempo $O'=\alpha+\beta$.

Tambien en el triángulo MNH' se verifica que $x=2\alpha+2\beta=2O'=2O$ que es lo que deseabamos demostrar.

Cuando los espejos esten en la disposicion de la figura 12 (lámina 10), efectuando la misma construccion tenemos que en el triángulo MNH se verifica $\alpha=O'+\beta=O+\beta$, y en el MH'N, $2\alpha=x+2\beta$; $\alpha=\frac{x}{2}+\beta=O+\beta$; de donde $O=\frac{x}{2}$ ó $x=2O$, cuyo resultado es igual al anteriormente obtenido.

En el caso particular de que los espejos sean paralelos, el ángulo formado por los rayos incidente y doblemente reflejado, debe ser tambien cero, es decir, que dichos rayos deben ser paralelos, como nos demuestra la figura 13 (lámina 10), puesto que las normales lo son y los ángulos α y β son iguales por alternos internos.

Demostradas yá las propiedades fundamentales, pasamos á ocuparnos de los aparatos en que tienen aplicacion.

Sestante.— Este aparato, completamente representado en la fig. 14 (lám. 10), y en esqueleto en la 15, se compone de un sector circular metálico, cuyo arco es de sesenta grados, pero cuyas divisiones son de medio en medio grado, y están numeradas como si fueran grados enteros.

Una alidada MT provista de su correspondiente nonio T, tiene perpendicular á su plano y en su misma direccion un espejo tambien plano M, que se mueve con ella y está colocado sobre el centro del limbo. La alidada puede tener movimientos rápidos y lentos, comunicándosele los primeros con la mano, y los segundos por un tornillo de coincidencia x unido á uno de presion colocado en la parte inferior del aparato.

En una de las varillas rígidas que ocupan el lugar de radios límites en el sector, está colocado un espejo N, mitad claro y mitad azogado, cuya direccoin es paralela al otro radio Q. En el extremo de este está el cero de la graduacion, y en posicion conveniente y tambien sobre el radio Q, está sostenido un anteojo astronómico H por medio de abrazaderas z, cuya altura sobre el limbo se puede variar, sin que deje el eje óptico de ser paralelo á dicho limbo, por medio de un piñon que engrana en la cremallera que en su parte inferior termina las indicadas abrazaderas.

Con el objeto de evitar la llegada al ojo del observador de un número excesivo de rayos de luz blanca que pudieran dañarle, existen en r y en s vidrios de colores, sujetos á pequeñas armaduras que giran á charnela sobre el radio P.

::

En la parte inferior del aparato existe un mango L que sirve para asirlo en el momento de la observacion.

Antes de medir los ángulos con este aparato, tenemos que efectuar las verificaciones siguientes:

1.ª *El espejo M debe ser perpendicular al plano del limbo.*—Esta verificacion puede efectuarse de dos maneras. Consiste la primera en llevar la alidada á la parte media del limbo, y colocar en seguida el instrumento de modo que parte de dicho limbo se vea por reflexion y parte directamente, debiendo aparecer las dos en prolongacion perfecta la una de la otra.

La segunda manera de comprobar la perpendicularidad del espejo M, consiste en hacer uso de dos cubos de madera ó metal, perfectamente construidos, los cuales se sitúan en frente del espejo sobre el plano del limbo, siendo necesario que las aristas del uno vistas por reflexion, sean exactamente paralelas á las del otro vistas directamente; lo que nos demostrará que el espejo es paralelo á ellas, y por consecuencia perpendicular al limbo.

En el caso de que la verificacion de que nos ocupamos, indicase falta de perpendicularidad, se conseguiría esta por movimientos de los pequeños tornillos que fijan el espejo á la alidada.

2.ª *Cuando el cero del nonio coincide con el del limbo, los espejos* M y N *deben ser paralelos.*—Se observa un astro ú otro objeto lejano, siendo necesario que el punto visto directamente coincida con su imágen doblemente reflejada, cuya operacion está fundada en lo que hemos explicado, concerniente al paralelismo entre el rayo incidente y el doblemente reflejado, cuando los espejos en que chocan son paralelos.

La pequeña distancia que media entre las partes del aparato, comparada con la grande á que se encuentra el objeto observado, convierten el paralelismo en coincidencia casi perfecta.

Caso de notarse defecto en el paralelismo, se corrige por medio de llaves que se introducen en tornillos que están por la parte inferior, y pueden mover los espejos sin hacerles perder su perpendicularidad con el limbo.

3.ª *El eje óptico del anteojo debe ser constantemente paralelo al plano del limbo, toda vez que la forma del aparato nos indica ya que la medicion de ángulos tiene que tener lugar en el plano de los objetos.*—Se hace esta rectificacion de igual manera y con el mismo anteojo de prueba que en el círculo repetidor explicamos, mirando con los dos anteojos á un mismo punto, despues de corregir el de prueba por medio de los tornillos de su retícula, si se nota que el eje óptico no coincide con la línea central de sus apoyos cúbicos, para lo que se le apoya sucesivamente en las cuatro caras de los cubos. Si en esta disposicion se nota por el de prueba que el del aparato tiene su eje óptico inclinado con relacion al limbo, se le corrige tambien por los tornillos de su retícula, si los tiene.

En caso necesario, pueden servir para efectuar esta verificacion los apoyos solos del anteojo de prueba, dirigiendo las visuales rasantes á sus caras superiores.

Medida con el sestante de los ángulos en el plano de los objetos.—Se coje el aparato con la mano derecha, procurando poner su limbo en el plano de los objetos, y se dirige en seguida todo el sistema con dicha mano á la posicion necesaria para ver directamente con el anteojo y parte clara del espejo, figs. 14 y 15 el objeto de la izquierda B, moviendo en seguida la alidada con la mano izquierda, hasta tanto que la imágen del A reflejada por el espejo M y despues por la parte azogada del N venga á coincidir con el B. Entonces la direccion OB se puede considerar como la del rayo doblemente reflejado y el AM como el incidente, siendo el ángulo que formen los dos AOB, que es el de los objetos con la estacion, doble del formado por los espejos, ó lo que es lo mismo, doble del igual al anterior TMQ medido por el número de grados que el cero del nonio se haya separado del del limbo. Ahora bien, como en este se han numerado como grados enteros los medios grados, el número de ellos que nos indique el cero del nonio será el verdadero del ángulo de los objetos.

La operacion es igual sean dos objetos de la tierra los que se observen, sean uno de la tierra y un astro, ó sean dos astros.

El sestante tiene su especial y principal uso en la medida de la altura á que el sol y demás astros están sobre el horizonte de las aguas. Para hacer en el mar esta observacion, se empieza por colocar el plano del limbo en el vertical del astro. Se dirige seguidamente el anteojo por la parte clara del espejo N á la línea límite del horizonte visual, moviendo despues la alidada hasta tanto que la imágen del astro doblemente reflejada, venga á enrasar tambien con el horizonte en cuyo caso el cero del nonio nos indicará por la division del limbo que con él coincide la deseada altura.

Para adquirir el que opera el convencimiento de que dicho enrase de la imágen con el horizonte es perfecto, no hay mas que hacer oscilar el sestante en cuyo caso, aquella describe una curva que debe tocar tangencialmente al límite del horizonte.

En el caso en que la altura deba determinarse en puntos desde los cuales el mar no sea visible, ó aunque lo sea está á muy diferente altura su superficie del observador, hay que valerse de un *horizonte artificial* el cual consiste en un espejo metálico, azabache ó vidrio ennegrecido AB fig. 16 (lám. 10) sostenido por tres tornillos t, t', t'', cuyas puntas le sirven de apoyos, el cual espejo se pone horizontal por medio de dichos tornillos y de un nivel de aire formado por una ampolleta M planificada por su parte inferior, que apoya en el limbo AB.

Como las imágenes de los objetos obtenidas por la reflexion en un espejo horizontal, están en la vertical de los mismos objetos y á igual distancia que ellos del espejo, si medimos el ángulo que forme un objeto con su imágen obtenida sobre el horizonte artificial, tendremos un valor doble del de altura.

Esta es la operacion que se efectúa fig. 17 (lám. 10). Poniendo en el terreno y sobre su caja al horizonte artificial, se dirige la visual á la imágen obtenida sobre dicho horizonte, y haciendo girar la alidada hasta que venga á concurrir dicha imágen con la del astro, obtenida por la doble reflexion en los espejos del aparato, el valor que en esta situacion esté coincidiendo con el cero del nonio, dividido por 2, nos dará el ángulo de verdadera altura.

Sestante de bolsillo.—Con el objeto de hacer más cómodo el uso y trasporte del sestante, se han reducido sus dimensiones encerrándole además en una caja cilíndrica que tiene su correspondiente tapa *t*, la cual atornillada en el momento de la observacion á la base inferior del aparato, le sirve de mango; fig. 18 (lám. 10).

El aparato es exactamente el mismo con la variacion de estar el espejo M en la parte inferior de la alidada AB en vez de estar en la superior, deslizándose esta alidada sobre el limbo que tambien está en la parte superior de la envuelta cilíndrica. Tiene esta una gran abertura PQ en su superficie lateral, para poder efectuar las observaciones, y el ocular del anteojo sale por otra abertura practicada en O, en la cual se introduce todo al concluir las observaciones. Existe en este como en el sestante grande una varilla giratoria con un microscopio para facilitar las observaciones. El uso, verificaciones etc. son las que hemos explicado, y el movimiento de la alidada se obtiene por un boton *r* situado en la parte superior.

Sestante gráfico.—Existe otro instrumento, que aunque muy imperfecto vamos á citar por la facilidad de su construccion.

Es este el *sestante gráfico* que pertenece á la clase de los goniógrafos. Se compone fig. 1.ª (lám. 11) de tres reglas MC, MD y DC que en M y C pueden girar unas sobre otras por medio de unas charnelas. La DM tiene una ranura en toda su longitud, en la cual entra la garganta de un boton, que fijo en D, de la recta CD, puede resbalar sobre la DM. Perpendicularmente á esta en su punto M hay un espejo, y otro, perpendicular á la MC, está colocado en el punto N de su prolongacion. Las longitudes DC y CM son constantemente iguales. Si se dirige una visual al traves del espejo N que es mitad claro y mitad azogado, á un objeto tal como B, situado en la direccion MB, y seguidamente se varía la posicion de las reglas DM y CD, hasta que la imágen de otro punto A venga á coincidir con él directamente observado, el ángulo DCB que se trace con lápiz sobre las reglas CD y CB será el que formen los A y B con el punto de estacion, por ser en este caso $DCB=2\alpha$; $AMB=2\alpha$, luego $DCB=AMB$.

Fundados en los mismos principios de la reflexion de la luz existen multitud de aparatos, pero en la imposibilidad de darlos á conocer á todos, atendida la índole de este trabajo, nos limitaremos á hacerlo de la *escuadra de reflexion* y la *brújula de Kater*.

Escuadra de reflexion.—Tienen por objeto formar ángulos determinados sobre direcciones dadas. Se compone de dos espejos encerrados en un estuche metálico con varias aberturas que permiten dirigir las visuales en direccion conveniente.

Como por lo que vamos á decir, el ángulo de los espejos es siempre mitad del que sobre la direccion dada se forme y los ángulos que con mas frecuencia ocurre formar son los de 90, 180 y 60°, los de los espejos suelen ser siempre de 45, 90 ó 30.

Sirven las primeras para trazar perpendiculares, y las segundas para prolongar alineaciones ya marcadas.

En la fig. 2.ª (lám. 11) hemos presentado la forma que es comun á todas, salvo la dimension del ángulo.

Un prisma triangular cuyo diedro de arista Z es del valor del ángulo que se desea formen los espejos, está hueco, y tiene adosados á la parte interior de sus caras los M y M′ que es conveniente sean metálicos para evitar la aparicion de imágenes múltiplas. En las mismas caras del prisma y sobre los espejos, existen aberturas ó ventanas N, N′, que sirven para dirigir las visuales directas. La cara del prisma opuesta al diedro Z, se ha suprimido con el objeto de proporcionar mayor comodidad en el empleo del aparato, cuya parte inferior la constituye un mango R por donde se sujeta en el momento de la observacion. Generalmente la arista Z se sustituye por una superficie cilíndrica.

Ocupémonos ahora del uso de las escuadras, suponiendo primeramente que nos servimos de la de 45° para trazar perpendiculares, fig. 3.ª (lám. 11).

Consideremos que es el punto A, de la recta RS, aquel en donde deseamos levantar una perpendicular á dicha recta.

Pongámonos en estacion en A y por la ventanilla N de la derecha, dirijamos una visual en la direccion de la alineacion, mientras que un peon provisto de una banderola, recorre el terreno inmediato, hasta colocarse en un punto tal como B, que por doble reflexion se confunda con la visual dirigida, en cuyo caso B es un punto de la perpendicular porque se verifica $NAB = 2\alpha = 90°$, en virtud de la propiedad fundamental.

Si por el contrario quisiésemos desde un punto B del terreno bajar una perpendicular á la direccion RS, marchariamos por ella, observando siempre directamente dicha direccion hasta llegar á un punto tal como A, en el cual se vea al B doblemente reflejado confundirse con la visual RS, en cuyo caso el punto A es el pié de la perpendicular.

Sirvámonos ahora de la escuadra de ángulo recto para prolongar una alineacion, fig. 4.ª (lám. 11).

Sea RS la alineacion que deseamos prolongar. Se coloca el que efectúa la observacion en el extremo R y dirige por la ventanilla de la izquierda la visual directa RS en sentido de la alineacion, mientras un peon recorriendo el terreno inmediato llega á colocarse en P cuya imágen doblemente reflejada coincide con dicha visual, en cuyo caso P se puede tomar como de la alineacion. Es verdad que se comete un error igual á MN, pero este es despreciable, si se tiene en cuenta la pequeña dimension del aparato, y si el peon se aleja lo mas posible de él.

Algunas veces los espejos suelen encerrarse en una envuelta cilíndrica, en la cual existe una gran abertura para recibir los rayos luminosos que provienen de los objetos del terreno, y una pequeña ranura que sirve de ocular al dirigir las visuales.

::

Otras contienen en un mismo estuche cilíndrico ó de forma prismática, dos y hasta tres pares de espejos formando ángulos distintos que suelen ser de 90, 45 y 30°; pero si bien es verdad que entonces un mismo instrumento puede servirnos para tres distintos objetos, no lo es menos que se puede introducir confusion en las observaciones, tal vez errores graves en ellas, y de fijo complicacion en un aparato tan sencillo y útil.

Escuadra de prismas.—Hay además otra escuadra de reflexion que consiste en dos prismas rectangulares iguales, cuya cara opuesta al ángulo recto está azogada, y la disposicion de los prismas como indica la figura 5.ª (lámina 11), colocados el uno encima del otro, y representado por línea seguida el superior y por trazos el inferior. Considerando uno de ellos aisladamente, el superior por ejemplo, un observador colocado en *b* y en sentido de una alineacion *b*, puede fijar la posicion de un punto B′, situado en su perpendicular elevada en el de estacion, puesto que el rayo *b* entra normalmente por la cara inferior, choca bajo un ángulo de 45°, y reflejado bajo el mismo sale en direccion del B′, siendo el rayo *m*B′ perpendicular al *bm*, puesto que sale tambien sin refraccion por la cara de la derecha.

Considerando ambos prismas á la vez, se puede marcar una alineacion con solo este aparato. Se coloca para ello el que quiera hacer la operacion en un punto tal como *b*, y fija por el prisma superior uno B′, y por el inferior el otro B, y estos dos, el en que se encuentra el aparato, y los demás que se coloquen en direccion de m'B$'$ y de mB estarán en una misma línea recta, en razon á la insignificante distancia que entre m y m' existe.

La verificacion que con todas las escuadras se debe hacer, es medir con otro goniómetro el ángulo ya trazado, y en caso que haya error en la escuadra se corrige esta por pequeños movimientos de los espejos producidos por tornillos que están colocados detrás de dichos espejos, y apoyan en ellos.

Brújula de Kater.—Cuando las observaciones que con la brújula se efectúen no necesiten gran precision en sus resultados puede hacerse uso de la brújula de *Kater*. Es esta una modificacion de la ordinaria, de la cual la diferencia el tener un prisma reflector, y de distinto modo colocados sus accesorios como á continuacion vamos á explicar.

Contiene el aparato una caja cilíndrica de laton AB fig. 6.ª (lám. 11) del centro de cuyo fondo se eleva el pivote O que sostiene la aguja mn. A los extremos de esta vá adherido un limbo muy ligero y bien equilibrado, para lo cual las puntas de la aguja deben corresponder á los extremos de un diámetro. En el punto del limbo correspondiente á la punta S de la aguja está marcado el cero, y la graduacion en el sentido contrario al de las rotaciones directas, es decir, de derecha á izquierda; escusado es advertir que el limbo se mueve con la aguja. En la caja y en los extremos de un mismo diámetro existen unas pínulas de la forma representada en C y D de la figura. Una de ellas, la C, tiene una cerda que divide al marco C en dos mitades, y la D que es la que siempre sirve de ocular es mas baja y se compone de la plancha metálica D la cual tiene una ranura, y de un prisma E acromático, adosado á ella, cuyo objeto es hacer aparecer verticales y amplificadas las graduaciones del limbo. La C tiene unas pequeñas palomillas para colocar en caso necesario un espejo F, giratorio alrededor de un eje horizontal. Está destinado este espejo á medir los ángulos, cuando el objeto á que se mira está muy alto ó excesivamente bajo, en cuyos casos se observan las imágenes producidas en el F en vez de observar los objetos, pues unos y otras están en un mismo plano vertical.

Por medio de la brújula tal como la acabamos de describir, al dirigir las visuales por las pínulas, se vé la cerda, y en prolongacion de ella, y muy aumentada, la graduacion correspondiente al ángulo que se mide.

Su uso es sencillísimo, pues en cada estacion los azimut se encuentran con solo dirigir por la cerda y ranura la visual al punto dado, y observar la graduacion que aparece debajo de dicha cerda, la que nos espresa el valor del ángulo pedido.

El que aquí se mide, con solo tomar en consideracion la manera como se ha graduado el aparato, se conoce que es el comprendido desde la punta S hácia la derecha hasta la visual, que es igual por opuesto en el vértice al de la punta N á la izquierda, que con las otras brújulas medíamos.

LECCION 19.

ESTADIAS.

Llámanse *estadias* á los aparatos que sirven para dar á conocer la distancia que entre dos puntos existe, por medio de una sola observacion.

En su primer orígen, consistió la estadia en un tubo cilíndrico ó tronco cónico AB fig. 7.ª (lám. 11) cuyo extremo B estaba abierto, y cerrado el A con solo un pequeño orificio en la parte central de su superficie, el cual sirve de ocular. A cierta distancia de este, existía un aparato reticular, que se componia de dos puntas metálicas muy finas, que partiendo de los extremos del mismo diámetro de una seccion principal del tubo, tenian igual direccion, y se mantenian con la separacion constante ab. Es accesorio necesario al aparato un liston PN, convenientemente graduado.

Para averiguar con este aparato la distancia $MN=OR$ que media entre dos puntos M y N, se coloca el ocular en la vertical del M y se dirigen visuales que rasando las dos puntas, se prolonguen hasta cortar al liston, colocado verticalmente en N, en dos puntos cualquiera P y Q. Los triángulos semejantes oab y oPQ nos dán $\frac{or}{ab} = \frac{oR}{PQ}$; y si hacemos las suposiciones $or = d$; $ab = s$; y $oR = D$ tendremos $\frac{d}{s} = \frac{D}{PQ}$; $D = \frac{d}{s} . PQ$. d y s son constantes y pertenecen al aparato, en el cual muchas veces se encuentra escrito el valor $\frac{d}{s}$, y como el peon que lleva el liston, ha podido marcar en él, siguiendo las indicaciones del que observa, los puntos P y Q, PQ estará tambien determinada y en consecuencia D.

Con el objeto de evitar los errores que la medicion directa de las pequeñas cantidades d y s pudieran producir, á causa de sus cortas dimensiones, se ha ideado el medio de evitar esta medicion, simplificando además el procedimiento, y permitiendo al que observa conocer el resultado de su observacion desde el sitio en que se encuentra y sin necesidad de auxilio alguno por parte del encargado de llevar el liston.

Para el objeto, se mide con toda detencion y en terreno horizontal una distancia de 100^m, MN, figura 8.ª (lámina 11), y al extremo N de ella se coloca verticalmente el liston, mientras el observador se sitúa en estacion en M, teniendo por lo antes expresado $\frac{100^m}{AB} = \frac{or}{ab}$; se marcan los puntos A y B y se divide el intérvalo AB en cien partes, cuya magnitud supongo resulte α, siendo en consecuencia $AB = 100\alpha$ y $\frac{100^m}{100\alpha} = \frac{d}{s}$; $1^m = \frac{d}{s}\alpha$;

á otra distancia cualquiera MP, será $\frac{d}{s} = \frac{MP}{\overline{AB}}$. Suponiendo que por la parte superior del punto A y por la inferior del B, se ha continuado la division del liston en partes α, y que entre $\overline{A}$ y $\overline{B}$ hay comprendidas un número n de ellas, tendremos que $\overline{AB} = n\alpha$ y $MP = \frac{d}{s}n\alpha$, y como $\frac{d}{s}\alpha = 1^m$; $MP = n^m$; lo que nos dice que el número de metros que la distancia contenga, será igual al de divisiones α comprendidas entre las dos visuales. Estando la numeracion suficientemente clara, el observador puede contar el número de divisiones, y conocer en consecuencia por sí solo la distancia.

Cuando por cualquier causa se hubiesen separado ó acercado las puntas, habrá que graduar de nuevo el liston.

Posteriormente, á la estadia que acabamos de citar se la han sustituido por dos cerdas las puntas, dando así mayor holgura á las visuales.

Fácil es comprender que el aparato de que nos acabamos de ocupar, carece de todas las condiciones que en la práctica son necesarias, pues fundándose las observaciones en el alcance de la vista del observador y en la magnitud de las divisiones del liston, seria necesario que aquella fuese muy buena y estas muy grandes, para poder operar á una distancia algo considerable.

Tratóse de evitar dicho inconveniente colocando las cerdas ó las puntas en la retícula de un anteojo, que daba amplificada la parte de liston comprendida entre las visuales, y limitados los extremos de esta amplificacion por las puntas ó cerdas tambien amplificadas por el ocular.

Se creyó al principio que este instrumento seria de gran precision , pero la práctica se encargó de destruir tal creencia. Los resultados obtenidos eran erroneos, y al tratar de corregirlos se notó, que los triángulos semejantes que se formaban por las visuales, la separacion entre las cerdas y el espacio interceptado del liston, no tenian su vértice comun en el ocular del aparato como antes sucedió, sinó en el objetivo, y en consecuencia se supuso que trasladando á la estacion la vertical de dicho objetivo, se habia llegado á la deseada perfeccion.

Tampoco por este medio se obtuvo exactitud en las mediciones, siendo fácil comprender el motivo. En la teoría espuesta, se ha considerado constante la posicion de las puntas con respecto á las demas partes del aparato, cualquiera que fuese la distancia observada, y esta suposicion está en contra del modo de ser, y teoría de los anteojos.

Variando la distancia á que con ellos se observa un objeto, varía tambien la que media al objetivo y en consecuencia al ocular, desde donde su imágen se forma, y como tenemos que mover la retícula lo necesario para que dicha imágen coincida con ella, variamos su distancia al punto de observacion y por consiguiente el dato d, que se habia supuesto constante. Verdad es que se han determinado las correcciones que hay que hacer en el valor encontrado para convertirle en el verdadero, pero la complicacion que esto introduce en el uso, y el poco que tiene este aparato tal como lo hemos descrito, podia hacernos prescindir de mencionar la citada correccion.

Sin embargo por la especial índole de este escrito vamos á explicarla.

Considerando siempre la fig. 8.ª (lám. 11) tenemos, representando MN por D y AB por A, lo mismo que por D′ y A′ las MP y $\overline{AB}$ tendremos las dos ecuaciones

$\frac{d}{s} = \frac{D}{A}$; $\frac{d'}{s} = \frac{D'}{A'}$, en el supuesto de que la separacion ab sea constante, y representando por d' la distancia á que se coloca del que observa el retículo en su segunda posicion. Dividiendo miembro á miembro dichas dos igualdades, tendremos $\frac{d}{d'} = \frac{DA'}{D'A}$, de donde

$$D' = \frac{D}{A} . A' . \frac{d'}{d}.$$

Cuando la distancia d permanecía invariable, podiamos establecer $D' = \frac{D}{A} A'$. de manera que el error que por dicha variacion se ha producido, está representado

::

por $e=\frac{D}{A}A'.\frac{d'}{d}-\frac{D}{A}A'=\frac{D}{A}A'\left(\frac{d'-d}{d}\right)$

Cuyo resultado expresa que la correccion es igual *á la distancia, calculada bajo el supuesto de invariabilidad del foco conjugado, multiplicada por la relacion que existe entre la variacion focal y la longitud focal primitiva.*

Esta correccion será positiva ó negativa segun que la distancia al liston disminuya ó aumente.

Es necesario advertir que el movimiento que se dé al tubo que contenga al ocular y á la retícula, para ver á dicho liston claramente, no influye para nada en las observaciones, siendo solo la causa de los errores, el que se imprima á la retícula sola con relacion al ocular.

Porro, oficial de Ingenieros Militares Italiano, trató de modificar la construccion de los anteojos, de una manera tal, que quedase corregida la influencia de la variacion de la distancia focal conjugada.

Los anteojos modificados, conocidos con el nombre de *stereogónicos* ó *analáticos*, se distinguen de los ordinarios, especialmente por el aumento de una lente interior.

El objetivo M es acromático, y P es una lente plano convexa, cuyo foco está en el centro óptico del objetivo figura 9.ª (lámina 11) El objetivo M y la lente P están unidos invariablemente en un tubo B, llamándose á este conjunto *sistema objetivo*. El diafragma reticular R puede moverse longitudinalmente sobre el sistema objetivo, y el ocular que es de *Ramsden*, está compuesto de lentes plano-convexas O y *p*, y su sistema puede ponerse en movimiento sobre el tubo reticular, y los dos juntos sobre el objetivo.

En esta disposicion, considerando la lente P, en cuyo foco M se cruzan todos los rayos luminosos, saldrán despues de refractados paralelos al eje del aparato, y existiendo este paralelismo en toda la longitud del tubo reticular, deducimos que el ángulo emergente del objetivo es constante á pesar de la variacion de distancia focal.

La gran aproximacion de los anteojos analáticos, depende de la perfeccion con que se construyen. El *aumento* en los menores es 40.

Un anteojo de esta clase sería muy conveniente en la brújula y en la plancheta, pues evitando la medicion de distancias, acortaría mucho las operaciones.

En la segunda, sería aun de mayor ventaja, porque aumentaría el peso de la parte superior, disminuyendo de este modo el movimiento que en el tablero es inevitable.

El ser las distancias que con la estadia se miden las que exigen poca precision, no suele nunca ser necesaria la reduccion de las medidas al horizonte, por lo cual lo omitimos.

Estadias de ángulo variable.—En los aparatos de que nos acabamos de ocupar, se ha tratado de hacer constante el ángulo bajo el cual se ven los objetos, siendo estos en el momento de hacer la observacion de magnitud desconocida, y variable para cada una de aquellas.

Existen otros instrumentos destinados al mismo fin, pero con los cuales se miran en todas las observaciones objetos de magnitud conocida. Comprèndese que esta condicion implica la variacion del ángulo bajo el cual se les mira á diferentes distancias.

Hay que hacer variar de posicion ó de forma al retículo, para que las visuales dirigidas á los extremos del objeto pasen por las puntas ó por las cerdas.

Facilita este movimiento la forma del aparato y se acostumbra á no hacer á la vez las dos operaciones para disminuir la dificultad.

Supongamos primeramente, fig. 10 (lám. 11), que se varía de forma al retículo, acercando ó alejando las cerdas unas de otras, segun lo requiera la observacion. Sea A el objeto que se observa á distintas distancias D, D′ D″..., verificándose entonces

$$\frac{d}{s} = \frac{D}{A}, \frac{d}{s'} = \frac{D'}{A}, \frac{d}{s''} = \frac{D''}{A}........,$$

en las que representando por d la distancia constante del ocular al retículo, llamamos s, s', s''......, las separaciones que en cada caso existen entre las cerdas. Dedúcense de las igualdades anteriores

$$\frac{D}{D'} = \frac{s'}{s}; \frac{D}{D''} = \frac{s''}{s}.........,$$

lo que nos indica, *que las distancias á que se mira un objeto de constante magnitud, están en razon inversa de la separacion de las cerdas del retículo, en las correspondientes observaciones.*

Considerêmos ahora constantes esta separacion, y variemos cada vez lo necesario la posicion del retículo, con respecto al ocular. Tendremos entonces, figura 11 (lám. 11).

$\frac{d}{s} = \frac{D}{A}$; $\frac{d'}{s} = \frac{D'}{A}$; $\frac{d''}{s} = \frac{D''}{A}$......., habiendo representado por d, d', d''..... las distancias á que del ocular se encontraba el retículo. De aquí resulta

$\frac{d}{d'} = \frac{D}{D'}$, $\frac{D}{D''} = \frac{d}{d''}$......., *lo que nos indica que las distancias que existen, á un objeto de constante magnitud, en dos posiciones de este cualesquiera, están en razon directa de las que median entre el ocular y el retículo en cada observacion.*

Tambien deducimos de lo anterior $nD = \frac{d}{s} A.n$, que nos dice, que la distancia á que se encuentra un objeto n veces mayor que el primitivo, es n veces mayor que la que dá el instrumento para el primer objeto visto dentro del mismo ángulo.

El uso de las estadias es de indisputable ventaja para todos los oficiales en general y para los de Artillería especialmente. La precision del tiro, dependiendo principalmente del conocimiento de la distancia de la pieza al blanco, y no siendo posible su medicion directa, viene la estadia á ser un precioso auxiliar.

Varias estadias se han construido con el destino que acabamos de mencionar, y de todas ellas citaremos algunas que por su sencillez son usadas entre nosotros, dejando para la siguiente leccion el dar algunas nociones de los aparatos de moderna construccion, cuyo uso aun no se ha generalizado.

Estadia vertical.—Es esta, fig. 12 (lám. 11) una placa rectangular de metal, madera ó carton duro en la cual se efectúa una graduacion diferente, segun el objeto que tenga que ser observado. Generalmente es este un soldado de infantería cuya altura media es de $1^m,750$, ó uno de caballería, á caballo, que tiene por altura media $2^m,600$.

La graduacion se empieza desde el vértice *a*, colocando, á contar de él los valores de *s* deducidos de la ecuacion $\frac{d}{s} = \frac{D}{A}$ en la cual $A = 1^m,750$ ó $2^m,600$, *d* es la distancia á que el retículo está del que observa, y como ahora nos servirá de retículo el canto de la estadia, se puede fijar dicha distancia por un cordon, que atado á ella por un orificio que en la parte inferior existe, tiene la longitud suficiente para que completamente estirado, se sujete en el hombro por el otro extremo. Atendiendo á esto se suele hacer $d = 0,65$, siendo esta la longitud del cordon.

Conocidos A, *d*, y la distancia D, que es á la que en cada caso, se coloca el objeto observado al hacer la graduacion, se ván encontrando las longitudes de *s* que se trasladan con perfeccion al canto de la placa, poniendo al lado de cada division, no el valor de *s*, sino el de D que ha servido para encontrarlo.

Dispuesto de este modo el aparato, para usarlo, se coge por su parte superior con la mano derecha, procurando que su plano sea vertical, y sujetando con la mano izquierda al hombro derecho el extremo del cordon, que la mano que sostiene la estadia se encarga de mantener horizontal.

Se dirige en esta disposicion una visual que pase por el punto *a* y el extremo del objeto, y se vá corriendo la uña del dedo pulgar de la mano derecha hasta tanto que otra visual dirigida por la division que en su movimiento marque, pase por el extremo inferior del mismo objeto.

Entonces se encuentra el que opera en las mismas condiciones que cuando se hizo la graduacion, y el número escrito al lado de la division marcada, indicará la distancia.

Generalmente las estadias verticales están graduadas por sus dos caras, una con respecto á infantería y otra con respecto á caballería, existiendo por cada lado el cordon $0^m,65$.

Esta estadia no puede usarse pasando de los 450^m.

Estadia triangular.—Consiste en una placa de las mismas materia y forma que en el caso anterior figura 14 (lámina 11). En ella se ha marcado y vaciado un triángulo isósceles de corta base, siendo la direccion de esta, paralela á uno de los lados menores de la placa. Se resuelven las mismas igualdades que en el caso anterior y los valores que resulten, se ván llevando paralelamente á la base, de modo que estén comprendidas en la abertura del ángulo; se marcan por uno y otro lado sus prolongaciones, y en ella se escriben las correspondientes distancias.

Para observar con este aparato, se coloca como antes dijimos, el vértice hácia el ojo y la base hácia el campo, notando entre que dos rayas de la abertura se vé comprendido el soldado observado, y el número que esté en ellas, será el valor de la distancia.

Si quedase comprendido por una porcion intermedia entre dos rayas, como á la mitad, tercera parte de su separacion, habria que añadir á la distancia menor de las dos marcadas, la mitad, tercio etc. de la diferencia que hay entre sus valores.

Escusado es decir que en el uso de estos aparatos, el buen golpe de vista de un observador, aleccionado por la práctica, es lo que produce más precision.

Como aplicacion de la teoría de las estadias de ángulo variable destinadas á mayor alcance que las que acabamos de explicar, vamos ahora á indicar algunos aparatos, que toman el nombre de *Telémetros*, tomando el de «*Telémetros militares*» cuando tienen como objeto de mira un soldado de infantería ó caballería, en cuyo caso suelen estar destinados al servicio de los oficiales en campaña.

Anteojo micrométrico.—Corneta de Porro.— Este telémetro, en el cual su inventor ha conseguido reducir las dimensiones de los anteojos terrestres, no es en realidad sino uno de estos, en el cual los rayos luminosos han sufrido desviaciones en su primitiva marcha, sin variar en nada su convergencia relativa. Causan estas desviaciones con la condicion expresada, dos prismas triangulares rectángulos é isósceles colocados como indica la fig. 15 (lám. 11). En ella AB es el objeto que se observa. Los rayos que de él parten, cruzándose en el centro óptico del objetivo O, tienden á formar una imágen real é invertida del citado objeto. A la tercera parte próximamente de la distancia focal de O se interpone un primer prisma X, en la disposicion que la figura indica, siendo M el ángulo recto. Como el formado por los rayos procedentes de los extremos de AB, á causa de la distancia á que se encuentra este, y de su pequeñez relativa, es de muy pocos grados, dichos rayos entran casi normales á la cara PQ y en consecuencia no esperimentan refraccion sensible, viniendo á chocar en la MQ bajo ángulos que difieren muy poco de 45°. Como el ángulo límite del aire al vidrio es poco mayor de 43, no existirá refraccion sino reflexion total, yendo dichos rayos ya reflejados á encontrar á la cara PM en los puntos a' y b' bajo ángulos tambien casi iguales á 45°.

Rechazados por la cara PM con ángulos de reflexion iguales á los de incidencia, saldrán sensiblemente normales á la PQ, tendiendo á formar los extremos de la imágen sobre las direcciones $a'h$, $b'k$. Pero otro prisma Y igual en un todo al anterior y dispuesto como la figura indica, dá lugar á idénticos fenómenos, obligando á la imágen á formarse en $\overline{A}'\overline{B}'$, foco de la lente O' que en union con la O'' la invierten y colocan en $\overline{A}\overline{B}$, desde donde la amplía el ocular O'''. Pero el inconveniente que produce en un aparato de esta clase el sistema de las dos lentes O' y O'' destinadas á la inversion, ha hecho modificarle como lo indica la figura 16 (lámina 11), haciendo girar el prisma Y alrededor de un eje perpendicular á la cara RS en su punto medio. Ya en esta disposicion el prisma Y, sale la imágen directa, no necesitando mas que la lente ocular para amplificarla.

Todo el aparato se cubre de una envuelta adecuada á su forma tal como α, β, teniendo en γ una abertura circular donde está fijo el objetivo, y en δ un tubo en donde están el ocular y el retículo.

Necesario es en este aparato un movimiento que varíe aquel con respecto á este, para que se vean distintamente las cerdas, y otro que mueva á los dos juntos para que la imágen del objeto se coloque á la distancia de la vision distinta. El primero se obtiene tirando ó introduciendo el extremo del tubo δ, y el segundo por medio de la manivela Σ que sale fuera de la envuelta, á cuya parte interior vá unida una varilla encorvada y articulada que comunicando los movimientos de dicha manivela al tubo del ocular lo coloca en la posicion necesaria.

La fig. 17 (lám. 11) indica en menor escala la forma exterior del aparato.

El micrómetro ó retículo se compone de un diafragma circular con cinco hilos de posicion fija, dispuestos como indica la fig. 18. El intérvalo que media entre *a* y *c* está graduado por la relacion $\frac{d}{s} = \frac{D}{A}$ haciendo *d* igual á la distancia que media entre el punto de cruce de los rayos y el retículo, $D = 100^m$ y $A = 1$, de modo que si al hacer una observacion de un objeto cualquiera se le vé comprendido entre las cerdas *a* y *c*, estaremos á una distancia de dicho objeto igual á tantas veces 100^m como metros tenga el objeto observado.

La distancia *ab* es mitad de *ac* y *de* la quinta parte de *ac*, y como hemos visto existe la relacion $\frac{s'}{s} = \frac{D}{D'}$; al observar por la separacion *ac* un objeto cualquiera, este estará á tantas veces 2×100^m, como métros tiene el objeto observado, y si la observacion se hace por las cerdas *de* estará á tantas veces 5×100^m como métros contenga el objeto.

Se toman como dimensiones medias en los telémetros militares, la talla media del soldado de infantería, y la altura del de caballería, á caballo, y aun se conocen con aproximacion las diferentes partes de estas mismas dimensiones.

En el exterior de su aparato, *Porro* ha colocado una viñeta igual á la de la fig. 19 (lám. 11) en cuya parte de la izquierda están marcadas las dimensiones de la línea inferior hasta aquella á que corresponden, y á la derecha, las distancias á que están los objetos cuando se observan las mismas partes comprendidas entre las dos cerdas más separadas.

Parece excusado advertir que por lo anteriormente expresado, cuando se observen entre las cerdas *a* y *b* ó *b* y *c*, las distancias serán duplas, y cuando se miren entre las *d* y *e* quintúplas de las indicadas en la viñeta.

Desde el momento en que se tenga un objeto de magnitud aproximadamente conocida, como altura de los pisos de los edificios etc., pueden tomarse como puntos de mira, aplicando así el telémetro á los trabajos topográficos en general.

Anteojo micrométrico Napoleon III de Porro.—Este aparato, se compone de un sistema óptico de tres prismas y una lente, dispuestos como indica la figura 20 (lám. 11). Los prismas son acromáticos; los X é Y tienen una de sus caras convexa, y el Z las tiene todas planas, siendo su ángulo MN recto. El prisma X sirve de objetivo. La marcha de los rayos luminosos está indicada en la figura. Las caras convexas de los dos prismas hacen el efecto de un menisco, y cuando los rayos salen del sistema de todos ellos forman una imágen directa $\overline{A}\ \overline{B}$, que amplificada por el ocular, produce la $A'B'$ directa tambien.

Su retícula es lo mismo que la del anteojo corneta, está fija de posicion y unida invariablemente á la lente O y prisma Y, constituyendo el todo el sistema ocular.

La forma exterior del aparato es la representada por la fig. 21 (lám. 11) en que A es el tubo que contiene la lente y el retículo del ocular, en B y por la parte posterior está un orificio circular, que es el del objetivo. Existe un boton C, cuyo eje penetrando en el interior del aparato termina en un pequeño piñon. Engrana este en una cremallera trabajada en el borde de una placa D, engastada perpendicularmente ó otra de hojalata E, pintada de negro, que cubre la base superior del prisma F, dejando tan solo dos pequeños orificios para la entrada y salida de los rayos. Los movimientos iniciados por el boton C, producen la subida ó la bajada del prisma F, consiguiendo de este modo que la imágen que se observa pueda formarse á la distancia de la vision distinta.

En la parte superior del anteojo, está grabada una viñeta igual á la del anteojo corneta, siendo tambien igual su método de observacion.

Anteojo micrométrico de Rochon.—Este aparato está fundado en la consideracion de la proporcion establecida $\frac{d}{s} = \frac{D}{A}$, y en la fig. 22 (lám. 11) en la cual á causa de la gran distancia, y pequeña magnitud del objeto se puede considerar una de las visuales dirigidas á los extremos de este como perpendicular á él, sobre todo si se hace correr una de las cerdas del retículo hasta que coincida con el eje óptico, teniendo entonces la relacion $\frac{d}{s} = \cot. v$, y en consecuencia, si tenemos un aparato que en cada caso nos pueda dar á conocer el valor v ó de su contangente será ya fácil determinar los demás valores contenidos en la anterior igualdad, como luego explicaremos.

Existen varios aparatos destinados á hacer conocer dicho ángulo, limitándonos nosotros á citar el de Rochon.

Es este un anteojo terrestre con su ocular y objetivo acromático de tal, estando dotado tambien el sistema de aquel, del necesario movimiento sobre el tubo que contenga á este.

El aparato micométrico de este aparato, consiste en un cilíndro de cristal de roca DC, cuyas bases son paralelas á las del anteojo, formados por dos mitades D y C que son verdaderos prismas. La fig. 23 (lám. 11) nos indica la forma de todo el aparato. El tubo exterior M del anteojo lleva una graduacion de 30 en 30″ numeradas de minuto en minuto, correspondiente á los ángulos *v*, llevando á su lado cada ángulo el valor de su cotangente. Al lado de la graduacion y paralelamente á ella hay una ranura, sobre la cual se mueve la pieza *e* unida al cilíndro DC, por medio de un boton F que por un piñon que tiene en su parte inferior, resbala sobre una cremallera adosada á la parte interior del tubo. La pieza *e* tiene un nonio, que abrazando cuatro divisiones del limbo, está dividido en cinco, siendo por consiguiente la apreciacion del aparato de seis en seis segundos, ó lo que es lo mismo décimas partes de minuto.

Por medio del cilindro de cristal de roca, se pueden obtener los valores *v*, que tienen que grabarse en las distintas partes del tubo.

En efecto, el cristal de roca es una sustancia dotada de la propiedad de doble refraccion.

Aunque en este escrito, destinado exclusivamente á los alumnos de nuestra academia, se podian suprimir las nociones indispensables de los fenómenos que por esta propiedad se producen, por haberlas cursado con toda minuciosidad en la asignatura de física, no estará demás que recordemos lo mas preciso para la completa inteligencia del aparato.

Llámase *doble refraccion* á la propiedad que algunas sustancias tienen de dar dos rayos refractados por cada rayo incidente. De estos dos rayos, se llama *ordinario* el que sigue las leyes de la refraccion simple, y *extraordinario* el que no las sigue todas, ó no sigue ninguna. Este último es el caso general.

La sustancia tiene la doble refraccion *positiva*, cuando el índice del rayo extraordinario es mayor que el del ordinario, y *negativa* en caso contrario.

Hay algunas direcciones en las cuales la doble refraccion no tiene lugar, y á las rectas que las marcan se las llama impropiamente *ejes de doble refraccion*.

Si los rayos luminosos se encuentran en su incidencia en un plano perpendicular á la direccion del eje de doble refraccion, cumplen solo con la segunda ley de la refraccion simple los rayos extraordinarios que resultan, es decir, que el rayo refractado y el incidente se encuentran en el mismo plano perpendicular á la superficie de separacion; pero no cumplen con la primera, es decir que la relacion que guardan los senos de los ángulos formados por los rayos extraordinarios, no es la misma que la que existe entre los correspondientes á los ordinarios.

El cristal de roca está dotado de la doble refraccion positiva de un solo eje, esto es, que solo hay una direccion en que la refraccion doble no existe.

Recordadas estas ligeras nociones, ninguna dificultad hay yá en el conocimiento de la marcha de los rayos en el aparato de que nos ocupamos, y en la determinacion de los valores de los ángulos V fig. 1.ª (lám. 12.)

Consideremos los rayos provenientes del objeto, que despues de cruzarse bajo el pequeño ángulo V en el centro óptico del objetivo, van á incidir sobre la cara $m\, n$ bajo unos muy próximos al recto. La primera mitad C del cilindro está de tal modo trabajada, que su eje de doble refraccion está en sentido de la longitud del anteojo, mientras que la parte D tiene el citado eje perpendicular á dicha longitud.

Dedúcese de aquí que en el primer prisma los rayos continuarán simples, mientras que en el segundo se bifurcarán. El rayo ordinario atraviesa el medio sin refraccion, por ser este de caras paralelas, y chocarle aquel normalmente, yendo á formar en a el extremo de la imágen, sucediéndole lo mismo al rayo ordinario procedente del inferior, que va á formar el punto b.

Los rayos extraordinarios se producen al llegar al plano separacion de los dos semicilindros, y refractándose dos veces ván á formar la imágen $\overline{a}\ \overline{b}$ en el mismo plano de la figura. Ahora bien, lo que la imágen ordinaria $a\, b$ se ha separado de la extraordinaria $\overline{a}\,\overline{b}$, está medido por el ángulo de desviacion α, y vamos á demostrar que en un mismo cilindro ó en cilindros iguales, este ángulo α es de magnitud constante.

En efecto, es igual por correspondiente al r' de segunda refraccion del rayo extraordinario. El i de su primera incidencia es igual al ϵ del prisma, por tener sus lados perpendiculares, y constante como él. La relacion $\dfrac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r} = n$, en que i y n son constantes nos indica que r lo es tambien. El ángulo i' de segunda incidencia es igual por alterno interno al que es diferencia de los constantes i y r, y en consecuencia tiene su invariabilidad de valor, que comunica á r' ó á su igual α. por la relacion $\frac{\text{sen.}\ i'}{\text{sen.}\ r'} = n'$, en que i' y n' son constantes.

Dará mejor idea de lo que hemos dicho el siguiente conjunto de igualdades $i = \varepsilon$; $\frac{\text{sen.}\ i}{\text{sen.}\ r} = n$;

$$r = \text{arc. sen.} \left(\frac{\text{sen.}\ \varepsilon}{n}\right);\ i' = i - r = \varepsilon - \text{arc. sen.} \left(\frac{\text{sen.}\ \varepsilon}{n}\right);$$

$$\frac{\text{sen.}\ i'}{\text{sen.}\ r'} = n';\ r' = \text{arc. sen.} \frac{\left(\text{sen.} \left(\varepsilon - \text{arc. sen.} \left(\frac{\text{sen.}\ \varepsilon}{n}\right)\right)\right)}{n'};$$

lo cual en cada aparato nos permitiria conocer el valor de $r' = \alpha$ en todos los casos.

Se concibe por esta invariabilidad, que aproximando ó alejando el cilindro del objetivo, las imágenes tenderán á sobreponerse mas y mas, ó á alejarse una de otra, cuyas posiciones nos dará el ocular amplificadas y directas. Cuando el cilindro esté á la distancia focal exacta del objetivo, la imágen se formará dentro de aquel, y en este caso dándonos el ocular la imágen única, se colocará el cero de la graduacion de modo que corresponda con el del nonio.

Existirá además una posicion única, en la cual los extremos de las imágenes se tocarán quedando una en prolongacion de la otra, siendo en este caso de fácil determinacion el ángulo V, como se vé en la figura 2.ª (lámina 12), en la que aparecen formados los triángulos rectángulos *abo* y *abc* en los cuales se verifica $ab = k$ tang. r' y $ab = f$ tang. V, habiendo llamado respectivamente k y f á las distancias *ao* y *ac*, deduciendo de las dos el valor

$$\text{tang. V} = \frac{k}{f} \text{ tang. } r'.$$

Siendo constante para cada aparato el valor de r', y pudiéndose considerar f, cuando están los objetos muy lejanos como la distancia focal del objetivo, se pueden encontrar y marcar en las divisiones del tubo los valores de V correspondientes á los diversos de k; pero como quiera que no es muy fácil medir con exactitud el ángulo de los prismas del cual depende r', y las distancias k y f, se ha adoptado un medio muy fácil para hacer la graduacion.

Consiste este en la observacion con el anteojo de un objeto de magnitud conocida, colocado á distancia conocida tambien. Por medio del movimiento del boton se consigue la coincidencia de las dos imágenes, y en este caso se tendrá $\text{cot. V} = \frac{D}{m}$; siendo D la distancia y m la magnitud conocidas. Encontrado por esta igualdad el valor de V, se apunta en el tubo en el lugar correspondiente á la posicion actual del cero del nonio, colocando tambien á su lado el valor de su cotangente. Se hace con el mismo aparato la observacion en iguales condiciones del mismo m á otra distancia D', teniendo entonces cot. $V' = \frac{D'}{m}$, y colocado ya el valor de V′ tambien sobre el tubo, no hay mas que dividir la parte que media entre sus dos posiciones en tantas partes como medios minutos contenga la diferencia $V - V'$, y continuar la division en partes iguales á las marcadas, y su numeracion correspondiente á uno y otro lado de las divisiones V y V′.

Graduado ya el tubo de la manera que acabamos de indicar, el uso del aparato es muy sencillo. No hay más que observar con él el objeto, y mover el boton haciendo correr el nonio hasta tanto que las dos imágenes que se han formado estén en prolongacion, en cuyo caso la posicion del 0 del nonio nos indicará en la graduacion el valor del ángulo pedido, y de su cotangente el cual se sustituye en la fórmula $\frac{D}{m} = \cot. v$ que nos determina D conocido *m*, ó *m* en caso de que se conozca D.

Como la graduacion no contiene los valores de las cotangentes sino para los ángulos de minutos enteros, se ha formado una tabla de los valores de las demás que á continuacion se inserta. En ella la columna de la izquierda contiene los minutos, y las demás de la derecha las cotangentes de los ángulos indicados por aquella, y aumentados de seis en seis segundos.

El uso de estas tablas es sencillísimo, el punto de encuentro de la línea horizontal correspondiente á los minutos del ángulo, y de la vertical que contenga los segundos, nos dará el valor de su cotangente. La tabla que acompaña al aparato alcanza hasta 60′, y la nuestra tan solo hasta 39′ 54″.

Si son desconocidas la distancia D al objeto y su magnitud m, pueden encontrarse sus valores con este aparato, por medio de una doble observacion.

En la primera, del modo que hemos dicho encontramos el valor de V, y llamando x á la distancia á que el objeto se encuentra y por y su magnitud, tenemos $\cot. V = \frac{x}{y}$. Adelantando luego hácia el objeto una distancia l que se mide, y haciendo otra observacion que nos dé el valor de V′; $\cot. V' = \frac{x-l}{y}$, por lo cual tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, de las cuales se pueden deducir los valores de estas.

Las ventajas principales que el anteojo de Rochon proporciona, son 1.ª Las de los telémetros. 2.ª La de poder observar el marino, si pierde ó gana su buque en velocidad con relacion á otro, y 3.ª La de poder medir desde lejos las distancias á los objetos, cualesquiera que estos sean, medidas útiles é indispensables á los oficiales facultativos, que reconociendo los alrededores de las plazas sitiadas, tienen que trazar las líneas de ataque y construir las baterías en consecuencia de sus observaciones.

Este instrumento debe usarse siempre á distancias mayores de 100ᵐ.

TABLA.

Cotangentes del ángulo visual obtenido en el micrómetro de Rochon

Minutos	0" 0',0	6" 0',1	12" 0',2	18" 0',3	24" 0',4	30" 0',5	36" 0',6	42" 0',7	48" 0',8	54" 0',9
0	∞	34380	17190	11460	8600	6876	5730	4910	4300	3820
1	3438	3126	2855	2647	2456	2292	1249	2022	1910	1810
2	1719	1637	1563	1495	1433	1375	1322	1237	1228	1185
3	1146	1100	1074	1042	1011	982	953	929	905	882
4	860	838	819	800	781	764	747	732	716	702
5	688	674	661	649	636	625	614	603	593	583
6	573	563	554	545	537	529	521	513	506	498
7	491	484	477	471	465	459	452	446	451	435
8	430	424	419	414	409	404	400	395	390	386
9	382	378	374	370	366	362	358	354	351	347
10	344	340	337	334	331	328	325	321	318	315
11	312	310	307	304	301	298	296	294	292	290
12	287	285	282	280	279	275	273	271	276	266
13	264	262	260	258	256	254	252	250	248	247
14	246	244	242	240	238	236	234	233	231	230
15	229	227	225	223	221	220	219	218	217	216
16	215	213	211	210	208	207	206	205	204	203
17	202	201	200	196	198	197	196	194	193	192
18	191	189	188	187	186	185	184	183	182	181
19	180	179	178	177	176	175	174	173	173	172
20	172	171	170	169	168	167	166	165	165	164
21	164	163	162	161	160	159	158	157	157	156
22	156	155	154	153	153	152	152	152	151	151
23	151	150	149	148	147	146	145	145	144	143
24	143	142	141	140	139	139	138	138	137	137
25	137	136	135	135	134	134	133	133	132	132
26	132	131	130	129	129	128	128	128	127	127
27	127	126	125	125	124	124	124	123	123	123
28	123	122	122	121	121	120	120	120	119	119
29	119	119	118	118	117	116	116	116	115	115
30	114	114	113	113	113	112	112	112	111	111
31	111	110	110	109	109	109	109	108	108	108
32	108	107	107	106	106	106	105	105	105	104
33	104	104	103	103	103	102	102	102	101	101
34	101	101	100	100	100	99,6	99,3	99.0	99.0	99,3
35	98.0	97.7	97,4	97.1	96,8	96,5	96,2	96,0	95,8	95,6
36	95.0	95,2	94.9	94.6	94.3	94.0	93.8	93.6	93,4	93,2
37	93,0	92,7	92.4	92,1	91,8	91,5	91.2	91.0	90.8	90,6
38	90,5	90.3	90,0	89,7	89,6	89,3	89,0	88.7	88,4	88,2
39	88,0	87,7	87,4	87,1	86,8	86,6	86.4	86,4	86,2	86,1

LECCION 20.

LIGERAS IDEAS SOBRE ALGUNAS ESTADIAS MODERNAS.—MIRAS.

Estadias modernas.—No podemos concluir el estudio de la parte planimétrica, sin dar ideas, siquiera sean ligeras de algunos aparatos modernos destinados á la medicion rápida de distancias. El aumento progresivo del alcance de las armas de fuego, sobre todo de las piezas de artillería, ha puesto á la órden del dia este problema, cuya dificultad es tal, que su resolucion se ha considerado mucho tiempo como imposible, á ménos que se admitiese un error muy considerable. Sin embargo, numerosos ensayos efectuados en todos los paises, generalmente por los oficiales del ejército que son los llamados á aprovechar las ventajas, han conducido á resultados que nadie se atrevía á esperar, empleando medios suficientemente sencillos para que su uso en la guerra no ofrezca dificultad alguna.

Estadiómetro de Podio.—El capitan entonces de la guardia imperial francesa *Mr. de Podio*, presentó en la exposicion de París de 1867, un aparato que valió á su autor la medalla de plata.

Para determinar la distancia que media entre un punto inaccesible y otro en el cual se puede hacer estacion, supone *Mr. Podio* que aquella es el cateto de un triángulo rectángulo, cuyo otro cateto es una dimension constante de 50^m, y con su aparato, construido con arreglo á esta suposicion, resuelve dicho triángulo dando á conocer la longitud deseada con suficiente aproximacion, sin necesidad de cálculos ni tablas.

Se compone el aparato de dos discos de cobre superpuestos, que tienen el mismo centro é igual radio. Sobre el disco superior existe un anteojo que sirve durante la operacion para dirigir una visual sobre el punto al cual se mide la distancia. Debajo del disco inferior hay otro anteojo de doble ocular, destinada á fijar y comprobar sobre el terreno la direccion de una línea perpendicular, á la distancia que se quiere determinar; sobre esta línea perpendicular mide el observador una base de 50^m. El anteojo mas elevado descansa sobre el diámetro de un semicírculo que se mueve sobre el disco superior por medio de un boton. En la parte exterior de este semicírculo se encuentra un nonio que corresponde á una graduacion en medios grados, inscrita sobre el limbo del disco superior. La parte interior del semicírculo está dentada, y en ella engrana una rueda tambien dentada, que dirige por medio de un piñon la marcha de una aguja, cuya punta recorre un círculo de tal modo graduado, que indica las longitudes del cateto variable, por el movimiento que hay que dar al anteojo superior desde el otro extremo de la base 50^m para ver el punto inaccesible.

Se sigue de aquí, que cuando el observador se traslada desde su primera estacion, extremo de la distancia que se tiene que medir, á la segunda, que lo es de la base de 50^m medida, si damos vuelta al anteojo hasta que se vea el punto inaccesible, el cero del nonio nos indicará el valor de un ángulo del triángulo rectángulo, y la aguja el cateto desconocido.

Este instrumento, perfectamente construido, dá muy pequeños errores, como lo demuestran las siguientes experiencias hechas en Versalles por el general de ingenieros Blondeau.

Para las distancias de 400 á 1200^m, variando de 100 en 100 metros, el instrumento ha dado un error medio de 8^m. Cada medicion se ha hecho en $5'$.

Para las distancias de 1200 á 2000^m, variando de 200 en 200, el error medio ha sido de 21^m, y la duracion media de cada operacion de $6'$.

Las divisiones del cuadrante de la aguja están solo marcadas de 50 en 50^m, de manera que hay que tomar á ojo los números intermedios, aunque se concibe que nada sería más fácil que hacer mas minuciosa dicha graduacion.

Tiene el instrumento de que nos ocupamos, la gran ventaja de poder servir durante la noche, para encontrar la distancia á que se encuentra un punto cualquiera en el cual se distinga una luz, hoguera ú otro fuego fijo.

Grande sería la utilidad del empleo de este instrumento en las escuelas de distancias de la Infantería y Artillería, cuya gran importancia no está debidamente apreciada en nuestro país. Despues de calculadas las distancias á ojo es necesario medirlas con la cadena para convencerse de la exactitud de la apreciacion, pudiendo ahorrar tiempo y trabajo el estadiómetro de Podio.

Estadiómetros del capitan Koczieska de ingenieros Austriacos, y del coronel de Ingenieros francés Ebner.—El fundamento de los dos es la observacion simultánea desde los extremos de una base bien medida de los ángulos que con esta base, el vértice en las estaciones, forma el punto observado. Los aparatos de los dos extremos de la base están unidos por medio de un conductor eléctrico, que sirve para comunicar en cada caso el objeto que se observa y el ángulo deducido. Compréndese que se puede obtener un estadiómetro de esta clase, por medio de dos goniómetros cualesquiera, y un telégrafo eléctrico ú óptico. El estadiómetro Ebner, tiene sobre el otro la ventaja de tener calculadas unas tablas, que por medio de los valores de la base y de los ángulos observados, se encuentra la distancia á que se encuentra el punto. Tiene aplicacion esta clase de instrumento á la defensa de las costas, para conocer la distancia á que un buque enemigo se halla, y adquirir el convencimiento de si se le puede ó no ofender con el disparo de las piezas propias.

Otros muchos aparatos pudiéramos citar recientemente construidos; pero su gran número y el ser todos ellos modificaciones de los tipos que en esta leccion y la anterior hemos consignado, nos hace no extendernos demasiadamente en este asunto.

Miras.—Ocupémonos ahora de ellas por ser ya de absoluta necesidad desde el momento en que vamos á emprender en la siguiente leccion la determinacion de la tercera coordenada de los puntos del terreno.

Son las *miras* los listones graduados de que hablamos en la leccion anterior, si bien su especial graduacion les convertía tambien en miras especiales para el objeto en que se empleaban.

En general, la mira es una regla portátil dispuesta de tal modo, que permite la determinacion del intérvalo que media entre su pié, colocado en un punto cualquiera del terreno, y el rayo visual dirigido á dicha regla.

Hay dos clases de miras: de *tablilla ó mudas*, y *parlantes*.

Miras de tablilla.—Constan de una regla, por la cual corre una tablilla que se puede fijar á diferentes alturas de aquella.

La regla de la mira puede ser simple ó á corredera. Se llama *simple* cuando consiste en un solo liston cuya longitud no pasa de dos metros, y á *corredera* cuando por medio del encaje de un liston con otro ú otros puede desarrollar 4 ó mas metros.

Una mira simple se compone, fig. 3.ª (lám. 12) de una regla de 2 metros de altura, dividida en centímetros y milímetros por su parte posterior. Una abrazadera A sujeta á la tablilla B, permite el resbalamiento de esta sobre la regla, á la cual se puede sujetar por medio de un tornillo de presion C. En la parte media de la abrazadera A correspondiendo á la misma altura que el centro de la tablilla está el cero de un nonio grabado en dicha abrazadera y que permite apreciar los décimos de milímetro.

Termina á la regla por su parte inferior una cantonera M de metal, y á esta cantonera una pieza saliente N destinada á recibir el pié del portamira, que de este modo la coloca en la conveniente disposicion. El cero de la regla está en la parte inferior, y desde él al del nonio, se cuentan las diferentes alturas. La longitud de 2^m puesta como límite en este caso para la longitud de la regla, está fijada en consecuencia de la flexibilidad de la madera, y de la necesidad de que el portamira pueda llegar á todos los puntos con la mano.

La tablilla tiene que estar de tal modo pintada que se distinga con toda precision su línea media, y además que sea fácil ver, en el momento de la observacion cuando las dos partes en que la tablilla queda dividida por la cerda son iguales, puesto que á causa de cubrir esta cerda un cierto espacio, no es posible dirigir matemáticamente la visual á dicha línea media. Omitimos enumerar los modos mas admitidos para pintar las tablillas, por su gran número, y por lo arbitraria que es su adopcion.

Miras á corredera.—Se componen de una regla de 2^m de longitud, sobre la cual resbala otra de la longitud misma fig. 4.ª (lám. 12). Un rebajo practicado en la regla exterior y la forma particular de la saliente, facilitan este movimiento, como puede verse en el corte representado en la misma figura. La tablilla está invariablemente fija al extremo superior de la regla D saliente, y con el objeto de poder sujetar esta en cualquier posicion sobre la F, lleva unida á su parte inferior una abrazadera B que se mueve con ella, y que la aprieta contra la F por medio de un tornillo de presion que atravesando la D apoya su punta sobre un fleje de hierro, destinado, á impedir la deformacion de la F con la cual está en contacto.

Para elevar la mira á alturas mayores de 2^m se levanta la regla saliente por el tornillo ó boton B′, cuya abrazadera lleva un nonio en su parte inferior, y contando lo que se ha separado el cero de este nonio de la parte inferior de la mira, y añadiéndole 2^m se tendrá la altura á que la tablilla está.

Cuando esta altura tenga que ser menor de 2^m, en algunos casos, la abrazadera E es bastante ancha para que aflojando su tornillo pueda recorrer la regla F, pero es muchísimo mejor que la abrazadera B lleve tambien su tablilla, en cuyo caso á ella se observa para las alturas pequeñas y á la superior para las grandes, siendo así homogéneo el trabajo del portamira; así está indicado en la fig. 5.ª (lám. 12). La longitud de las reglas no es de 2^m exactos. En la parte superior de la fija, y en la inferior de la saliente hay unos pequeños escesos no graduados, que tienen por objeto dar mas estabilidad al sistema, cuando se haya sacado mucho la regla interior. Por efecto de esta misma falta de estabilidad, aunque las reglas tienen 2^m es conveniente no sacar la interior sino otro metro, pues sino es muy fácil que las condiciones de fijeza absoluta y completa verticalidad no queden cumplidas.

Miras parlantes.—Están dispuestas de tal modo, que el mismo que dirige á ellas los rayos visuales, puede conocer la porcion por ellos interceptadas. Por esta definicion vemos que la primitiva idea de la mira parlante está en la estadia de que nos hemos ocupado en la leccion anterior. Sin embargo, la necesidad de emplear las miras con varios instrumentos ha hecho necesario dar á aquella mas generalidad.

La mas sencilla de las miras parlantes, consiste: figura 6.ª (lám. 12) en un liston que suele tener 3^m de altura, perfectamente rígido, dividido en tres fajas en sentido de su longitud. La de la derecha del que observa está destinada á marcar los decímetros, la del centro los centímetros, y la de la izquierda los metros. Los milímetros se calculan á ojo. Los decímetros están indicados por su número de órden dentro del mismo metro, de abajo arriba, llevando los del segundo metro un punto en su parte superior, y los del tercer metro dos puntos. Los centímetros no están numerados pero se pueden contar dentro de cada decímetro por las fajas alternativamente blancas y negras con que están representados (*).

Los números que indican los metros están marcados en grandes caracteres que abrazan las últimas divisiones propias y las primeras del siguiente. Compréndese que del mismo modo puede estar graduada una mira que tenga otras reglas que moviéndose á corredera sobre la principal puedan proporcionarla un des-

(*) La pequeñez de nuestra figura ha hecho necesario que cada faja represente un doble centímetro.

arrollo de mayor longitud que la expresada, aunque esto no es usual ni conveniente.

Mira de Bourdaloue.—*Mr. Bourdaloue* ha establecido otro sistema para indicar las graduaciones en sus miras. Una línea AB, fig. 7.ª (lám. 12) divide en dos partes iguales en sentido de la longitud del liston el ancho de este. Las divisiones centimétricas están indicadas dos á dos por fajas alternativamente blancas y negras, y las correspondientes á cada doble decímetro, están tambien alternativamente á la mitad de la derecha ó en la de la izquierda, para dar lugar en la parte no graduada á la colocacion del número que indique dichos dobles decímetros dentro de cada metro. Los del segundo de estos llevan un punto encima de sus cifras, los correspondientes al tercero dos puntos, etc. Ha adoptado tambien Bourdaloue la conveniente reforma de poner los números invertidos, con el objeto de observarlos directos al traves del anteojo astronómico, y de sustituir por números romanos las cifras 5 y 9 (en las miras que lo contengan) que tal vez se pudieran confundir con los 3 y 6.

Muchas son las modificaciones que en los modos de indicar las divisiones de la mira se han introducido, pero la misma sencillez del aparato nos dispensa de una difusion que podia introducir dificultades en lo que por sí no las tiene, limitándonos únicamente á citar una que creemos sea de las mas modernas.

Es la que se indica en la fig. 8.ª (lám. 12). La regla que constituye la mira, tenga corredera ó nó la tenga, tiene mayor ancho que las que ya hemos explicado, estando tambien dividida en tres fajas longitudinales, siendo la central de dimension mayor que las laterales. En la faja de la derecha del observador que suele ser negra, roja, ó de otro color que resalte sobre el blanco, están marcados los centímetros por pequeños triángulos de este color, cuyos vértices apoyan en el límite izquierdo de la faja siendo los lados opuestos paralelos á la longitud de la regla.

Los medios decímetros y los decímetros están indicados en la misma faja por otros triángulos, colocados de modo inverso que los anteriores, teniendo en su vértice mas cercano al borde un pequeño circulito tambien blanco, estando además los decímetros indicados por su numeracion en blanco con grandes carácteres invertidos y con la puntuacion correspondiente para indicar los diversos metros. En la faja de la izquierda del mismo color que aquella de que acabamos de hablar, solo tiene pequeños círculos á la misma altura que los de la opuesta, con el objeto de facilitar las observaciones.

Los milímetros se aprecian por cinco cuadrados negros, rojos, etc., sobre fondo blanco, que ocupan la faja central, y están dispuestos en grada regular desde un punto correspondiente á una division de la izquierda á su inmediato superior de la derecha. Compréndese que la parte media del primer cuadrado estará elevada 2 milímetros sobre la division centimétrica correspondiente, la del segundo cuadrado 4 milímetros etc. Los milímetros sencillos se aprecian á ojo.

Bastan las nociones que sobre miras hemos dado, para conocer este instrumento auxiliar tan sencillo é importante, no solo bajo las formas enunciadas, sino bajo todas aquellas que la voluntad del constructor ó la conveniencia del topógrafo le hayan dado.

La sencilla observacion de una mira cualquiera, dá á conocer el modo como está graduada.

FIN DEL TOMO 1.º

PROGRAMA PARA EL EXÁMEN

É

ÍNDICE DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO PRIMERO.

PRELIMINARES Y MÉTODOS DESCRIPTIVOS.

TRIANGULACION.

LEVANTAMIENTO DE LOS DETALLES.

2 Tomos
C31-
36 €

Se vende esta obra en casa de D. José Lopez, Calle Real, núm. 20, y en Madrid en la libreria de la Señora Viuda de Poupart é hijo, Paz, 6.

SANZ.

TOPOGRAFIA
Y ELEMENTOS
DE GEODÉSIA.

I.

SEGOVIA.